Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104858**

ID профиля: **800489**

Вариант 22

№1 # Чистовик 1

$a_1 = a$

$a_2 = a + d$

$\vdots$

$a_{15} = a + 14d$

a; d - целые ; $d > 0$ - т.к. возрастающая прогрессия

$S = 15a + 105d$

$a_7 \cdot a_{16} = (a+6d)(a+15d) = a^2 + 21ad + 90d^2 > 15a + 105d - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} = (a+10d)(a+11d) = a^2 + 21ad + 110d^2 < 15a + 105d + 4$

$\Rightarrow \quad (a^2 + 21ad + 90d^2) + (15a + 105d + 4) > (15a + 105d - 24) + (a^2 + 21ad + 110d^2)$

$\cancel{\Rightarrow a^2 + 21ad + 90 > 15a + 105d - 24}$

$\cancel{a^2+}$

$\cancel{a^2} + \cancel{21ad} + \overset{0}{\cancel{90}}d^2 + \cancel{15a} + \cancel{105}d + \overset{+28}{\cancel{4}} > \cancel{a^2} + \cancel{21}da + \overset{20d^2}{\cancel{110d^2}} + \cancel{15a} + \cancel{105}d - \cancel{24}$

$\Rightarrow d^2 < \frac{7}{5} \Rightarrow d < \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow d < 2$; $d \geqslant 1 \Rightarrow$ т.к. d - целое $\Rightarrow d = 1$

$\Rightarrow \quad a^2 + 2\overset{6a-15}{\cancel{1a}} + \overset{+9}{\cancel{90}} > \cancel{15a} + \cancel{105} - 24 \Rightarrow a^2 + 6a + 9 > 0$

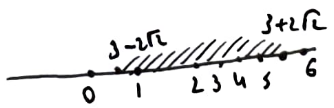
$(a+3)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -3$

$a^2 + \overset{6}{\cancel{21}}a + \overset{1}{\cancel{110}} < \cancel{15a} + \cancel{105} + \cancel{4} \Rightarrow a^2 + 6a + 1 < 0$

$(a - (3 - 2\sqrt{2}))(3 - (3 + 2\sqrt{2})) < 0$

~~Ответ~~

т.к. целые больше 0

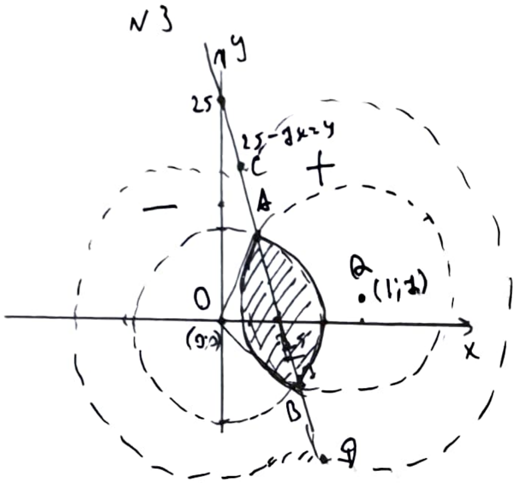


$\Rightarrow a = 1; 2; 3; 4; 5$

Ответ: 1; 2; 3; 4; 5

Чистовик 2

№3



$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 50$ – окружность и её внутр. с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{50}$

$a^2+b^2 \leq (\min(14a+2b; 50))$

1) $50 \leq 14a+2b \Rightarrow a^2+b^2 \leq 50$ – окр. с центром $(0;0)$ и рад. $\sqrt{50}$

$25 \leq 7a+b \Rightarrow b = 25-7a \Rightarrow$ подходит только часть со стороны + относительно прямой $y=25-7x$

$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

2) $a^2-14a+7^2+b^2-2b+1 = 7^2+1$

$(a-7)^2+(b-1)^2 = 50$ – окр. с центром в $(7;1)$ и радиусом $\sqrt{50}$

подходит только часть, которая лежит ~~слева~~ справа (знак +) от прямой $y=25-7x$

$\Rightarrow$ заштрихованная часть – то где ~~лежат~~ не могут лежать a и b, ~~[illegible]~~ ~~из первого уравнения~~ $\Rightarrow$ внутр. части окружностей без вырезанной части – гмт центров окружностей уравнения 1, ~~тогда площадь фигуры М~~

~~[illegible]~~ S зашт. части $= ?$

$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = d = \frac{|25|}{\sqrt{50}}$ – расст. меж $(0;0)$ и прямой $y=25-7x$ $= \frac{5}{\sqrt{2}}$; $R=5\sqrt{2} \Rightarrow \angle AOB = 120$

$\Rightarrow S_{\text{зашт.}} = \overbrace{2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 50 - \frac{2 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2}}{2}}^{2\text{ сегмента}} = \frac{2}{3}\pi \cdot 50 - 25\sqrt{3} = 25\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$

Тогда фигура М полностью покроет разную (заштрих. т.к. $\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 2 \leq 5\sqrt{2}$)

и получится  ; площади маленького и большого

подобны с коэф. $\frac{AB}{C\Phi} = \cancel{[illegible]} = \cancel{[illegible]}$ $\left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}+\sqrt{50}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

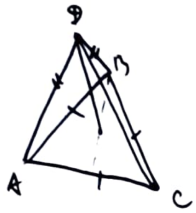
площадь маленькой $4\pi 50 - \frac{2}{3}\pi \cdot 50 - 25\sqrt{3}$

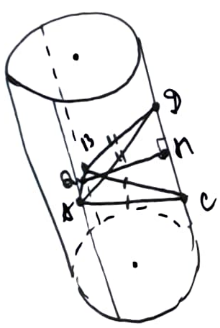
площадь большой $\left(\frac{500\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right) \cancel{[illegible]} \cdot \frac{1}{4}$

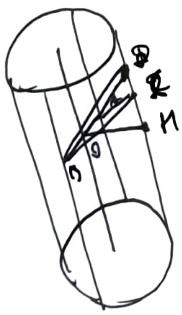
Ответ: $\frac{500\pi - 75\sqrt{3}}{12}$

Чистовик 3

N2







‖ основаниям цилиндра*

1) AB-хорда фиксир. длины, т.к. радиус минимален, то он не может быть меньше половины AB => AB диаметр сечения ‖ основаниям => $R=2,5$

2) Q-середина AB, $QH \perp CD$, $QH=R=2,5$

$DQ=\sqrt{7^2-2,5^2}$ (из п/у △DQB)

$CQ=\sqrt{5^2-2,5^2}$ (из п/у △BQC)

$\cancel{DC = HC \pm DH = \sqrt{QD^2-HQ^2} \pm \sqrt{CQ^2-HQ^2}}$

$DC=|HC \pm DH| = \left|\sqrt{CQ^2-HQ^2} \pm \sqrt{QD^2-HQ^2}\right| = \left|\sqrt{5^2-2\cdot 2,5^2} \pm \sqrt{7^2-2,5^2\cdot 2}\right|$

$= \pm 2,5\sqrt{2} + \sqrt{36,5} = \frac{\sqrt{73} \pm 5}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\frac{\sqrt{73} \pm 5}{\sqrt{2}}$

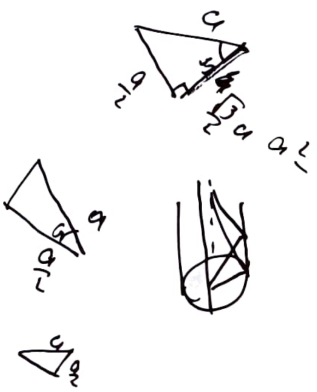
* - т.к. CD ‖ оси цилиндра и △ADB и △CAB - р/б

черновик ①

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

N1 $\frac{14\cdot15}{2}=10$

$a_1 15+105d$



$49-2\left(\frac{5}{\sqrt2}\right)^2=\frac{25}{2}$

$=36{,}5=\sqrt{\frac{73}{2}}$

$(2{,}5)^2=12{,}5$

$15\cdot6=90\cdot5$

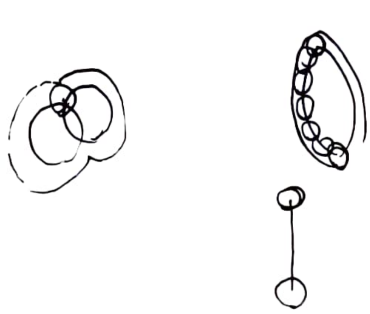
$6{,}25$

$2{,}5\cdot2{,}5=6{,}25$

$\frac{28}{2}=\frac{18}{2}+\frac{10}{2}$

$49-12{,}5=36{,}5$

$y+7x=25$



$d=\frac{|-25|}{\sqrt{50}}=\frac{5}{\sqrt2}$

$36-4=\sqrt{32}=4\sqrt2$

$25\cdot2-\frac{25}{2}+\ldots=1{,}5\cdot25 \quad 3\pm2\sqrt2$

$5\sqrt{\frac{3}{2}}$

$10\sqrt{\frac{3}{2}}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104858**

ID профиля: **800489**

Вариант 22

Чистовик 1 2 часть

№4

$НОД(a, b, c) = 7\cdot 2$

$НОК(a, b, c) = 2^{17}\cdot 7^{18}$

Т.к. $НОД = 7\cdot 2$ то у одного из чисел степень вхождения $2 = 1$, и еще у одного (возможно того же) степень вхождения $7 = 1$, числа натуральные, а значит

$\Rightarrow$ $2^{17} = 2^{\bar a}\cdot 2^{\bar b}\cdot 2^{\bar c}$

$17 = \bar a + \bar b + \bar c$

$7^{18} = 7^{\bar{\bar a}}\cdot 7^{\bar{\bar b}}\cdot 7^{\bar{\bar c}}$

$18 = \bar{\bar a} + \bar{\bar b} + \bar{\bar c}$

$a = 2^{\bar a}\cdot 7^{\bar{\bar a}}$

$b = 2^{\bar b}\cdot 7^{\bar{\bar b}}$

$c = 2^{\bar c}\cdot 7^{\bar{\bar c}}$

a, b и c - ~~это~~ можно представить, как $2^{a'}\cdot 7^{a''}$, $2^{b'}\cdot 7^{b''}$, $2^{c'}\cdot 7^{c''}$, где минимальный из (a', b', c') и $(a'', b'', c'') = 1$, а max 17 и 18 соответ (из НОК(а))

$\Rightarrow$ пусть $a' = 1$, тогда, b' или $c' = 17$, а второе - это любое число от 1 до 17

для степени 7, одно из 3-х - это 1, одно из оставшихся - это 18, а второе это любое число от 1 до 18

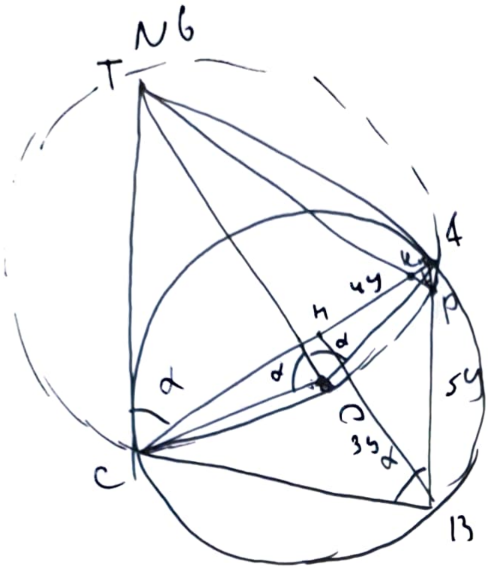
$\Rightarrow$ для первого, $2\cdot\frac{3\cdot 2}{2}\cdot 17$, для второго $2\cdot\frac{3\cdot 2}{2}\cdot 18$ $\Rightarrow$ если считать тройки abc и bca, как ~~разные~~ ~~одинаковые~~ разные, то всего с учетом того, что варианты на пустота $2^1, 2^1, 2^{17}$ мы считаем несколько раз

то всего вариантов $6\cdot 16\cdot 6\cdot 17 = 24^2\cdot 17$

Ответ: $24^2\cdot 17$

Чистовик N2 часть 2

N6



$S_{APK}=7$

$S_{CPK}=5$

1) CTAPO – впис, т.к. COPA – п/угольник, а T из угловых ... OCT = 90

$\angle CBA = \alpha$

$\angle COA = 2\alpha$

$\angle TOA = \frac{\angle COA}{2} = \alpha$ (центр)

$\angle TPA = \angle TOA$ (одна дуга)

2) $\triangle KPA \sim \triangle ABC$

$AK \cdot h = 7$; $CK \cdot h = 5 \Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{7}{5}$

$\Rightarrow CK = 5x$; $AK = 7x \Rightarrow k = \frac{7}{7x5} = \frac{7}{12}$

2) $\frac{S_{KAP}}{S_{ABC}} = \ldots$

$= 7 \cdot \frac{12^2}{7} = \frac{144}{7}$

а) ответ: $\frac{144}{7}$

б) $\angle ABC = \text{arctg}\,\frac{3}{4}$

$BH \perp AC \Rightarrow \frac{HB}{AH} = \frac{3}{4} \Rightarrow HB = \frac{3}{4} AH$

$HB \cdot AC = \frac{144}{7} = AH \cdot AC \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow AH \cdot AC = \frac{48 \cdot 4}{7} \Rightarrow AH \cdot 12x = \frac{48 \cdot 4}{7} \Rightarrow AH = \frac{16}{7x}$

$4y = \frac{16}{7x} \Rightarrow y = \frac{4}{7x}$

$BA = \frac{20}{7x}$

$HB \cdot AC = h \cdot AC = 12$

~~Мнимый 2~~ черновик 2 часть

N5

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{14x-17}{4}\right)$

$\left(\frac{3x-12}{2}\right)^2$

$\log_{\sqrt{\frac{14x-14}{4}}}$

$\log_{\sqrt{\frac{3x-12}{2}}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

ОДЗ $\frac{x}{2}+1>0; \neq 1$

$\frac{14x-17}{4}>0; \neq 1$

$\frac{3x-12}{2}>0; \neq 1$

Сделаем замену

$\frac{x}{2}+1=a$

$\frac{14x-17}{4}=b$

$\frac{3x-12}{2}=c$

Т.к. $a,b,c>0$, уберем квадраты и корни, получим

$$\begin{cases} \frac{\log_a b}{2} \\ 4\log_b c \\ 2\log_c a \end{cases}$$

1) $\log_a b = 8\log_b c$

$\log_a b = 4\log_c a + 1$

$$\begin{cases} \ln^2 b = 8\ln a \cdot \ln c \\ \ln b \cdot \ln c = 4\ln^2 a + \ln c \cdot \ln a \end{cases}$$

~~$(\ln b - \ln a)\ln b$~~ $= 4\ln^2 a$

$(\ln b - \ln a)\ln b - \ln^2 a^2 = 0$

$\ln b \cdot \ln c = \ln a(4\ln a + \ln c)$

$\frac{\ln^2 b - 8\ln a \ln c}{\ln a \ln c} = 0$

1) $\frac{\log_a b}{2} = 4\log_b c$

$\log_a b = 8\log_b c$

$\frac{\ln b}{\ln a} = \frac{8\ln c}{\ln b} \Rightarrow$

$\frac{\log_a b}{2} + 1 = 2\log_c a$

$\log_a \frac{b}{a} = 4\log_c a$

$\frac{\ln b - \ln a}{\ln c} = 4\ln^2 c$

Черновик 2 часть

$\log_a b + \log_b c + \log_c a$

a b c

ab

ac

bc

$\boxed{a; b, c}$

$\frac{PK}{CB}$

TP ||

$S_{APK} = 5$

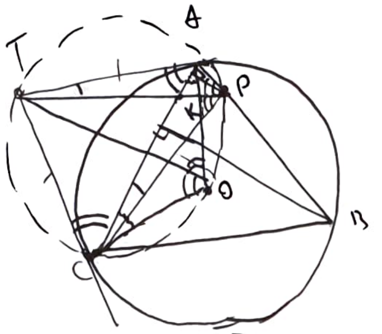
$S_{CPK} = 7$

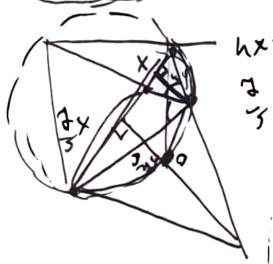
$\angle A$

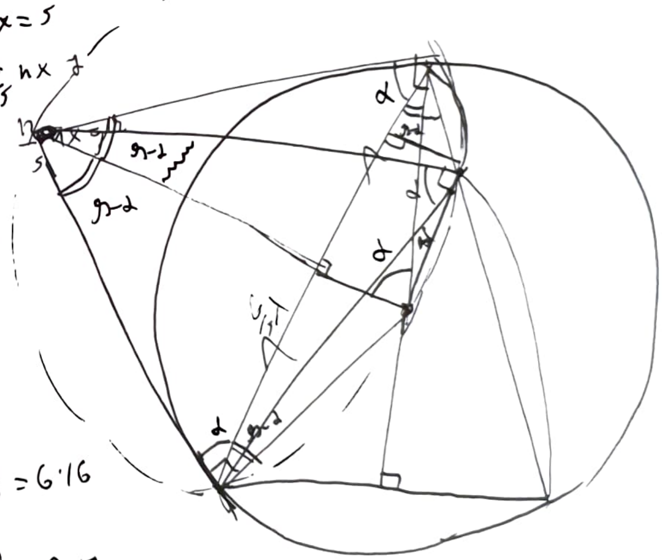
$\angle APOC$ – вписс

$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$

$\frac{AP}{PB}$







1 17; 17 – 3

11 17 – 3

117 h

3 · L

$6 \cdot 15 + 6 = 6 \cdot 16$

+6 $6 \cdot 17$

$16 \cdot 17$

$24^2 \cdot 17$

$\frac{K}{\sin \alpha} = \frac{54}{1}$