Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104914**

ID профиля: **869247**

Вариант 22

Чистовик.

1. d – разность прогрессии $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$, т.к. арифметическая прогрессия возрастает и состоит из целых чисел.

$a_1 \in \mathbb{Z}$

Тогда

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > \left(\dfrac{2a_1 + 14d}{2}\right) 15 - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < \left(\dfrac{2a_1 + 14d}{2}\right) 15 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

Домножим второе на -1 и сложим с 1.

$-20d^2 > -28$

$d^2 < \frac{28}{20}$, т.к. $d \in \mathbb{N}$, то $d = 1$

Подставим в сист.

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 > 0 \\ x^2 + 6x + 1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+3)^2 > 0 \\ (x+3)^2 - 8 < 0 \end{cases}$$

$(-3 - 2\sqrt{2}, -3) \cup (-3, -3 + 2\sqrt{2})$

Целые x это $-5, -4, -2, -1$

Ответ: $-5, -4, -2, -1$.

21104914 (U869247 M1301818)

Черновик.

1. d – разность прогрессии

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$S = a_1 + a_2 + a_3$

$a_{11} a_{12} < S + 4$

$a_7 a_{16} > S - 24$

Тогда

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > \left(\frac{2a_1 + 14d}{2}\right) 15 - 24 \\ (a_1 + 10d)(a + 11d) < \left(\frac{2a + 14d}{2}\right) 15 + 4 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1 + 21a_1 d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}}$$

Докажем

$-20d^2 > -28$

$d^2 < \frac{28}{20}$, т.к. $d \in \mathbb{N}$, то $d = 1$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 > 0 \\ x^2 + 6x + 1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+3)^2 > 0 \\ (x+3)^2 - 8 < 0 \end{cases}$$

$(-3 - 2\sqrt{2}, -3) \cup (-3, -3 + 2\sqrt{2})$

целые x $-5, -4, -2, -1$

Ответ: $-5, -4, -2, -1$

21104914 (U869247 M1301818)

Чистовик.

3. Рассм. 2 уравн. в коорд. a, b

Тогда это пересечение 2 фигуры: $a^2+b^2 \le 14a+2d$

$a^2+b^2 \le 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$

$a^2+b^2 \le 5$

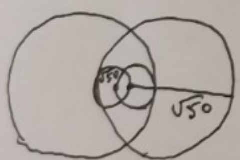
– 2 круга одинакового радиуса, причём такие, что центр каждого лежит на границе второго

Рассм. 1 уравнение в коорд. (x, y)

Тогда оно означает, что сущ. точка из указанной выше области (в коорд. x, y).

что точка (x, y) попадает в окружность радиуса $\sqrt{50}$ с центром в выбранной точке.

Заметим, что это снова пересечение 2 окр., радиусом $2\sqrt{50}$ с раст. центров, как указано на рисунке.



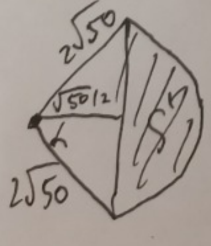
Найдем площадь объедин. окружностей.

Сначала найдем площадь пересеч.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{50}}{2} : 2\sqrt{50}\right) = \arccos\frac{1}{4}$$

Площадь сектора:

$$S = \frac{\cancel{2}\arccos\frac{1}{4}}{\cancel{2}} \cdot (2\sqrt{50})^2 = 200\arccos\frac{1}{4}$$



Площадь треуг.:

$$\frac{\sqrt{50}}{2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{50})^2-(\sqrt{50}/2)^2} = \frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{187,5}}{2}$$

$$S' = 200\arccos\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{50}^2\cdot\sqrt{187,5}}{2}$$

Тогда ответ это: $2\cdot\pi(2\sqrt{50})^2 - 400\arccos\frac{1}{4} + \sqrt{50} - \sqrt{187,5}$.

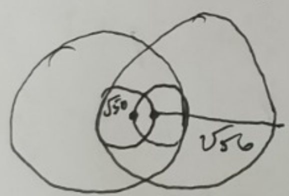
Черновик.

3. рассм. 2 уравн. в ~~корд~~ коорд. a, b

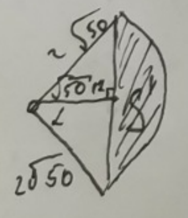
Тогда это пересечение 2 фигуры: $a^2+b^2\le 14a+2b$
$a^2+b^2\le 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$
$a^2+b^2\le 5$ — 2 круга одинакового радиуса, причём такие, что центр ~~границе~~ каждого лежит на границе второго

Рассм 1 уравнение в ~~котором~~ коорд. (x, y).
Тогда оно означает, что сущ. точка (в коор. x, y.) из указанной выше области, что точка (x, y) попадает в окружность радиуса $\sqrt{50}$ с центром в выбранной точке.
Заметим, что это сполея пересечен
с раст. центров,
2 окр., радиусом $2\sqrt{50}$
как указано на рисунке



Найдём площадь объедин. окружностей.
Сначала найдём площадь пересеч.



$\angle = \arccos\left(\frac{\sqrt{50}}{2} : 2\sqrt{50}\right) = \arccos\frac{1}{4}$

Площадь сектора:

$S = \frac{\cancel{2}\arccos\frac{1}{4}}{\cancel{2}}\cdot(2\sqrt{50})^2 = 200\arccos\frac{1}{4}$

Площадь. треуг.

$\frac{\sqrt{50}}{2}\cdot\sqrt{(2\sqrt{50})^2-(\sqrt{50}/2)^2} = \frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{187,5}}{2}$

$S' = 200\arccos\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{187,5}}{2}$

Тогда ответ это:
$2\cdot\pi(2\sqrt{50})^2 - 400\arccos\frac{1}{4} + \sqrt{50}\cdot\sqrt{187,5}$

21104914 (U869247 M1301818)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104914**

ID профиля: **869247**

Вариант 22

Чистовик.

4.

$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

Значит, что $\min(a_1, b_1, c_1) = 1$, т.к. иначе не содержит 2^2

и $\max(a_1, b_1, c_1) = 17$, т.к. иначе не содержит 2^{18}

аналогично

$\min(a_2, b_2, c_2) = 1$

$\max(a_2, b_2, c_2) = 18$

$a_1 = 1$, $c_1 = 17$

1) $b_1 = 1$

$a_1 b_1 c_1 - 3$

Всего $\frac{3 \cdot 2 \cdot 18}{2} = 54$ вар. (т.к. $a_1 = b_1 = 1$, нужно ещё раз на 2)

2) $b_1 = 17$

аналогично 54

3) $b_1 \in \{2, 3, \ldots, 16\}$

Наборы $(a_2\ b_2\ c_2)$ всего $3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$

$\uparrow$ выбор 1 $\leftarrow$ выбор 18

у которых 3-е число не 1 и не 18

Если равно 1/18 то обр.

Тогда всего $96 + 6 = 102 + 108 = 210$

$+54 \cdot 2$

Отв: 210.

Чистовик.

5. Перепишем в более удоб. виде

1) $\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{2x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{14\left(\frac{x}{2}+1\right)}\right)$

2) $4\left(\frac{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\right)$

3) $2\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\right)$

Заметим, что произведение чисел $=4$

Пусть 2 числа равны t, тогда 3-е $t-1$

Значит $t^2(t-1)=4$

$(t-2)(t^2+t+2)=0 \to$ не им. реш.

Значит 2 числа равны 2, третье равно 1

Рассм. 3е число

Пусть оно равно 2

$\cancel{2}\frac{\ln(x/2+1)}{\ln(3x/2-6)}=\cancel{2}$

$\ln(x/2+1)=\ln(3x/2-6)$

$x=7$

Значит если одно из первых 2 чисел равно 1, то только при $x=7$.

Пусть 3-е число равно 1

Тогда

$2\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)=\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$\begin{cases}\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)\\ x>-2\end{cases} \to$ не им реш., т.к. $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\frac{3x}{2}-6$

Значит ед. возм. вариант это $x=7$

Подставим в 1, 2 числа

$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{49}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\ln(4,5)}\right)=\frac{1}{2}\frac{\ln 20,25}{\ln 4,5}=1.$

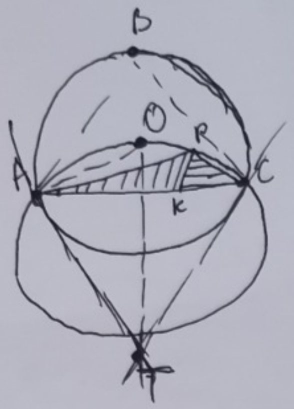
$4\left(\frac{\ln\left(\frac{21}{2}-6\right)}{\ln 20,25}\right)=4\frac{\ln 4,5}{\ln 20,25}=2.$

Подходит

Ответ: $x=7$.

Чистовик.

6.



$S_{APK} = 7$, $S_{CPK} = 5$

а) Решение 1 части:

1) $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{7}{5}$

Значит $\frac{CK}{CA} = \frac{5}{7+5} = \frac{5}{12}$

2) $\angle OAT = \frac{\pi}{2} = \angle OCT$

т.к. AT и CT - касат.

Значит $TAOC$ – вписанный ч.-к.

$\angle TPC = \angle TAC = \angle ABC$

т.к. опир. на одну сторону

т.к. AT - кас. и $\angle ABC$ опир. на AC

3) т.к. $\angle CPT = \angle ABC$,

то $\Delta ABC \sim \Delta KPC$

с коэф. $= \frac{CA}{CK} = \frac{12}{5}$

Тогда $S_{ABC} = S_{CPK} \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 28,8$

Отв: $S_{ABC} = 28,8$.

21104914 (U869247 M1301819)

Черновик.

22. Перепишем в более удоб. виде

5. 1) $\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}\right)$

2) $4\left(\frac{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\right)$

3) $2\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\right)$

Заметим, что произведение чисел $=4$

Пусть 2 числа равны t, тогда 3-е $t-1$

Значит $t^2(t-1)=4$

$(t-2)(t^2+t+2)=0 \to$ не им. реш.

Значит 2 числа равны 2, третье равно 1

Рассм. 3е число

Пусть оно равно 2.

$$2\,\frac{\ln(x/2+1)}{\ln(3x/2-6)}=2$$

$$\ln(x/2+1)=\ln(3x/2-6)$$

$$x=7$$

Значит если одно из первых 2 чисел равно 1 это только при $x=7$

Пусть 3-е число равно 1

Тогда

$$2\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)=\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)$$

$$\begin{cases}\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)\\ x>-2\end{cases}$$

$\to$ не им. реш, т.к. $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\frac{3x}{2}-6$

Черновик.

Значит ед. возм. вариант это $x = 7$

Подставим в 1 2 числа

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{49}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\ln(4,5)}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\ln 20,25}{\ln 4,5} = 1$$

$$4\left(\frac{\ln \frac{21}{2}-6}{\ln 20,25}\right) = 4\,\frac{\ln 4,5}{\ln 20,25} = 2$$

Подходит.

Отв. $x = 7$

---

4. min

$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

Значит, что $\min(a_1, b_1, c_1) = 1$, т.к. иначе не содержит 2^2

и $\max(a_1, b_1, c_1) = 17$, т.к. иначе нек содержат 2^{18}

аналогично

$\min(a_1, b_2, c_1) = 1$

$\max(a_1, b_2, c_2) = 18$

$a_1 = 1,\ c_1 = 17$ — 3-мя выбрать 1

2-мя выбрать 18

и 18 ед. для остал. числа

1) $b_1 = 1$

a, b, c_1 − 3

Всего $\frac{3 \cdot 2 \cdot 18}{2} = 54$

вар. (т.к. $a_1 = b_1 = 1$, нужно делить на 2)

2) $b_1 = 17$

аналогично 54

3) $b_1 \in \{2, 3, \dots, 16\}$

Набор

$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

$\max(a, b, c_1) = 17$, т.к. иначе все содержат 2^{18}

аналогично

$a_1 = 1, c_1 = 17$ — 3-мя выбрать 1

1) $b_1 = 1$

a, b, c_1 — 3

2-мя выбрать 18 и 18 см. для остал. числа

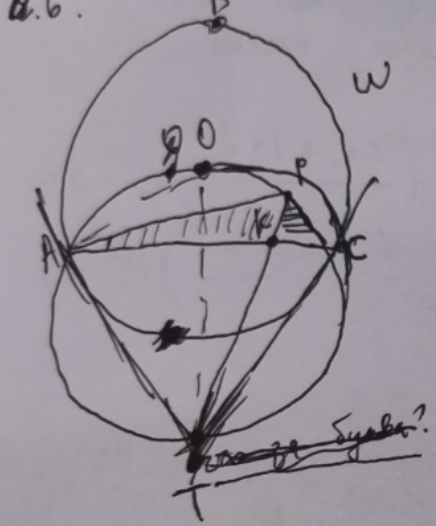
$\min(a_1, b_2, c_1) = 1$

$\max(a_1, b_2, c_2) = 18$

Всего $3 \cdot 2 \cdot 18$. вар. (т.к. $a = b$.

Черновик.

№6.



$S_{APK} = 7$, $S_{CPK} = 5$

а) Решение 1 части:

1) $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{7}{5}$

значит $\frac{CK}{CA} = \frac{5}{7+5} = \frac{5}{12}$

2) $\angle OAT = \frac{\pi}{2} = \angle OCT$

т.к. AT и CT – касат.

Значит $TAOC$ – вписанный ч-к.

$\angle TPC = \angle TAC = \angle ABC$

т.к. опир. на одну сторону

т.к. AT – кас. и $\angle ABC$ опир. на AC

3) т.к. $\angle CPT = \angle ABC$,

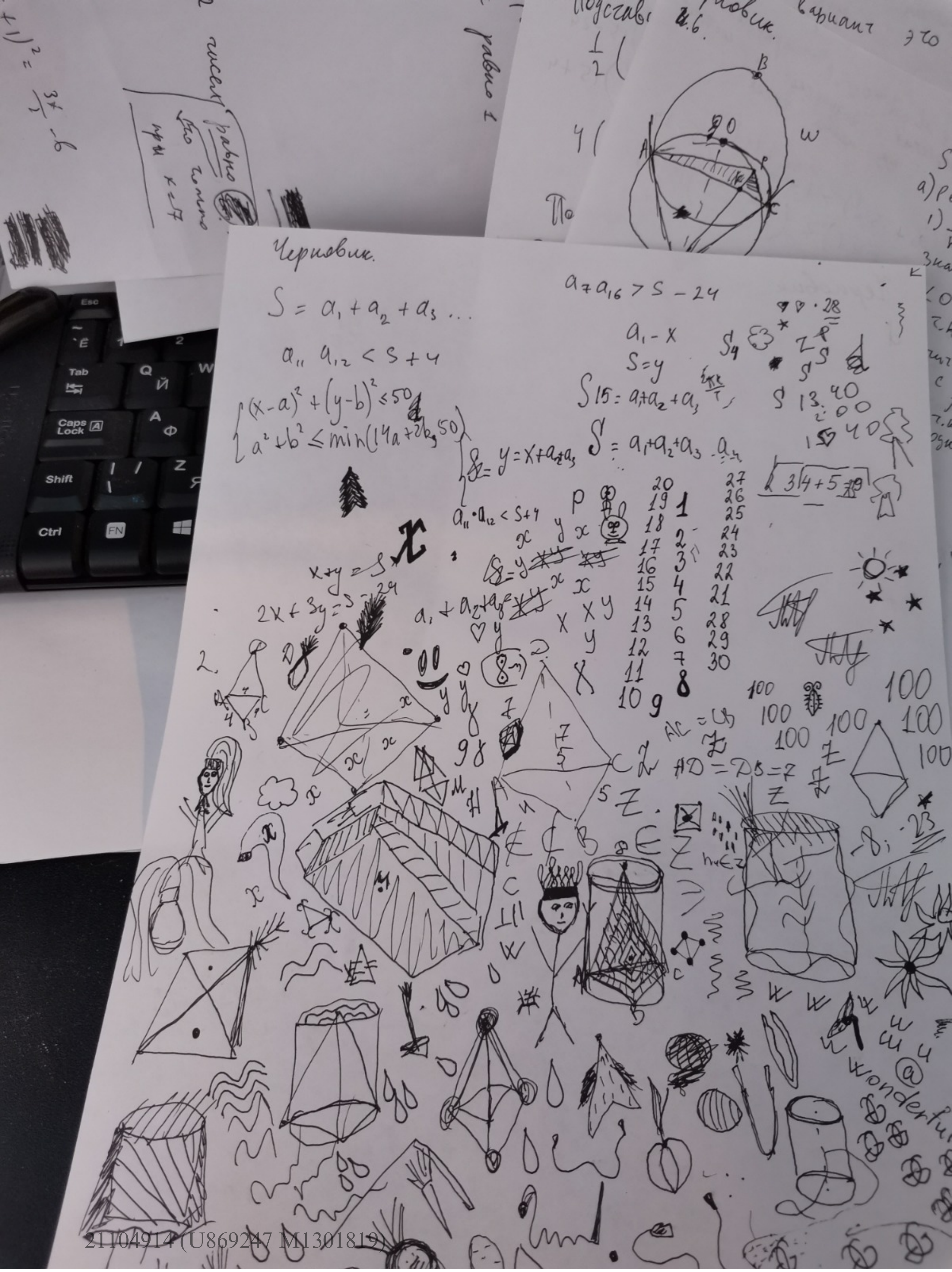
то $\triangle ABC \sim \triangle KPC$

к коэф. $= \frac{CA}{CK} = \frac{12}{5}$

Тогда $S_{ABC} = S_{CPK} \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 28{,}8$

Отв: $S_{ABC} = 28{,}8$

21104914 (U869247 M1301819)


Черновик.
S = a₁ + a₂ + a₃ ...
a₁₁ a₁₂ < S + 4
a₇a₁₆ > S − 24
a₁ − x
S = y
S₁₅ = a₁+a₂+a₃
S = a₁+a₂+a₃ ... a₄
y = x+a₂+a₃
a₁₁·a₁₂ < S+4
x+y = S
2x + 3y = S − 24
AC = UB
AD = DB = 7
wonderful
100