Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104902**

ID профиля: **352142**

Вариант 22

№1 Чистовик

$$S = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}n = \frac{15}{2}(2a_1+14d) = 15(a_1+7d)$$

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+15d) > 15(a_1+7d)-24\\ (a_1+10d)(a_1+11d) < 15(a_1+7d)+4\end{cases}$$

$$a^2+21ad+\overset{6\cdot 15}{\cancel{}}d^2+S+4 > a^2+21ad+10\cdot 11\cdot d^2+S-24$$

$$28 > 20d^2 \qquad d\in Z,\ d>0 \Rightarrow d=1$$

$$\begin{cases}a^2+21a+90 > 15a+105-24\\ a^2+21a+110 < 15a+105+4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+6a+9>0\\ a^2+6a+1<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+3)^2>0\\ (a+3)^2<8\end{cases} \qquad \begin{cases}b^2>0\\ b^2<8\end{cases} \qquad \begin{cases}b\neq 0\\ |b|<2\sqrt{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}b\neq 0\\ |b|\leq 2\end{cases}$$

$$a+3=b,\ b\in Z$$

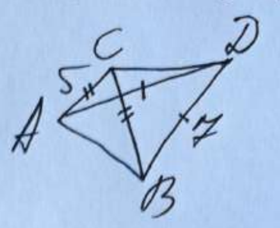
$$\left[\begin{array}{l}|b|=1\\ |b|=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a+3=\pm 1\\ a+3=\pm 2\end{array}\right. \Rightarrow \cancel{\left[\begin{array}{l}a=-2\\ a=-\end{array}\right.} \quad \left[\begin{array}{l}-2\\ -4\\ -1\\ -5\end{array}\right.$$

Ответ: $-5; -4; -2; -1$

№2

Чистовик

① Докажем, что $AB \perp CD$:

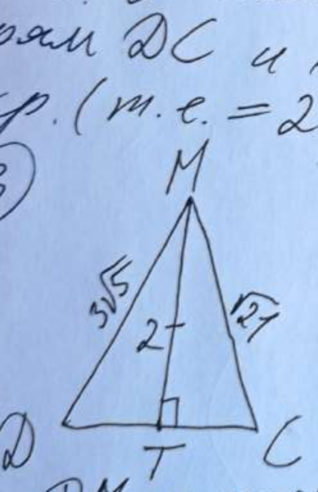


Пусть M – серед AB, тогда
$CM \perp AB$ и $DM \perp AB$, т.к. CM и DM – медианы в р/б Δ-ах ABC и ADB

Значит по т. о 3-х перпендик получ, что $AB \perp (DMC)$.
Значит, что $AB \perp DC$, но т.к. $DC \parallel$ оси цилиндра, то $AB \perp$ оси $\Rightarrow AB \parallel$ основанию цилиндра

② Из первого получ, что хорда $A'B'$ ($A'B'$ – проекц A и B на основан) будет равна AB, и раз мы минимализир радиус окружн., то $A'B'$ должно являться диаметром. Значит, что AB проходит через ось цилиндра, при этом $DC \parallel$ оси. Значит расст от M до DC = расст между прям DC и осью цилиндра и равно радиусу окр. (т.е. = 2)

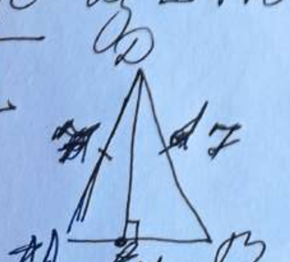
③



DM – находится из ΔADB

MC – из ΔABC

I



$DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{49 - 4} = 3\sqrt{5}$

Чистовик

$\underline{II}$ $CM = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$\underline{III}$ $DT = \sqrt{DM^2 - TM^2} = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

$TC = \sqrt{MC^2 - TM^2} = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

$DC = DT + TC = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{41} + \sqrt{17}$

№3

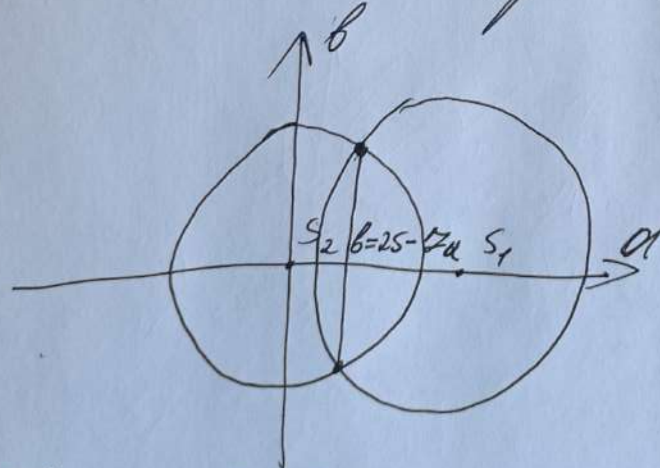
(1) Найдем все пары $a;b$, удовлетворяющ уравн. суммы:

Если $14a + 2b \leq 50$,

$a^2 + b^2 \leq 14a + 2b \Leftrightarrow (a-7)^2 + (b-1)^2 \leq 50$ - окр. S_1

Если $14a + 2b \geq 50$,

$a^2 + b^2 \leq 50$ - окрест S_2



Прям. $b = 25 - 7a$ пересек с окр S_1 и S_2 в точк:

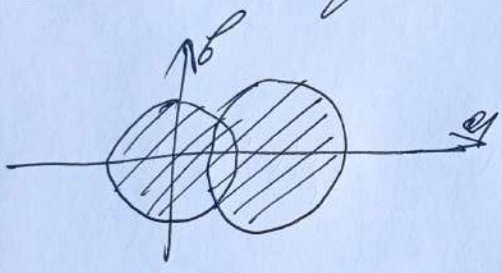
Чистовик

$\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+7\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-7\sqrt{3}}{2}\right)$

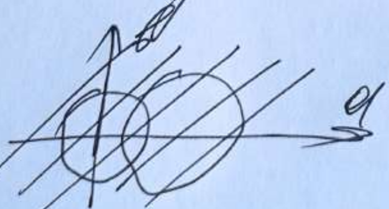
Эти тчк. также явл т.ч.к пересеч. окружн:

$\left[\begin{array}{l}(A,B)\in S_1\\ b\le 25-7a\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}(A,B)\in S_2\\ b\ge 25-7a\end{array}\right.$

Равносильно, что пара A,B лежит в $S_1 \vee S_2$ поэтому второму ур удовлетв заштрих тчк.



② Заштрих на рис тчк. - центры окруж первого ур поэтому множ пар x y на плоск выглядит так



Это пересеч объед окружн $r=2\sqrt{5}-10\sqrt{2}$ с центр в тчк $(0,0)$ и $(7,1)$

$S_{общ} = S_1' + S_2' - S_1'\cap S_2'$

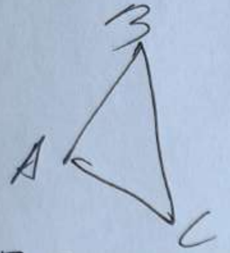
$S_1'\cap S_2' = S_1'' + S_2''$ - тчк. пересеч

$x_1 = \frac{7-\sqrt{15}}{2}$, $y_1 = \frac{1+7\sqrt{15}}{2}$

$x_2 = \frac{7+\sqrt{15}}{2}$, $y_2 = \frac{1-7\sqrt{15}}{2}$

Чистовик

S_1''



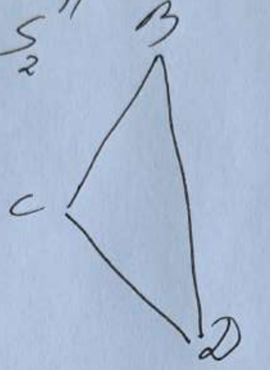
$BC = \sqrt{15+49\cdot 15} = 5\sqrt{30}$

$AB = \frac{1}{2}\sqrt{50\cdot 16}$

$AC = 10\sqrt{2}$

$\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = -\frac{7}{8}$

S_2''



$BC = 5\sqrt{35}$, $DC = 10\sqrt{2}$,

$BD = 10\sqrt{2}$.

$S_2'' = S_1'' = \frac{\pi r^2}{360}\cdot \arccos\left(-\frac{7}{8}\right) - \frac{25\sqrt{15}}{2}$

Ответ: $S_{фиг} = 400\pi + 25\sqrt{15} - \frac{400\pi}{360}\cdot \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$

Ответ $S_{фиг} = \cancel{400\pi + 25\sqrt{15} - \frac{400\pi}{360}\cdot \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)}$ стр5

Черновик

$$\begin{cases} 2a_1^2+(42d-15)a_1+180d^2-210d+48>0 \\ 2a_1^2+(42d-15)a_1+220d^2-210d-8<0 \end{cases}$$

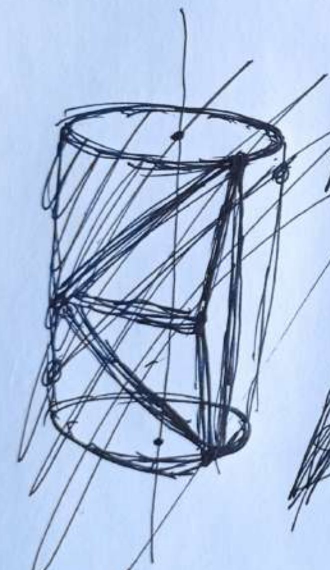
$$\begin{cases} 2a_1^2+(42d-15)a_1-210d>-180d^2-48 \\ 2a_1^2+(42d-15)a_1-210d<8-220d^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x>y \\ x<z \end{matrix}\right| \Rightarrow y<z$$

$$-180d^2-48<\cancel{-180d^2}\ 8-220d^2$$

$$40d^2<56$$

$$d^2<\frac{56}{40} \Rightarrow d^2<\frac{14}{10} \Rightarrow d^2<\frac{7}{5}$$



$V=\pi r^2 h$

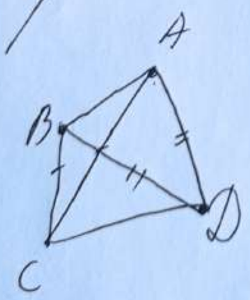
$AB=4$

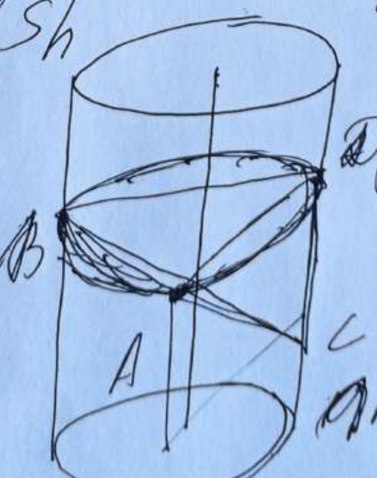
$AC=CB=5$

$AD=DB=7$

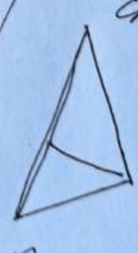
CD || оси цилиндра

$V=\frac{1}{3}Sh$





Единственный способ расположить



AAB

Т. cos для ADB: $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos BAD$

$\cos BAD=\frac{AD^2+BD^2}{}$

$a_7 a_{16} > S_{15} - 24$ $\quad a_1 = a_1$ $\quad S_{15}$

$a_{11} a_{12} < S_{15} + 4$ $\quad a_2 = a_1 + d$ $\quad S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ $\quad \begin{array}{r} \times\, 16 \\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$

$a_1 - ?$ $\quad a_n = a_1 + (n-1)d$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > S_{15} - 24$

$(a_1+7d)(a_1+16d) > \frac{a_1 + 14d}{2} n \;|\cdot 2$

$2(a_1+7d)(a_1+16d) > (a_1+14d)n$

$2a_1^2 + 32d a_1 + 14d a_1 + 224d^2 > a_1 15 + 14d$

$2a_1^2 + a_1(32d + 14d - 15) + 224d^2 - 14d > 0$

$\cancel{2a_1 + (46d - 15)a_1 + 224d^2 - 14d > 0}$

$\begin{array}{r} \times\, 14 \\ 15 \\ \hline 70 \\ 14 \\ \hline 210 \end{array}$

$(a_1+6d)(a_1+15d) > \frac{a_1+14d}{2} n \;|\cdot 2$

$2(a_1+6d)(a_1+15d) > (a_1+14d)15 - 48$

$2a_1^2 + 30a_1 d + 12a_1 d + 180d^2 > 15a_1 + 210d$

$2a_1^2 + (42d - 15)a_1 + 180d^2 - 210d + 48 > 0$

$(a_1+10d)(a_1+11d) < \left(\frac{a_1+14d}{2}\right)15 + 4 \;|\cdot 2$

$2(a_1+10d)(a_1+11d) < (a_1+14d)15 + 8$

$2a_1^2 + 20a_1 d + 22a_1 d + 220d^2 - 210d - 8 < 0$

$-15a_1$

$2a_1^2 + (42d - 15)a_1 + 220d^2 - 210d - 8 < 0$

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50).\end{cases}$$

$S_M - ?$

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2 \le 50$

$a^2+b^2 \le \boxed{50+2ax+2by-x^2-y^2}$

$2ax+2by-x^2-y^2$

$x(2a-1)+y(2b-1)$

$14a+2b=2(7a+b)$

$S=\pi r^2$

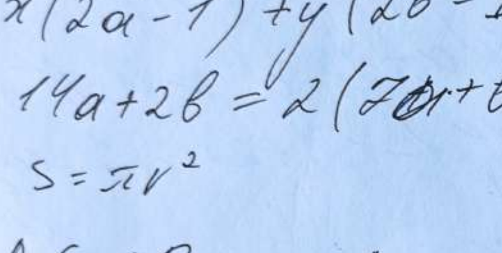
$AC=CB=5 \quad AB=4$

$AD=DB=7 \quad CD-?$

$4b^2-8b-196=0$

$D=64+784=850$

$b_{1;2}=\frac{8\pm\sqrt{850}}{8}=1\pm\frac{\sqrt{850}}{8}$



Если:

$2a-1=2b-1=0$

$a=\frac{1}{2}=b$

~~тогд~~ $14a+2b=7+2=9$

-на $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ не ≤ 9

$a^2+b^2=14a+2b$

$a^2-14a+2b+b^2=0$

$196 \cdot 4 = 784$

$D=196-4(b^2-2b)=$

$=196-4b^2+8b$

при $b \in \left[1-\frac{\sqrt{850}}{8}; 1+\frac{\sqrt{850}}{8}\right]$

$a=\frac{14-\sqrt{196-4b^2+8b}}{2}$

при $b=1-\frac{\sqrt{850}}{8}$; $b=1+\frac{\sqrt{850}}{8}$

$a=\frac{14}{2}=7$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104902**

ID профиля: **352142**

Вариант 22

№4 Чистовик

$a = 2\cdot 7\cdot 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$

$b = 2\cdot 7\cdot 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$

$c = 2\cdot 7\cdot 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ должны быть $\alpha = 0$ (Для НОД)

и $\alpha = 16$ (Для НОК)

аналогично $\beta = 0$ $\beta = \cancel{16}\ 17$

Третье число может быть произвольным

$0 \le \alpha^n \le 16, \quad 0 \le \beta^m \le 17$

2) Рассмотрим

$\alpha^n \ne 0, \alpha^n \ne 16, \beta^m \ne 0, \beta^m \ne 17$

тогда способов кто 0, кто макс, кто произв $= 3!$ (для α и β)

тогда всего: $3!\cdot 15\cdot 3!\cdot 15$

3) $\alpha^n = 0$ или $\alpha^n = 16$, $\beta^m \ne 0, \beta^m \ne 17$

выбрать α можно только 3 способ $\Rightarrow 3\cdot 3!\cdot 16\cdot 2$

4) $\beta^m = 0$ или $\beta^m = 17$ $\alpha^m \ne 0, \alpha^m \ne 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot 3!\cdot 15\cdot 2$

5) $\beta^m = 0$ или $\beta^m = 17$ и $\alpha^m = 0$ или $\alpha^m = 16$:

$: 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2$

Итого $\Sigma = 36\cdot 15\cdot 16 + 36(16+15) + 36 = 9792$

стр. 1

№5

Чистовик

Пусть $\frac{x}{2}+1=a$, $\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}=b$, $\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=c$

ОДЗ:
$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \\ a,b,c\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x\neq \frac{14}{3} \end{cases}$$

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2\cdot\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=$$

$$=\log_{a^2}b^2\cdot\log_b c^4\cdot\log_c a=4\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=4$$

И так, привед логарифмов $=4$

Пусть два из них $=y$ и 3-й $=y-1$ тогда:

$y^2(y-1)=4$

$y^3-y^2-4=0$

$(y-2)(y^2+y+2)=0 \Rightarrow y=2$

① $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=y-1=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+x+1=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-10x+21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \end{array}\right.$

$x=3$ не подходит в шу ОДЗ

при $x=7$ $\log_b c^4=\log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{9}{2}\right)^2=2$, $\log_c a=\log_{\sqrt{\frac{9}{2}}}\frac{9}{2}=2$.

Этот случай подходит

② $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=y=2 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7}{4} \\ x=\frac{13}{16} \end{array}\right.$ оба знач не входят в ОДЗ

Ответ: $x=7$

стр 2

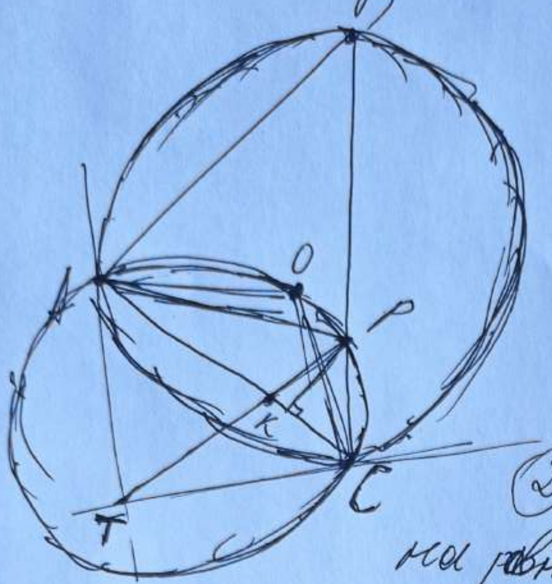
№6

Чистовик

Дано

$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$



Решение:

① AT и TC - кас $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow AOCP$ впис $\Rightarrow$

$\Rightarrow A, O, P, C, T$ на одной окр.

② $AT = TC \Rightarrow \angle APT = \angle TPC$,

на равн хордах равн углы

значит получ, что PK - биссектр $\angle ABC$

$\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{7}{5}$

③ Заметим, что $\angle AOC = \angle APC$, т.к. $AOPC$ - впис

при этом $\angle AOP = 2 \cdot \angle ABC \Rightarrow \angle APC = 2 \cdot \angle ABC = \angle ABC + \angle PAB$

$\Rightarrow \angle PAB = \angle ABC = \angle ABP \Rightarrow \triangle ABP$ р/б и $AP = PB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{7}{5} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{S_{APB}}{12} \Rightarrow S_{APB} = \frac{12 \cdot 7}{5}$

Тогда $S_{ABC} = S_{APC} + S_{APB} = 12 + \frac{12 \cdot 7}{5} = \frac{12 \cdot 12}{5}$

Ответ: а) $\frac{144}{5}$

Черновик

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^{2}$, $\log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{2}+1\right)^{2}$

$\frac{1}{2}\log_{\left|\frac{x}{2}+1\right|}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

$\left|\frac{x+2}{2}\right|$ $\quad \frac{14x-17}{4}$

$\frac{1}{2}\left(\log_{\left|\frac{x+2}{2}\right|}(14x-17)-\log_{\left|\frac{x+2}{2}\right|}4\right)$

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$4\log_{\frac{14x-17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$\log_{a^2} b$, $\log_{b^{\frac{1}{2}}} c^2$,

$\log_{c^{\frac{1}{2}}} a$

$\frac{1}{2}\log_a b$

$\log_b c$

$2\log_c a$

$\log_b c=\frac{\log_a b}{\log_a c}\ \Big|\cdot 2$

$\log_{\frac{x+2}{2}}\left(\frac{14x-17}{4}\right)\log$

$2\log_b c=\frac{2\log_a b}{\log_a c}=2\log_a b\log_c a$

$2\log_c a=\frac{2\log_b c}{\log_a b}$ или $=\frac{\log_b c}{\frac{1}{2}\log_a b}$

$\frac{1}{2}\log_a b=\frac{\log_b c}{2\log_c a}$

$\log_b c=\frac{1}{2}\log_a b\, 2\log_c a$

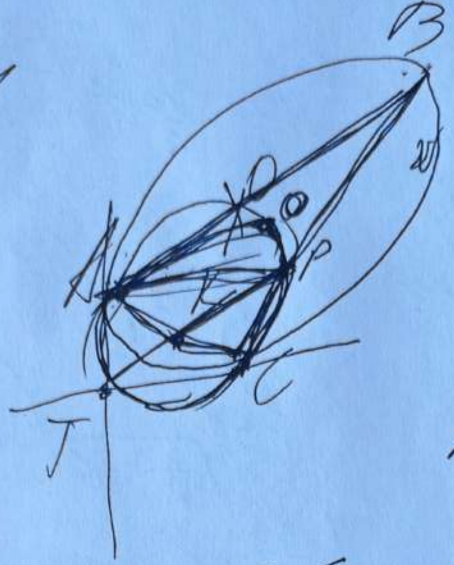
Черновик

$\frac{17x-17}{2}=\frac{x+2}{2}$

$19x-17=2x+4$

$12x=21$

$x=\frac{21}{12}$

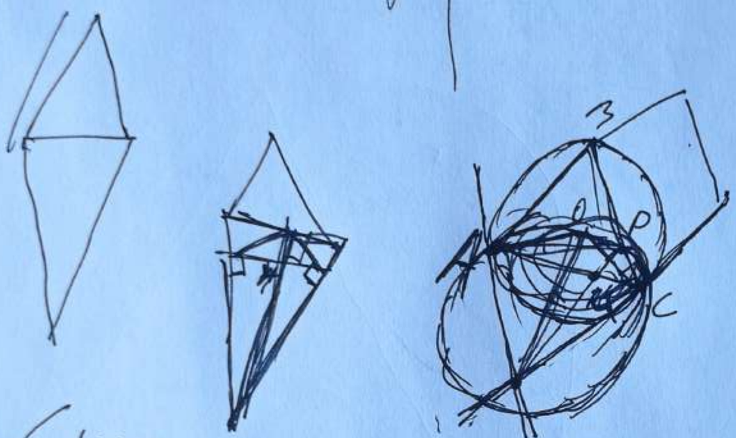


$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{7}{5}$

S_{ABC} - ?

$\angle ABC=\arccos\frac{3}{4}$

AC - ?



$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{7}{5}$

$\frac{\frac{1}{2}ah_a}{\frac{1}{2}bh_a}=\frac{7}{5}$

$S=\frac{1}{2}ah_a$

$5a=7b$

$\frac{7}{5}=\frac{a}{b}$

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$

7^2

$\Rightarrow$ в котором 7^2 повтор ~~не по~~ не ничего более

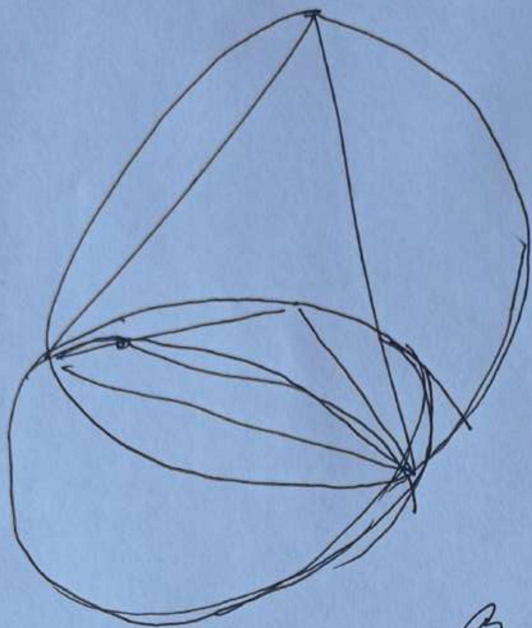
$c\rightarrow 7^2\cdot 2^{17}$

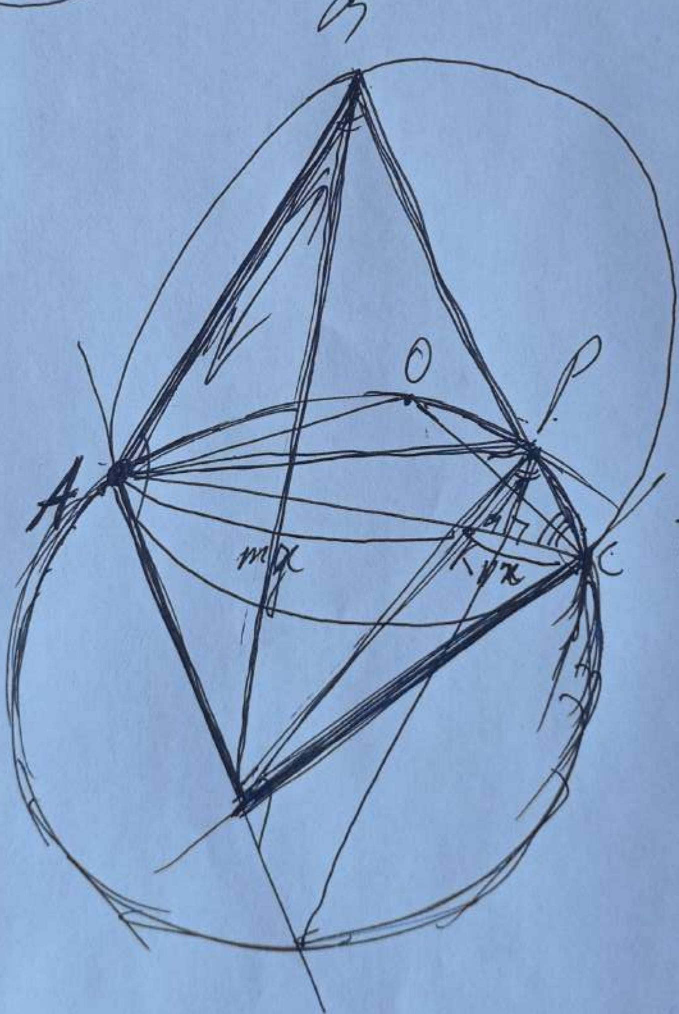
$c_2^{n}\rightarrow c_n \rightarrow 7^2\cdot c_n\cdot c_n$ не 7^2

$\Downarrow$

и т. р. ~~не~~ $7^8, a\ 7^k$

Черновик





$\frac{1}{m+n}=k$

$\frac{S_1}{S}=k$

$S=\sqrt{kS}$