Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104926**

ID профиля: **333337**

Вариант 22

Чистовик. Матем., 11кл.

№1. Вариант 22.

Пусть d — разность прогрессии

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$S = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{2a_1 + d \cdot 14}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > S - 24$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < S + 4$

Также дано: $d > 0$, $a_1 \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$

Необходимо и достаточно найти a_1:

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z},\ d \in \mathbb{N}, \\ S = 15(a_1 + 7d), \\ a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > S - 24, \\ a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 < S + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} S < a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 + 24, \\ S > a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 - 4 \end{matrix}$$

$\Downarrow$

$90d^2 + 24 > 110d^2 - 4$

$28 > 20d^2$

$d^2 < \frac{28}{20} = 1{,}4$

$d \in \mathbb{N} \Rightarrow d = 1$

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z},\ d = 1, \\ S = 15(a_1 + 7), \\ a_1^2 + 21a_1 + 90 > S - 24, \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < S + 4 \end{cases} \Longleftarrow$$

— равносильно условию

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z}, \\ a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24, \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases}$$

Чистовик.

Матем., 11кл.

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z}, \\ a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0, \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z}, \\ (a_1+3)^2 > 0, \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 = 0$

$D = 36 - 4 = 32 = 16 \cdot 2$

$a_1 = \dfrac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z}, \\ a_1 \neq -3, \\ a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

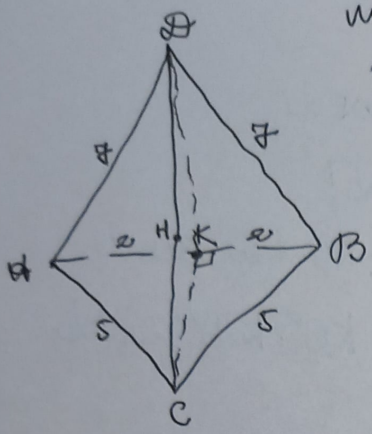
$2 < 2\sqrt{2} = \sqrt{8} < 3$

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z}, a_1 \neq -3, \\ a_1 \in [-5; -1] \end{cases}$$

Ответ: $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$.

Чистовик. Матем., 11 кл.

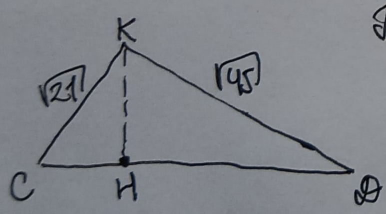
№2.



Заметим, что $\triangle ACB$ и $\triangle AДB$ – равнобедренные.
Тогда тетраэдр будет симметричен относительно плоскости, перпендикулярной AB и проходящей через $CД$.
Пусть K – середина AB.
Тогда $(KCД)$ и есть данная плоскость.
$AK = 2$, $BK = 2$ (по усл. и построению)

$CK^2 = BC^2 - KB^2 = 25 - 4 = 21$
$ДK^2 = BД^2 - KB^2 = 49 - 4 = 45$
(на простейшие планиметрические факты, как медиана и высота р/б $\triangle$, далее для краткости ссылаться не буду)

Рассм. $\triangle ДKC$.

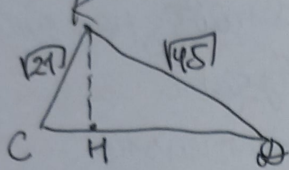


Пусть KH – высота.
Тогда (HAB) — окружность искомого цилиндра.

Представим следующее действие:
Зафиксируем AB и будем вращать относительно неё фиксированные $\triangle ACB$, $\triangle AДB$.
Так мы получим всевозможные тетраэдры $ABCД$. (Кроме случаев $\angle ДKC = 0°$, $\angle ДKC = 180°$).
Т.е. $\angle ДKC$ принимает все значения из $(0°; 180°)$.

Чистовик. Матем., 11 кл.

Пусть $\angle DKC = \alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$.



$$CD^2 = 21 + 45 - 2\sqrt{21\cdot 45}\cos\alpha$$

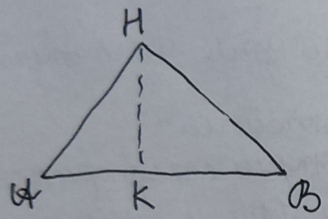
$$CD = \sqrt{66 - 2\sqrt{21\cdot 45}\cos\alpha}$$

$$S_{\triangle KCD} = \frac{1}{2} KH\cdot CD = \frac{1}{2} KC\cdot KD\cdot \sin\alpha$$

$$KH^2\cdot CD^2 = KC^2\cdot KD^2\cdot \sin^2\alpha$$

$$KH^2\left(66 - 2\sqrt{21\cdot 45}\cos\alpha\right) = 21\cdot 45\cdot \sin^2\alpha$$

Рассм. $\triangle AHB$, HK — высота и медиана.



$$S_{\triangle AHB} = \frac{1}{2} HK\cdot AB = \frac{AH\cdot HB\cdot AB}{4R}$$

$$2HK = \frac{AH\cdot HB}{R}$$

$$R = \frac{AH\cdot HB}{2HK} = \frac{AH^2}{2HK} = \frac{2^2 + HK^2}{2HK} =$$

$$= \frac{HK^2 + 4}{2HK}$$

$$R = \frac{\dfrac{21\cdot 45\sin^2\alpha}{66 - 2\sqrt{21}\cdot\sqrt{45}\cos\alpha} + 4}{2\sqrt{\dfrac{21\cdot 45\sin^2\alpha}{66 - 2\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{45}\cos\alpha}}}$$

$$R(HK) = \frac{HK^2+4}{2HK} = \frac{HK}{2} + \frac{2}{HK}$$

$$R'(HK) = \frac{1}{2} - \frac{2}{HK^2} \Rightarrow R_{min} = R(HK=2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$$

Чтобы дорешать задачу, достаточно найти $R'(\alpha)$, найти минимумы функции на $(0^\circ; 180^\circ)$, затем найти $CD(\alpha)$.

К сожалению, я не успел это сделать. (Также можно найти $\min\{|HK-2|\}$ от α и посчитать CD.)

Чистовик. Матем., 11кл.

№3.

$M = \{(x;y) \mid \exists\, a, b$ − решение системы нер-в)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50,\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b;\ 50)\end{cases}$$

$\Updownarrow$

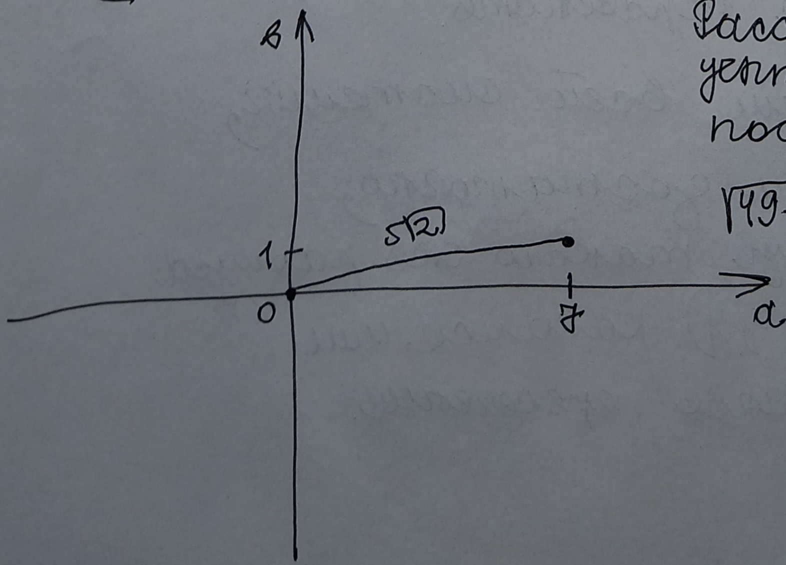
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50,\\ a^2+b^2\le 14a+2b,\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 50,\\ a^2-14a+49+b^2-2b+1\le 50,\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 50,\\ (a-7)^2+(b-1)^2\le 50,\\ (a-0)^2+(b-0)^2\le 50\end{cases}$$ − в системе координат aOb − 3 круга радиуса $5\sqrt{2}$

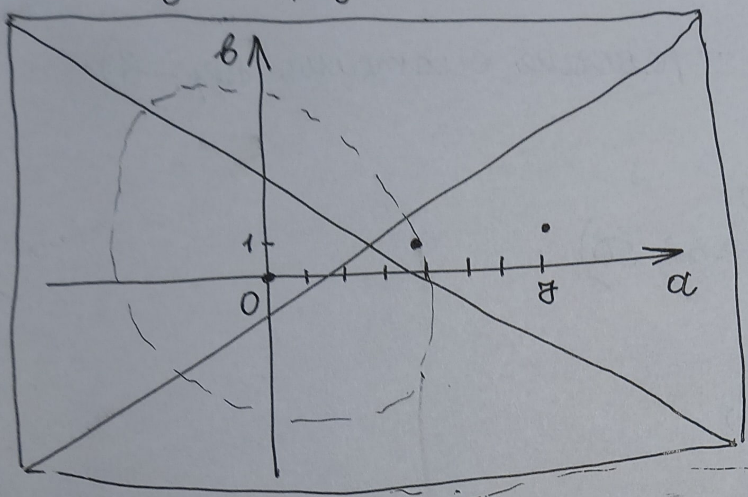


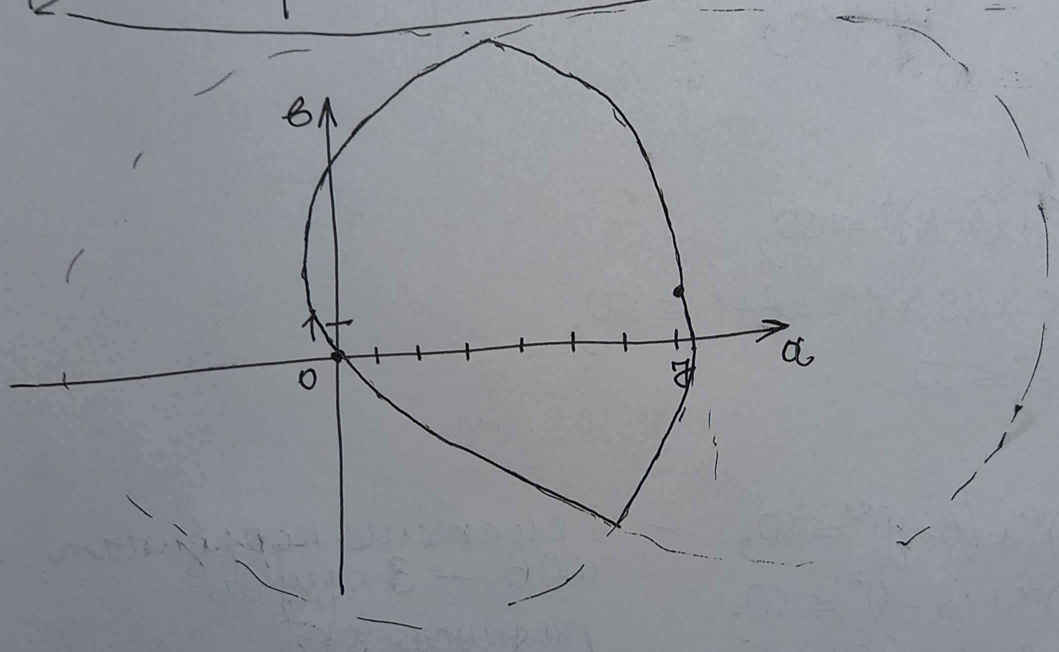
Расстояние между центрами двух последних кругов:

$\sqrt{49+1}=5\sqrt{2}$

[redacted]

Эти два круга:



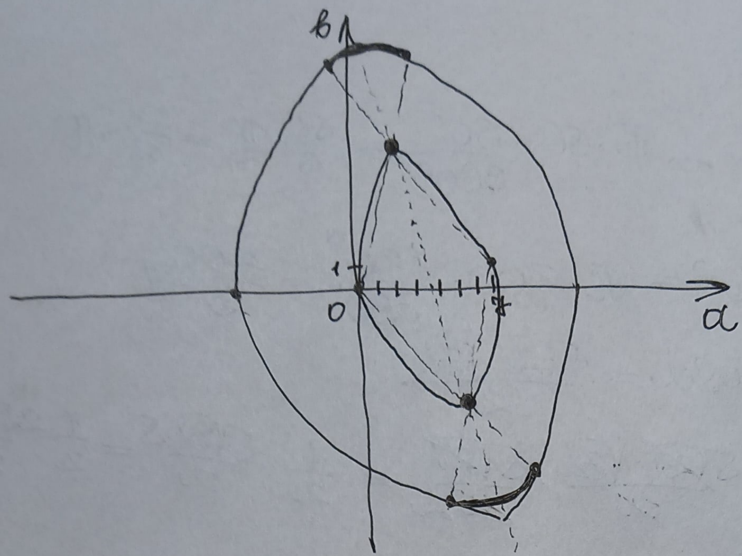


Их пересечение и есть пересечение двух последних неравенств.

Чтобы было реш. всей системы, необходимо и достаточно, чтобы 3-й круг такого же радиуса с центром в $(x;y)$ касался или пересекал данное пересечение.

Чистовик. Матем., 11 кл.

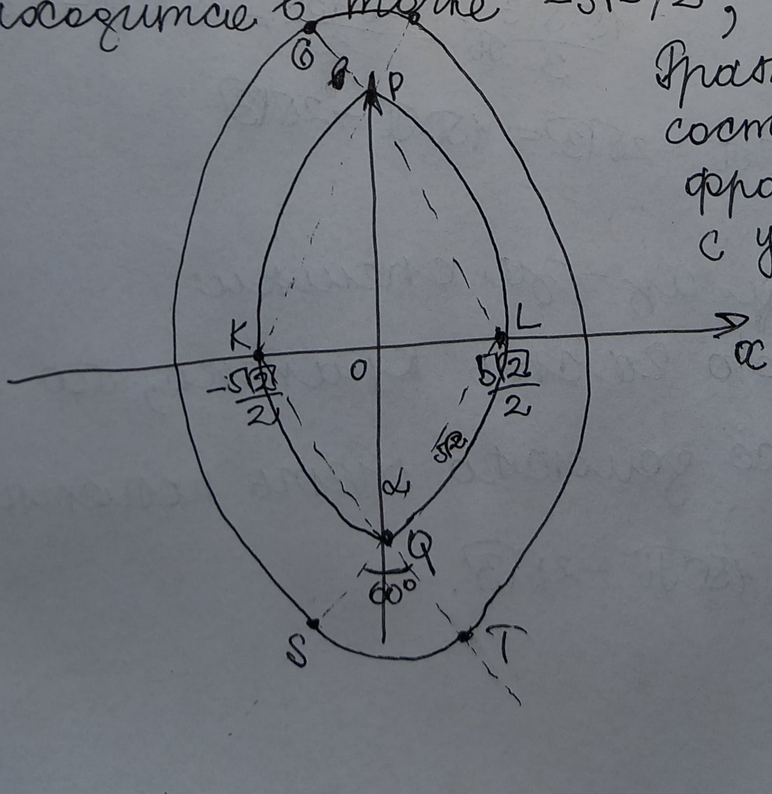
Границу же фигуры M даст касание.



Обозначим пересечение — фигура F.

Площадь фигуры M не изменится при движениях плоскости.

Тогда пусть центр первой окр. находится в точке $-5\sqrt{2}/2$, 2-й — в $5\sqrt{2}/2$.



Граница M состоит из фрагментов окр. с центрами в K и L и радиусами $10\sqrt{2}$, а также из фрагментов окр. с центрами в P и Q и радиусами $5\sqrt{2}$.

Чистовик. Матем., 11кл.

$$\sin\alpha = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PLQ = 120^\circ.$$

$$S_{\text{сектора } QST} = \pi \cdot 50 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{50}{6}\pi = \frac{25}{3}\pi$$

$$S_{\text{сектора } LGS} = \pi \cdot 200 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{200}{3}\pi$$

$$OQ = 5\sqrt{2} \cdot \cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{OLQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{5\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}\,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{POQ} = 2S_{OLQ} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{половины } M} = S_{\text{сек } LGS} - S_{POQ} + S_{\text{сек } QST} =$$

$$= \frac{200}{3}\pi + \frac{25}{3}\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{225}{3}\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{15\cdot5\cdot3}{3}\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2} = 15\cdot5\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$S_M = 30\cdot5\pi - 25\sqrt{3} = 150\pi - 25\sqrt{3}$$

Оформил из-за спешки последнюю часть кратко, но вроде всё должно быть понятно.

Ответ: $S_M = 150\pi - 25\sqrt{3}$.

Черновик

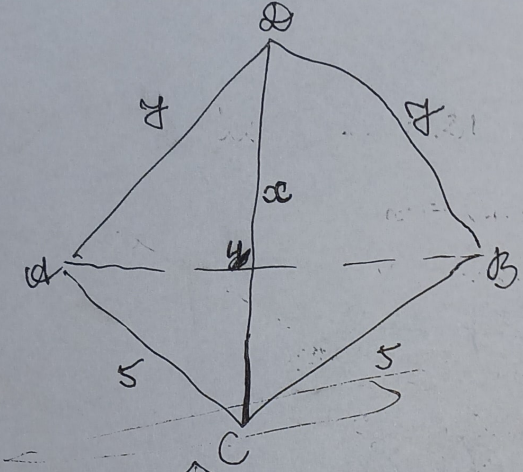
$$a_1 + \ldots + a_{15} = S$$

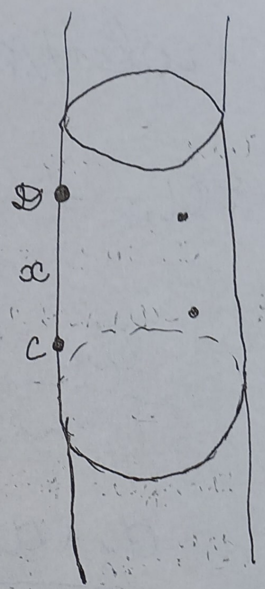
$a_i \in \mathbb{Z}$

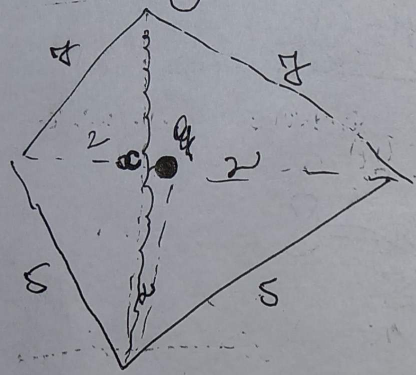
$$\frac{a_1 + a_n}{2} n = S$$

$$\frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} n = S$$

$$\left(a_1 + 7d\right) \underset{15}{\cancel{n}} = S$$







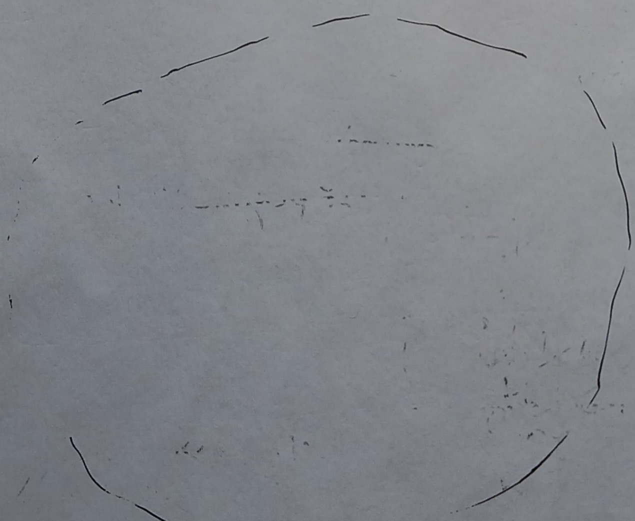
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 50, \\ a^2+b^2 \leq 14a+2b, \\ a^2+b^2 \leq 50. \end{cases}$$

$\leq x^2-2ax+\cancel{a^2}+$

$+y^2-2by+\cancel{b^2} \leq 50 \leq$

$\leq \cancel{a^2}+b^2$

$x^2-2ax+y^2-2by<1$

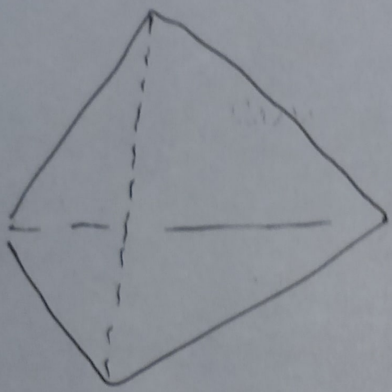


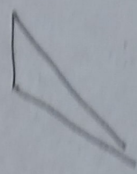
$\frac{1}{2}-\frac{2}{HK^2} \overset{?}{\vee} 0$

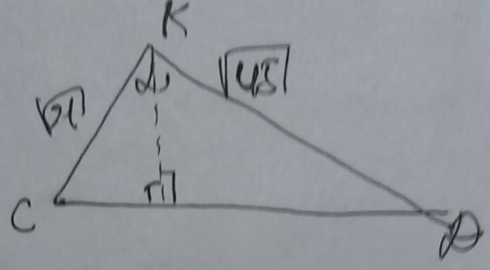
$\frac{1}{2} \overset{?}{\vee} \frac{2}{HK^2}$

$HK^2 \overset{?}{\vee} 4$

$HK \overset{?}{\vee} 2$



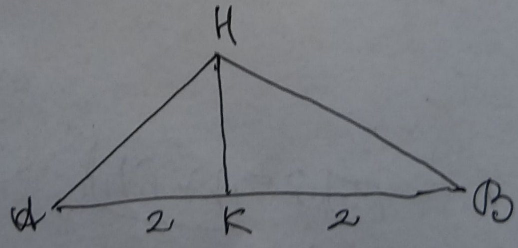




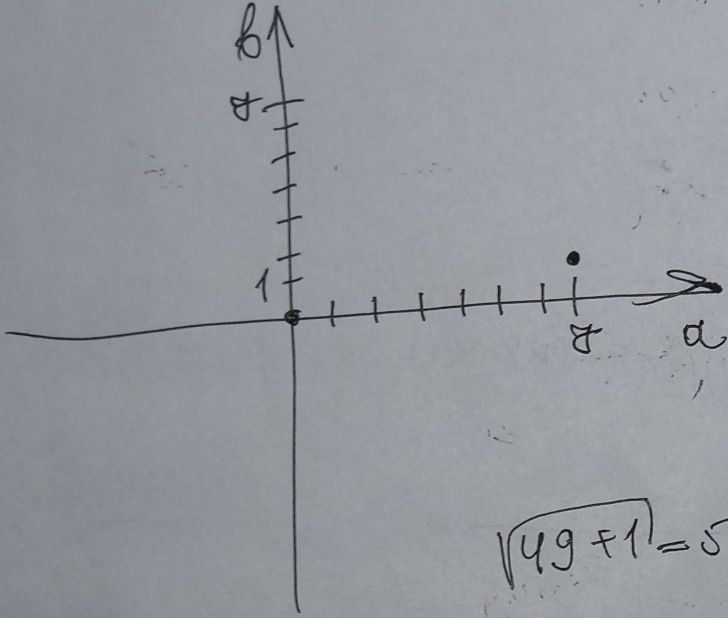
$$CD^2 = 21 + 45 - 2\sqrt{21 \cdot 45}$$

$\triangle HAB$ – р/б

HK – висота



$$S_{\triangle AHB} = 2 \cdot HK = \frac{abc}{4R}$$



$$\sqrt{49+1}=5\sqrt{\boxed{2}}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104926**

ID профиля: **333337**

Вариант 22

Чистовик. Матем., 11 кл.

№ 4. Вариант 22.

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 2\cdot 7, \\ НОК(a; b; c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

$k := 2\cdot 7a$; $l := 2\cdot 7b$, $m := 2\cdot 7c$

$$\begin{cases} НОД(k; l; m) = 1, \\ НОК(k; l; m) = 2^{16}\cdot 7^{17} \end{cases}$$

кол-во $(k; l; m)$ = кол-во $(a; b; c)$

Необходимо и достаточно:

Одно из чисел $(k; l; m) \not\vdots\ 2$

Одно из чисел $(k; l; m) \not\vdots\ 7$

Каждое из них представляется

в виде $2^{\alpha}7^{\beta}$, $\alpha, \beta \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$k = 2^{\alpha_k}7^{\beta_k}$

$l = 2^{\alpha_l}7^{\beta_l}$

$m = 2^{\alpha_m}7^{\beta_m}$

$16 = 0 + 16 + 0$ – 2 различных

$\left.\begin{matrix} 1 + 15 + 0 \\ 2 + 14 + 0 \\ \vdots \\ 7 + 9 + 0 \end{matrix}\right\}$ 3 различных слагаемых

$8 + 8 + 0$ – 2 различных

Формула перестановок:

$P(2; 1) = 3$

$P(1; 1; 1) = 3! = 6$

$17 = 0 + 17 + 0$ – 2 различных

$\left.\begin{matrix} 1 + 16 + 0 \\ \vdots \\ 8 + 9 + 0 \end{matrix}\right\}$ 3 различных слагаемых

Тогда кол-во =

$= 2\cdot(3)\times(3) + 7\times(6)\times(3) + 2\cdot(3)\times 8\cdot(6) + 7\cdot(6)\times 8\cdot(6) =$

$= 18 + 126 + 48\cdot 6 + 42\cdot 48 = 144 + 48^2 = 144 + 1600 + 640 + 64 = 2240 + 208 = 2448$

Ответ: 2448 троек.

Чистовик. Матем., 11 кл.

№5.

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$; $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

Ограничение: $\begin{cases} \frac{x}{2}+1\neq 0 \\ \frac{x}{2}+1\neq \pm 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 0 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \\ \frac{x}{2}+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}+1>0, \\ \frac{x}{2}+1\neq 1, \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0, \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6>0, \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \end{cases}$

$\frac{x}{2}+1:=a$; $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}:=b$; $\frac{3x}{2}-6:=c$

$\log_{a^2} b$; $\log_{b^{\frac{1}{2}}} c^2$; $\log_{c^{\frac{1}{2}}} a$

$\quad\|\qquad\qquad\|\qquad\qquad\|$

$\frac{1}{2}\log_a b$; $2\cdot 2\log_b c$; $2\log_c a$

~~Случай 1:~~ $\cancel{\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c}$

$\cancel{\log_a b = 8\log_b c}$

$\cancel{\frac{1}{\log_b a} = 8\log_b c}$

$\cancel{8\log_b a\cdot\log_b c = 1}$

Ни один из логарифмов $\neq 0$ по ограничениям.

Пусть r — то самое число.

②

Чистовик. Матем., 11 кл.

Тогда $\frac{1}{2}\log_a b\cdot 4\log_b c\cdot 2\log_c a=t^2(t-1)$

$$4\cdot\frac{\cancel{\lg b}}{\cancel{\lg a}}\cdot\frac{\cancel{\lg c}}{\cancel{\lg b}}\cdot\frac{\cancel{\lg a}}{\cancel{\lg c}}=t^3-t^2$$

$$t^3-t^2-4=0$$

$$(t-2)(t^2+t+2)=0\Rightarrow t=2$$

нет реш.

~~Когда~~ То есть один из $\log=1$, остальные два $\log=2$.

Случай 1: $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_a b=1,\\ 4\log_b c=2,\\ 2\log_c a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a b=2,\\ \log_b c=\frac{1}{2},\\ \log_c a=1\Leftrightarrow a=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a^2,\\ c=\sqrt{|b|},\\ a=c\end{cases}$

Случай 2: $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_a b=2,\\ 4\log_b c=1,\\ 2\log_c a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a b=4,\\ \log_b c=\frac{1}{4},\\ \log_c a=1\Leftrightarrow a=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a^4,\\ b=c^4,\\ a=c\end{cases}$

Случай 3: $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_a b=2,\\ 4\log_b c=2,\\ 2\log_c a=1\end{cases}\qquad\begin{cases}\log_a b=4,\\ \log_b c=\frac{1}{2},\\ \log_c a=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a^4\\ b=c^2,\\ c=a^2\end{cases}$

Случай 1: $\begin{cases}b=a^2,\\ a=c\end{cases}$

Случай 2: $\begin{cases}b=a^4,\\ a=c\end{cases}$

Случай 3: $\begin{cases}b=c^2,\\ c=a^2\end{cases}$

Чистовик. Матем., 11кл.

Случай 1: $\begin{cases} b=a^2, \\ a=c \end{cases}$

Для всех случаев $a, b, c \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$a=c \Leftrightarrow \frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6$

$7=x$

$\begin{cases} a=4,5, \\ b=\frac{49}{2}-\frac{17}{4}, \\ c=4,5 \end{cases}$

~~$\frac{11}{4} \neq \left(\frac{9}{2}\right)^2$ — не подходит~~

$b=\frac{81}{4}=a^2$ — подходит

Случай 2: $\begin{cases} b=a^4, \\ a=c \end{cases}$

$x=7$

$\left(\frac{81}{4}\right) \neq \left(\frac{9}{2}\right)^4$ — не подходит

Случай 3: $\begin{cases} b=c^2, \\ c=a^2 \end{cases}$

$c=a^2 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}-6=\left(\frac{x}{2}\right)^2+2\frac{x}{2}+1$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x}{2}+7=0$

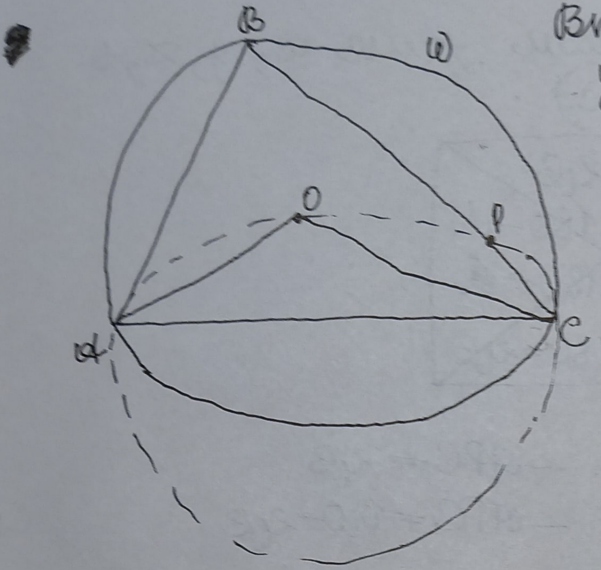
$D<0 \Rightarrow$ нет реш.

Ответ: $x=7$.

Чистовик. Матем., 11кл.

№6.

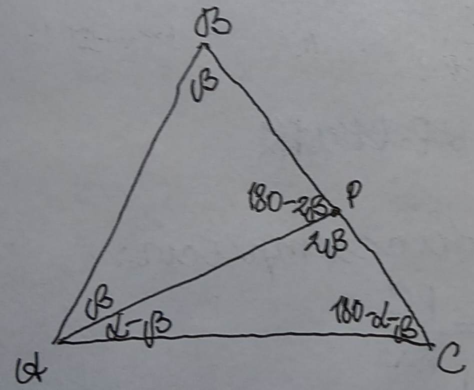
Пусть α, β и $180-\alpha-\beta$ — углы A, B, C $\triangle ABC$.



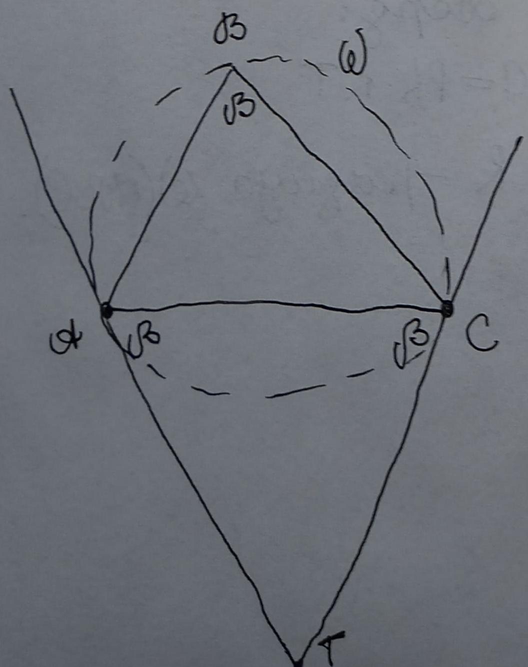
Вписанные и центральные углы:
$\angle APC = \angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$

По св-ву смежных углов и суммы углов $\triangle$:
$\angle BAP = \beta$.

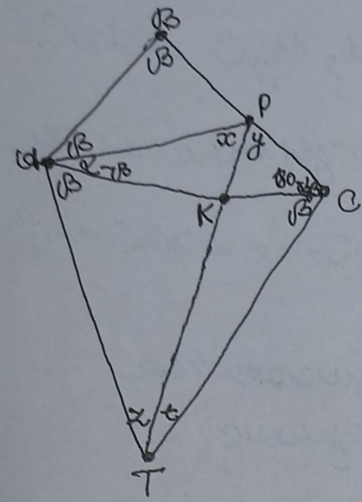
Остальные углы тоже считаются (см. рис.)



По св-ву угла между хордой и кас.:
$\angle CAT = \angle ACT = \beta$.



Чистовик. Матем., 11 кл.



$S_{\triangle APK} = 7$

$S_{\triangle CPK} = 5$

Обозначим углы x, y, z, t (см. рис.)

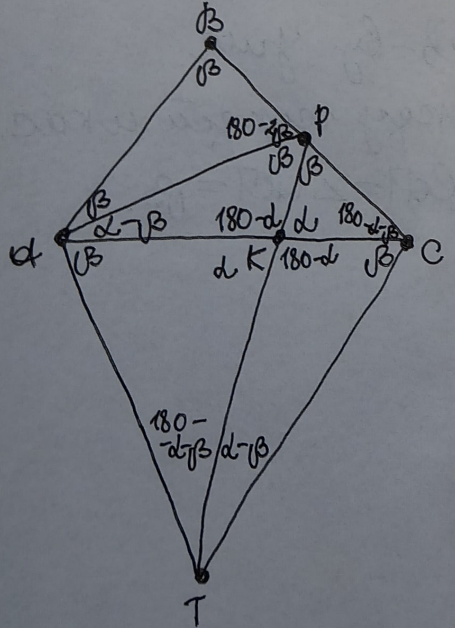
$$\cancel{\boxed{\begin{aligned} x+y &= 2\beta \\ x+z &= 180-\alpha \\ y+t &= 180-\alpha \\ z+t &= 180-2\beta \end{aligned}}}$$

$APCT$ – вписанный, т.к. $\angle APC = 2\beta$

$\angle ATC = 180 - 2\beta$

Тогда $\angle APT = \angle ACT = \beta$

$\angle CPT = \angle CAT = \beta$



~~$S_{\triangle APK}$~~ ~~APK~~

Св-во биссектрис:

$$\frac{AP}{AK} = \frac{PC}{KC}$$

Св-во хорд:

$AK \cdot KC = PK \cdot KT$

Пусть R – радиус $\omega(ABC)$.

Чистовик. Матем., 11 кл.

$\triangle ABP$ — р/б, $BP = PA$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\beta$

$S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \sin\beta = \frac{1}{2} BP \cdot PK \sin\beta = 7$

$S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2} CP \cdot PK \sin\beta = 5$

$S_{\triangle APK} + S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2} PK \sin\beta (BP + CP) =$

$= \frac{1}{2} BC \cdot PK \sin\beta = 12$

$\triangle CPK \sim \triangle CBA$ (углы α, β)

$\frac{PK}{AB} = \frac{CP}{CB} = \frac{CK}{CA}$

$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{AK}{KC}$ (высоты равны)

$\frac{AK}{KC} = \frac{7}{5} \Rightarrow AC = AK + KC = \frac{7}{5} KC + KC = \frac{12}{5} KC$

$\frac{PK}{AB} = \frac{CK}{CA} = \frac{5}{12} \Rightarrow PK = \frac{5}{12} AB$

$12 = \frac{1}{2} BC \cdot PK \sin\beta = \underbrace{\frac{1}{2} BC} \cdot \frac{5}{12} \underbrace{AB \cdot \sin\beta} =$

$= \frac{5}{12} S_{\triangle ABC} \Rightarrow \boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{144}{5}}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{\cancel{AB} \cdot \cancel{BC} \cdot CA}{4R} = \frac{1}{2} \cancel{AB} \cdot \cancel{BC} \sin\beta$

$\frac{CA}{4R} = \frac{1}{2} \sin\beta$

Чистовик. Матем., 11 кл.

$CA = 2R\sin\beta$

$$\frac{7}{5} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{AP}{CP} = \frac{BP}{CP} = \frac{AK}{CK}$$

$\beta = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2} BC\cdot PK \sin\beta = 12$$

$$BC\cdot PK = \frac{24}{\sin\beta}$$

$$\frac{CP}{CB} = \frac{PK}{AB} = \frac{5}{12} \Rightarrow CB = \frac{12}{5}CP$$

$$\frac{12}{5} CP\cdot PK = \frac{24}{\sin\beta}$$

$$CP\cdot PK = \frac{10}{\sin\beta}$$

$$\frac{1}{2} AB\cdot BC\sin\beta = \frac{144}{5} \Rightarrow AB\cdot BC = \frac{2\cdot 144}{5\sin\beta}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\beta =$$

$$= AB^2 + BC^2 - 2\cdot\frac{2\cdot 144}{5\sin\beta}\cos\beta = AB^2 + BC^2 - \frac{4}{5}\cdot\frac{144\cdot 4}{3}$$

$AK\cdot KC = PK\cdot KT$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{7}{5} \Rightarrow AK = \frac{7}{5}KC$$

$$\frac{7}{5}KC^2 = PK\cdot KT$$

Не дорешал.

черновик.

НОД$(a; b; c) = 14 = 2 \cdot 7$

НОК$[a; b; c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

~~a · b · c = НОД~~

$a = 2 \cdot 7 \cdot k$

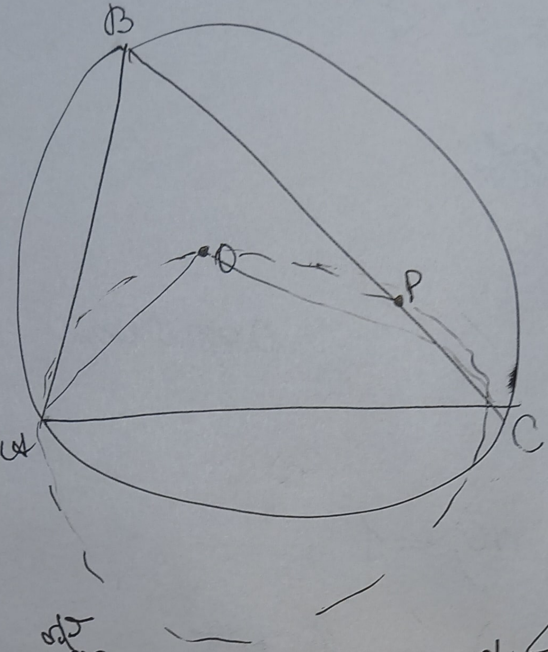
$b = 2 \cdot 7 \cdot l$ одно из

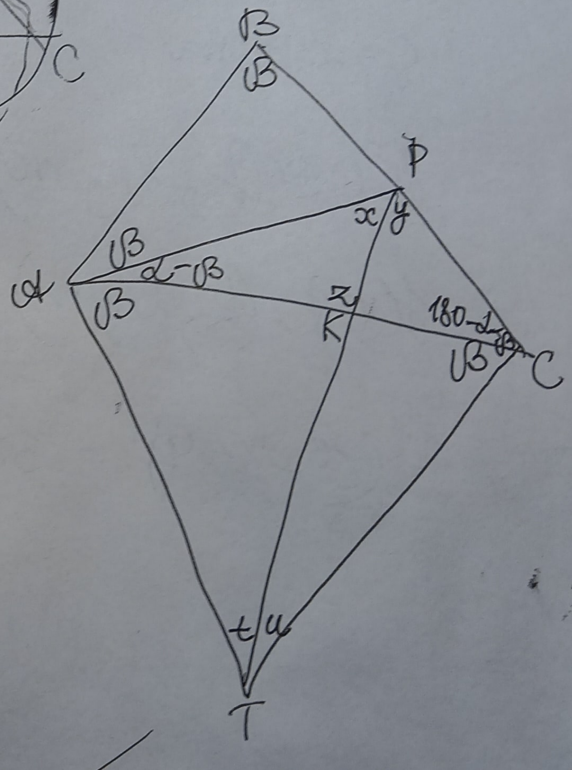
$c = 2 \cdot 7 \cdot m$

НОД$(k; l; m) = 1$

НОК$(k; l; m) = 2^{16} \cdot 7^{17}$

$(t^3 - t - 4)' = 3t^2 - 1$ $t^2 \overset{?}{=} \frac{1}{3}$





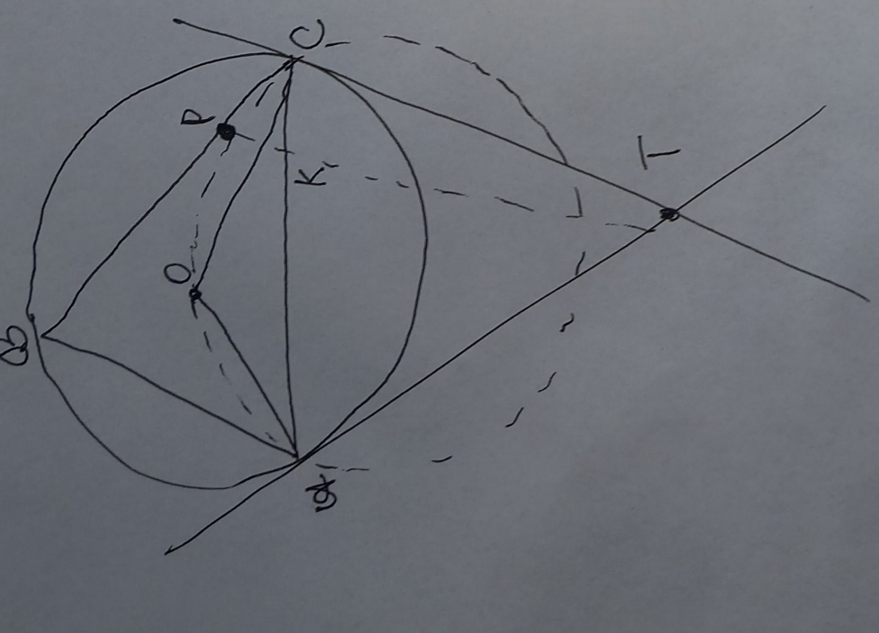
$S_{APK} = 4$

$S_{CPK} = 5$

$S_{ABC} = ?$

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

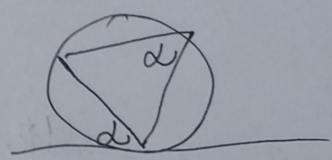
$AC = ?$

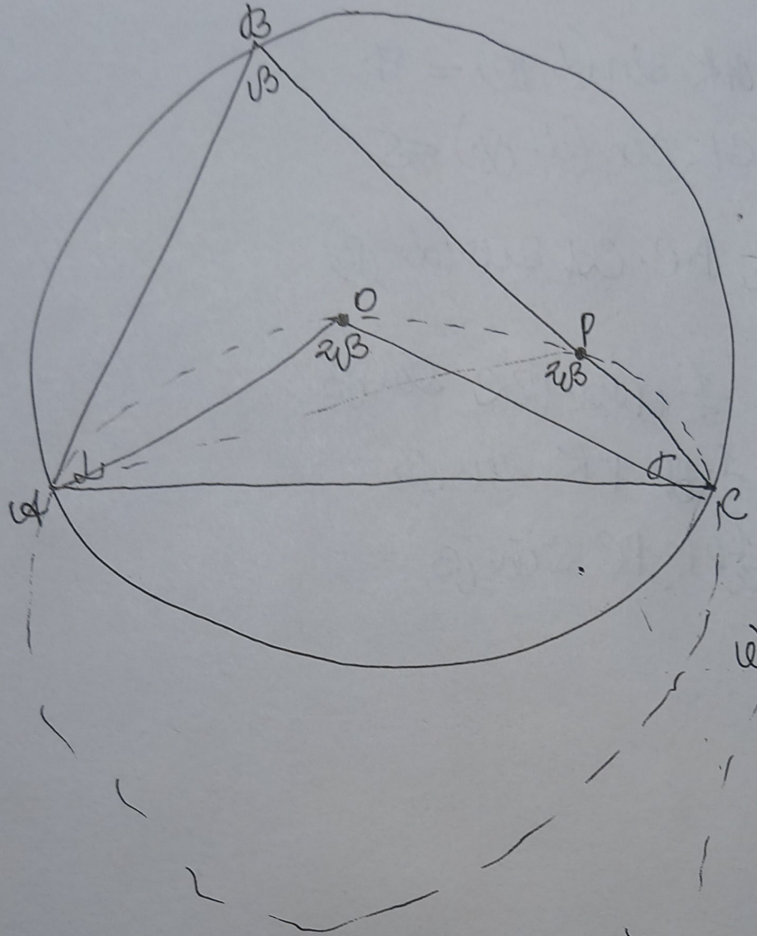


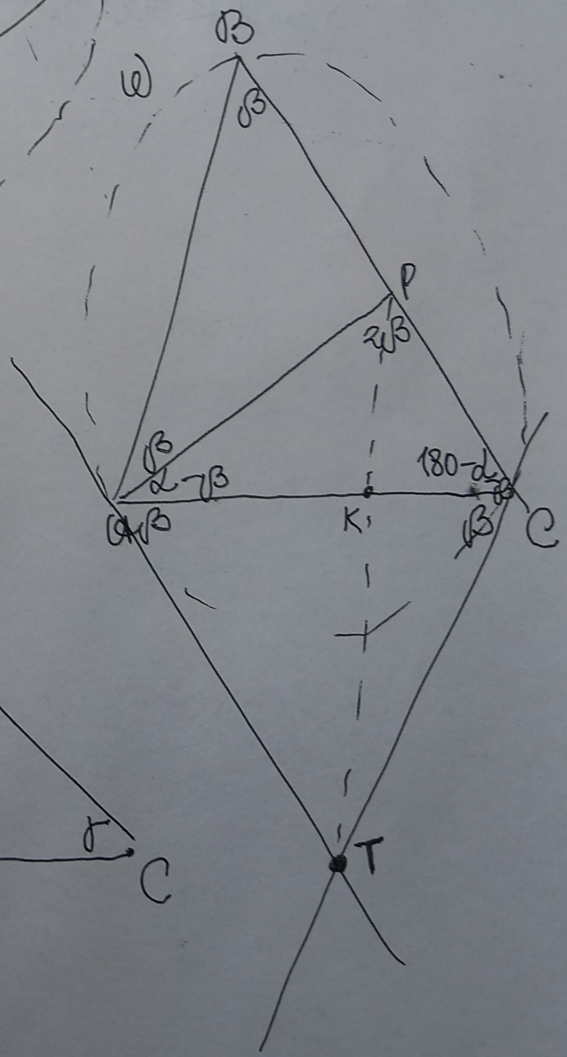
$x + y = 2\beta$

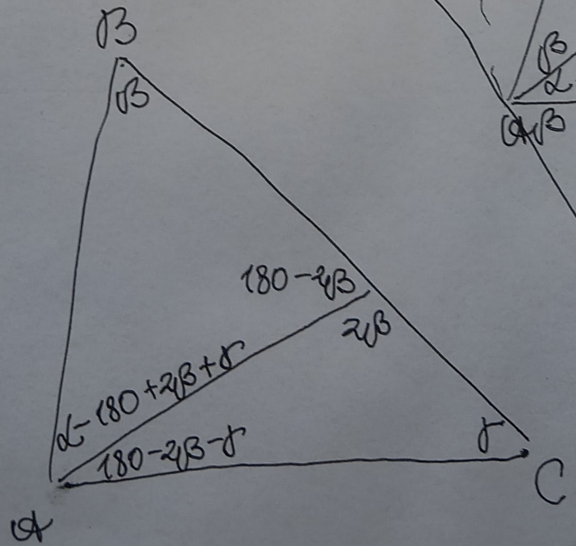
~~z~~

$t + u$


α
α


B
β
O
2β
P
2β
A
α
γ
C


ω
B
β
P
2β
β
α-2β
180-α
β
A
β
K
β
C
T


B
β
180-2β
2β
α-180+2β+γ
180-2β-γ
γ
A
C

$$S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} AP \cdot AK \sin(\alpha - \beta) = 7$$

$$S_{\triangle PCK} = \frac{1}{2} PC\, CK \sin(\alpha - \beta) = 5$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \sin(\alpha - \beta)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\beta$$

$$S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \sin\beta$$

$$S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2} PK \cdot PC \sin\beta$$