Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104767**

ID профиля: **853833**

Вариант 22

Иннополис

Задача 1

S - сумма членов возрастающей прогрессии.

$$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

при $n=15$

$$S = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = 15a_1 + 105d.$$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ -a_1^2 - 21a_1d - 110d^2 > -15a_1 - 105d - 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$-20d^2 > -28$

$20d^2 < 28$

$d^2 < 1,4$

$-\sqrt{1,4} < d < \sqrt{1,4}$

Чистовик

Задача 1 (продолжение)

Так как задана прогрессия, которая последовательно возрастает и состоит из целых чисел, то $d \geq 1$, $\Rightarrow d = 1$.

При $d=1$. $\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a + 1 < 0 \end{cases}$

1. $a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

при $a \neq -3$

2. $a_1^2 + 6a + 1 = 0$

$D = 36 - 4 = 32$.

$a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

$\Downarrow$

$a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2})$, однако

$a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 = -5; -4; -2; -1$.

Ответ: $a_1 = -5; -4; -2; -1$.

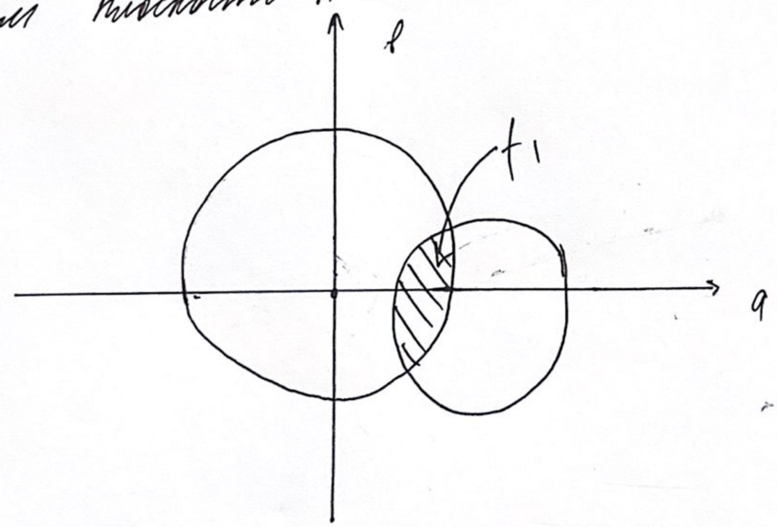
Чистовик

Задача 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 50 \\ a^2+b^2\le \min(14a+2b, 50) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 50 \\ a^2+b^2\le 14a+2b \Rightarrow \cancel{a^2+b^2\le 14a+2b} \Rightarrow (a-7)^2+(b-1)^2\le 50 \\ a^2+b^2\le 50 \end{cases}$$

Рассмотрим плоскость АОВ и параметры x и y



$(a-x)^2+(b-y^2)\le 50$ — круг с радиусом $\sqrt{50}$ с плавающим центром. Необходимо найти все центры окружности радиусов $\sqrt{50}$, которые пересекают A_1. Это все точки отстающие от двух окружностей $\le\sqrt{50}$. Все точки, отстающие от центра двух окружностей $\le 2\sqrt{50}$. Все точки, лежащие на пересечении кругов

$$\begin{cases} x^2+y^2\le(2-50)^2 \\ (x-7)^2+(y-1)^2\le(2-50)^2 \end{cases}$$

Черновик

Найдем площадь этого пересечения.

Черновик

Задача 1

Ain't no love in the heart of the city,
ain't no love in the heart of town...
My baby just cares for shows.

$S - a_7 a_{16} > S - 24$

$a_7 = a_1 + d \cdot 6$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15$

$S_{15} = \frac{a_1 + a_1 + 14d}{2} \cdot 15$

$\frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 \quad (a_1 + 7d) 15$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$$\begin{cases} (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < 15(a_1 + 7d) + 4 \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 15(a_1 + 7d) - 24 \end{cases}$$

Черновик

Too good to be true, that's the way I'm

feeling for you, ..

Marvelous you, you're just too good to be true.

But I adored you, I longed before you

But

I've been feeling so blue

So

You proved an ecstasy before

All my life I've been

before

Черновик зад. 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \end{cases}$$

⇓

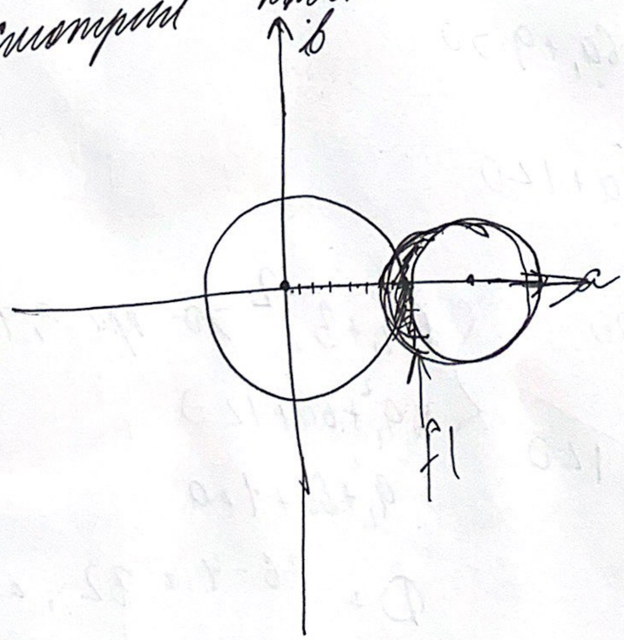
?

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 14a+2b \Rightarrow (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$$

$a^2+b^2 \le 50$

Рассмотрим плоскость AOB и параметры x, y.

где огр. пересек.



Черновик

$(a-x)^2 + (b-y)^2 \leq 50$ 7.~

круг радиус $\sqrt{50}$ с плавающими центра

Необходимо найти все центры окружности радиуса $\sqrt{50}$, которые пересекают ~~первую окружност~~ обе окружност.

Это все точки, отстоящие от двух окружностей $\leq \sqrt{50}$

Все точки отстоящие от центра двух окружностей $\leq 2\sqrt{50}$

Все точки лежащие на пересечении кругов:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq (2\sqrt{50})^2 \\ (x-7)^2+(y-1)^2 \leq (2\sqrt{50})^2 \end{cases}$$

Найдем площадь этого пересечения.

$-3-2\sqrt{2}$ -6

$(a^2-14a)+b^2-2b$ $-2\sqrt{2}$ -3

-8 -9

$(a-14a+49)+(b-2b+1) \leq 50$ $-3+2\sqrt{2} \vee 0$

$2\sqrt{2}$ 3

a^2+b^2

$-3+2\sqrt{2}$ $\vee$ -1 8 9

$2\sqrt{2} \vee 2$ $8 \vee 4$

Черновик

$a_1 = \cancel{\in Z} \Rightarrow a_1 = -5; -4; -2; -1.$

Ответ: $-5; -4; -2; -1.$

$D = 36 - 4 = 32$

$a_1 = \dfrac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$a_1 \in (-3 \pm \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}).$!?

$-3 \pm 2\sqrt{2}$

$-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}$

$-3 - 2\sqrt{2} < -5$

$-2\sqrt{2} < -2$

$-8 < -4$

$-3 - \sqrt{2} < -5$

$-\sqrt{2} < -2$

$-2 < -4$

неверно.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104767**

ID профиля: **853833**

Вариант 22

Чистовик

Задача 4

Пусть $a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

Тогда НОД $(a, b, c) = 2^{\min(a_1; b_1; c_1)} \cdot 7^{\min(a_1; b_1; c_1)}$

$$\begin{cases} \min(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ \max(a_1, b_1, c_1) = 17 \\ \min(a_2, c_2, b_2) = 1 \\ \max(a_2, c_2, b_2) = 18 \end{cases}$$

1. Рассмотрим a_1 b_1 c_1

1.1. Пусть $a_1 < b_1 < c_1$, тогда $a_1 = 1$

$c_1 = 17$

$b_1 \in [2; 16]$

Таких случаев 15 шт

$15 \cdot 6 = 90$

1.2. Пусть $a_1 = b_1 < c_1$ или $a_1 = c_1 < b_1$

Таких случаев 6 шт.

1

1.3. Всего вариантов для a_1, b_1, c_1 Чистовик

$15\cdot 6+6 = 16\cdot 6 = 96$

2. Рассмотрим a_2, b_2, c_2.

Рассуждаем аналогично

2.1. $16\cdot 6 = 96 \; (a_2 < b_2 < c_2)$

2.2. $6 \; (a_2 = b_2 < c_2$ или $\cancel{a_2 < b_2 < c_2}$ $a_2 = c_2 < b_2)$

2.3. $16\cdot 6+6 = 102$.

3. Всего случаев $16\cdot 6\cdot 17\cdot 6 = \cancel{9729}\ 9792$.

Ответ: 9792

Чистовик

Задача 6

а) Пусть $\angle ABC = \alpha = \angle ABP$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (как центральный), $\angle BAP = \angle APC = \beta$ как углы между хорд. и сек.

$\angle APB = 180^\circ - 2\alpha$

В $\triangle ABP$ $\angle ABP = 180 - 2\alpha$

$$\angle ABP + \angle BPA + \angle BAP = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta - 2\alpha + 180 = 180^\circ$$

$$\beta - \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \alpha.$$

Имеем $\angle ABP = \angle BAP = \angle ACP = \alpha$

Далее $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$ как угол между кас. и сек.

$$\angle BAT + \angle BCT = 180^\circ - 3\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

$\Downarrow$

Точки A, B, C, T лежат на одной окружности.

$\angle APT = \angle ACT = \alpha$ как углы на дуге AT

$\angle TPC = 2\alpha - \alpha = \alpha.$

Имеем $\angle BAP = \angle TPC = \alpha$, но $\angle BAP$ и $\angle TPC$ н.л. при AB и TP и сек. AP ~~$AB \parallel PT$ по призн.~~ $\Rightarrow AB \parallel PT.$

3

Задача 6 Листовик

$\triangle CPK \sim \triangle CBA$ по двум углам.

~~Какой k?~~

$S_\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot H = 12$

$S_\triangle BKC = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot H = 5. \Rightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{12}{5} = k$

$\frac{S_\triangle ABC}{S_\triangle CPK} = k^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Rightarrow S_\triangle ABC = \frac{12 \cdot 12}{5 \cdot 5} \cdot S_\triangle CPK =$

$\frac{12 \cdot 12 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{144}{5} = 28{,}8$

б) $S_\triangle ABC = \frac{1}{2} 28{,}8$; $S_\triangle APB = 28{,}8 - 12 = 16{,}8$.

$S_\triangle ABP = \underline{AB^2}$

Задача 5 Чистовик

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=a$$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=b$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=c$$

$$a\cdot b\cdot c=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}\cdot\frac{4\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\cdot\frac{2\cdot\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}=$$

$$x^2\cdot(x-1)=4$$

$$(x-2)\cdot(x^2+x+2)=0$$

$x=2$ $\quad D<0$

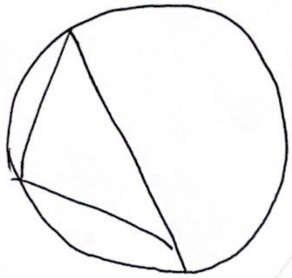
$$\Downarrow$$

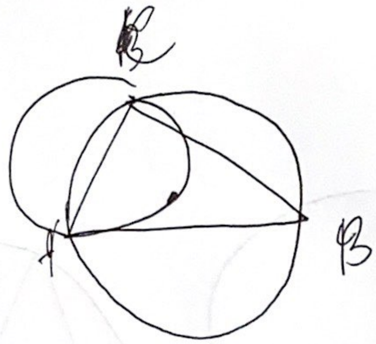
$$x=2$$

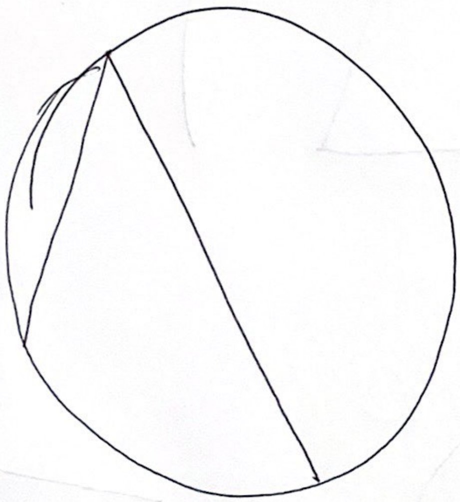
Ответ: 2

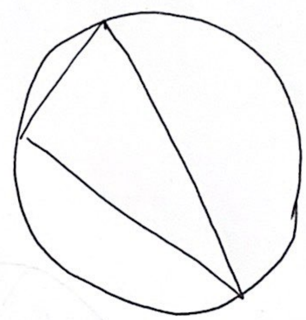
5

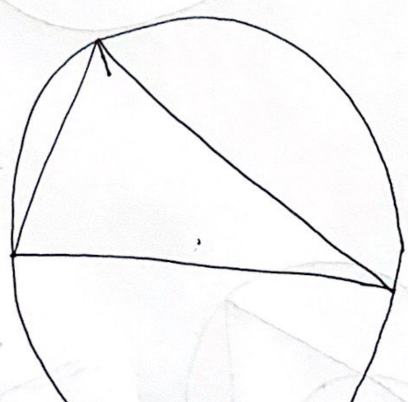
Черновик



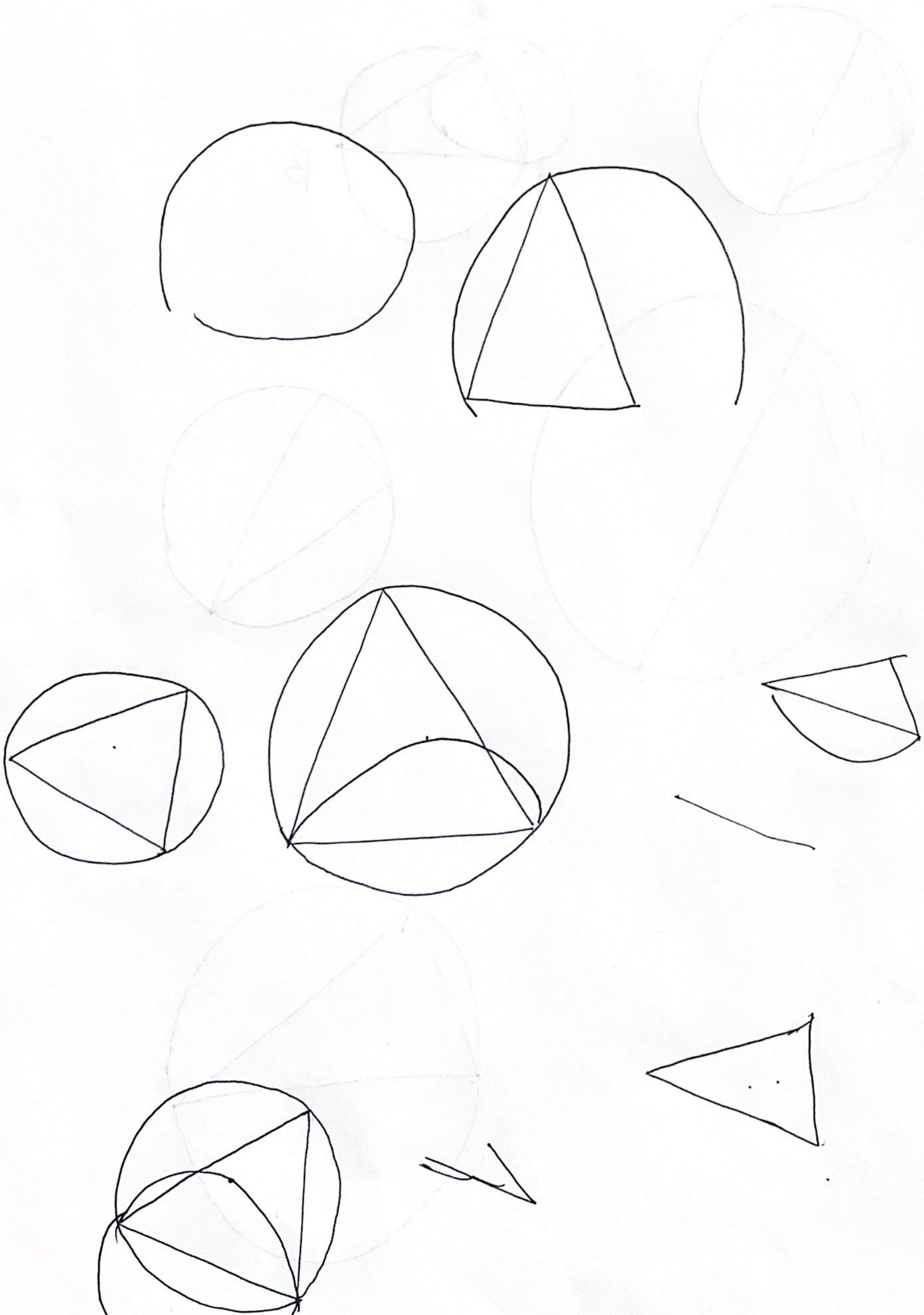




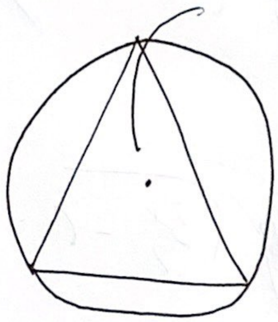


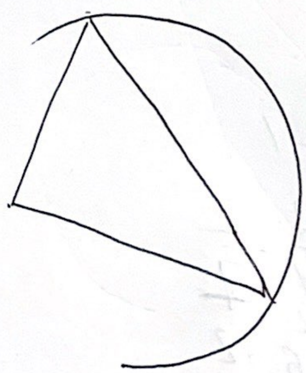


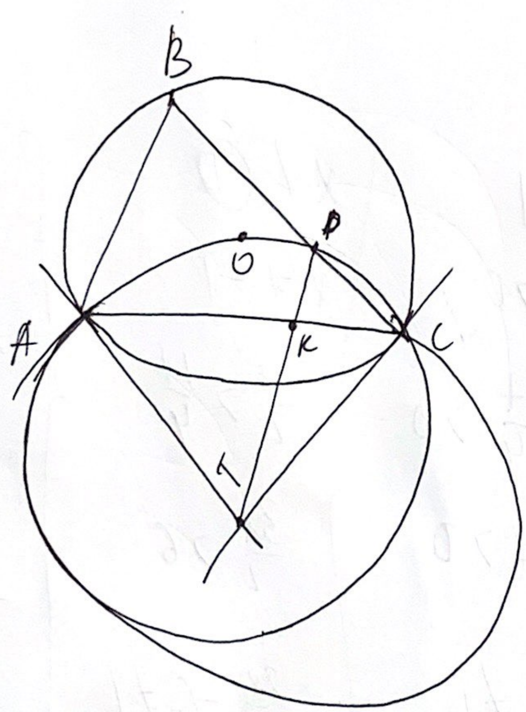
Черновик

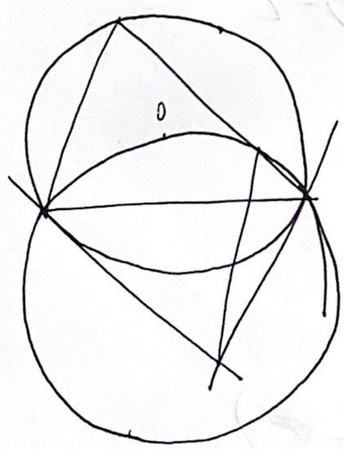


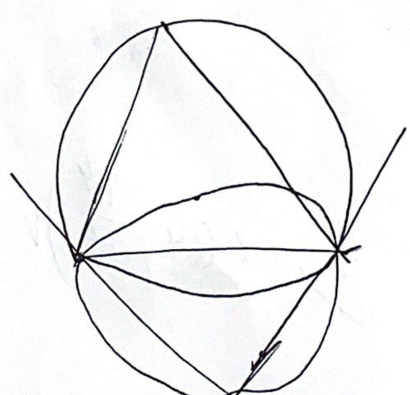
Черновик











Черновик

$$\begin{cases} \log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 \\ \log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)-1=\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) \end{cases}$$

ОДЗ

$$\begin{cases} x+1\neq 1 \\ (x+1)^2>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \sqrt{\frac{3x}{2}-6}\neq 1 \\ \frac{x}{2}+1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -1 \\ \frac{7x}{2}>\frac{17}{4} \\ \frac{3x}{2}>6 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \\ \frac{x}{2}>-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -1 \\ x>\frac{17}{4}\cdot\frac{2}{7} \\ x>6\cdot\frac{2}{3} \\ \frac{3x}{2}\neq 7 \quad x\neq 7\cdot\frac{2}{3} \\ x>-2 \end{cases}$$

$x\neq$

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -1 \\ x>\frac{17}{14} \\ x>4 \\ x\neq\frac{14}{3} \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(4;\frac{14}{3}\right)\cup\left(\frac{14}{3};+\infty\right)$$