Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

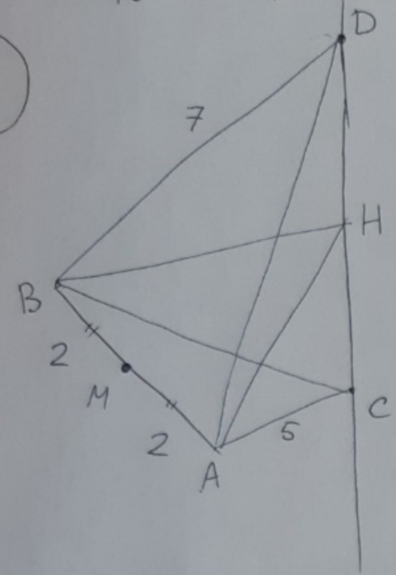
Шифр: **21104758**

ID профиля: **159856**

Вариант 22

Чистовик 1

№2



M - середина AB $\Rightarrow$ по т Пифагора:

$CM = \sqrt{21} \quad DM = \sqrt{45}$

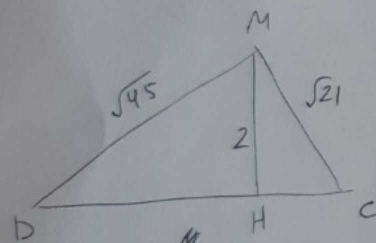
пусть $MH \perp CD \Rightarrow (ABH) \perp CD$, тк $AB \perp CD$

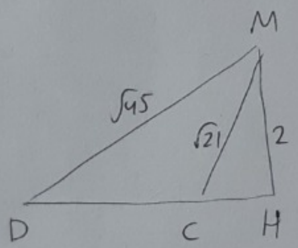
$MH = h$

радиус цилиндра - радиус ~~ΔABH~~ описанной окружности ΔABH

$$R = \frac{AH}{2\sin\angle BAH} = \frac{AH}{2\frac{MH}{AH}} = \frac{AH^2}{2MH} = \frac{h^2+4}{2h}$$

$$\left(\frac{h^2+4}{2h}\right)' = \frac{4h^2 - 2(h^2+4)}{4h^2} = \frac{h^2-4}{2h^2} \Rightarrow R \text{ минимален } \cancel{\text{минимально}} \text{ при } h = 2$$





по т Пифагора:

$$DC = \left[\begin{array}{l} \sqrt{41}+\sqrt{17} \\ \sqrt{41}-\sqrt{17} \end{array}\right.$$

Ответ: $DC = \sqrt{41} \pm \sqrt{17}$

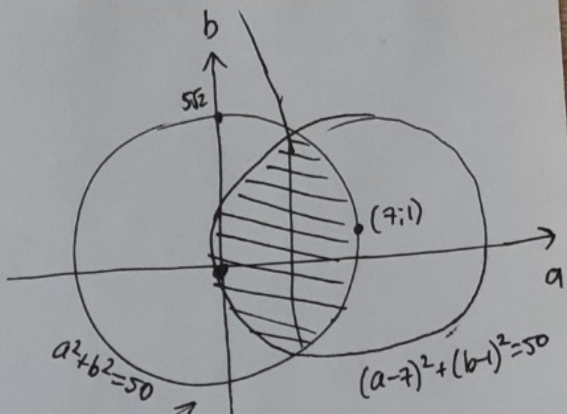
примечание:

M - середина AB $\Rightarrow$ DM и CM - медианы в равнобедренных треугольниках, проведенные к основанию $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{array}\right\} (CDM) \perp AB \Rightarrow CD \perp AB$

Чистовик 2

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \end{cases}$$



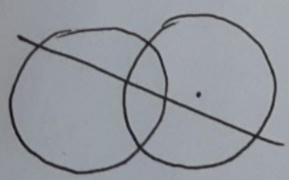
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 14a+2b \ge 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases} \\ \begin{cases} 14a+2b < 50 \\ a^2+b^2 \le 14a+2b \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \ge 25-7a \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases} \\ \begin{cases} b < 25-7a \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases} \end{array}\right.$$

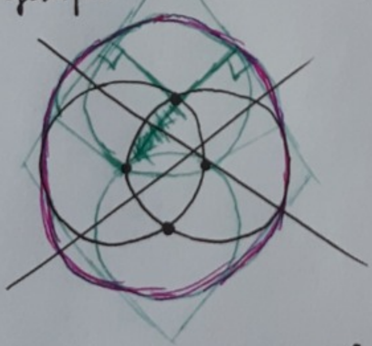
решения закрашены (подходящие $(a;b)$)

окружности $a^2+b^2=50$ и $(a-7)^2+(b-1)^2=50$ пересекаются в точках, лежащих на прямой $14a+2b=50$, тк

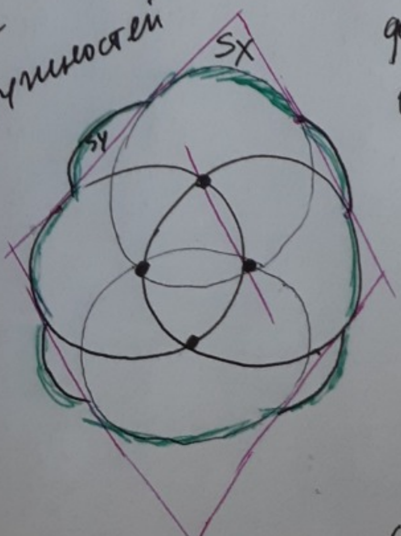
$$\begin{cases} a^2+b^2=50 \\ (a^2-7)^2+(b-1)^2=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=50 \\ a^2+b^2=14a+2b \end{cases} \Rightarrow 14a+2b=50$$

$(x-a)^2+(y-b) \le 50$ значит, что все точки, с координатами $(x;y)$ лежат внутри окружности с центром в $(a;b)$ и радиусом $5\sqrt{2}$





радиус окружностей $5\sqrt{2}$



фигура M обведена зеленым цветом

$$S_M = S_{\substack{\text{большого} \\ \text{ромба} \\ \text{(розового)}}} - 4S_x + 4S_y =$$

$$= \frac{25\sqrt{3}}{3}(7+8\sqrt{3}) - 4\cdot 50\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right) + \left(-4\cdot 50\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} + 4\cdot\frac{\pi\cdot 50}{6}\right) =$$

$$= 50\left(\frac{7\sqrt{3}}{6} + 4 - 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = 50\left(2\pi + 4 - 5\sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104758**

ID профиля: **159856**

Вариант 22

Чистовик 1

№5

$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\frac{1}{2}\log_a b$ $\quad 4\log_b c$ $\quad 2\log_c a$

$a=\frac{x}{2}+1$

$b=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$

$c=\frac{3x}{2}-6$

ограничение

$\left.\begin{matrix} a,b\text{ и }c>0 \\ a,b\text{ и }c\neq 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x>4 \\ x\neq \frac{14}{3}\end{matrix}$

пусть 2 числа равны t, а третье $t-1$

$$\frac{1}{2}\log_a b\cdot 4\log_b c\cdot 2\log_c a=4=t^2(t-1)\Rightarrow t^3-t^2-4=0$$

$$t^3-t^2-4=(t-2)(t^2+t+2)=0\Rightarrow t=2,\ а\ t-1=1$$

1 случай) $\frac{1}{2}\log_a b=1$

$\log_a b=2$

$b=a^2$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$

$14x-17=(x+2)^2=x^2+4x+4$

$x^2-10x+21=0$

$x=\left[\begin{matrix}7\\ 3<4\Rightarrow \text{не подходит}\end{matrix}\right.$

2 случай) $2\log_c a=1$

$c=a^2$

$\frac{3x}{2}-6=\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$

$6x-24=x^2+4x+4$

$x^2-2x+28=0\Rightarrow\varnothing$

3 случай) $4\log_b c=1\Rightarrow 2\log_c a=2$

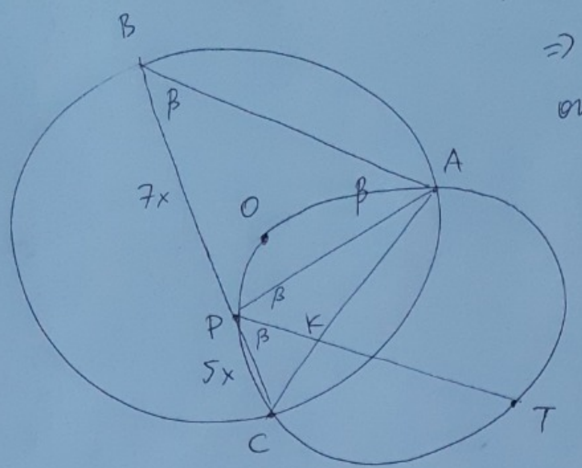
$a=c\Rightarrow\frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6\Rightarrow x=7$

Ответ: 7

21104758 (U159856 M1299044)

Чистовик №3

№6



T – точка пересечения касательных $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow$ T принадлежит окружности с точками O, A и C и P

$\angle ABC = \beta \Rightarrow$ центральный $\angle AOC = 2\beta =$

$= \angle APC$

окружности симметричны, относительно OT и $AC \perp OT \Rightarrow$

$\Rightarrow \smile AT = \smile CT \Rightarrow \angle CPT = \angle APT = \beta$

$\angle OPT = \angle OCT = 90° \Rightarrow \angle OPA = \angle OPT - \angle APT = 90° - \beta \Rightarrow \angle BPO = 90° - \beta$

~~$\Rightarrow$ PO – биссектриса и принадлежит серединному в ΔAPB~~

$\angle ABP = \angle TPC \Rightarrow AB \parallel PT \Rightarrow \angle BAP = \angle APT = \beta \Rightarrow BP = AP$

PK – биссектр. в $\Delta APC \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{7}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{APC} \cdot \frac{BC}{PC} = 12 \cdot \frac{12}{5} = \frac{144}{5}$ (А)

(Б) $tg\,\beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\beta = \frac{4}{5}$ $\sin\beta = \frac{3}{5}$

$BP = \frac{7}{12} BC$

$AB = 2 \cdot \cos\beta \cdot BP = \frac{7}{\cancel{12}_3} \cdot 2 \cdot \frac{\cancel{4}}{5} BC = \frac{70}{3} BC$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin\beta \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} BC^2 \cdot \frac{70}{\cancel{3}} = 7BC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \frac{12}{\sqrt{35}} = \frac{12\sqrt{35}}{35}$

по т косинусов

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \frac{4}{5} =$ ~~$\left(\frac{70}{3}\right)^2 BC^2 - \frac{70}{3} \cdot 2 \cdot BC^2 \frac{4}{5} = \left(\frac{70}{9}\right)^2$~~

$= \left(\frac{70}{3}\right)^2 BC^2 + BC^2 - 2 \cdot \frac{70}{3} \cdot \frac{4}{5} BC^2 = \frac{4573}{9} BC^2$

$AC = \frac{\sqrt{4573}}{3} \cdot \frac{12}{\sqrt{35}}$

21104758 (U159856 M1299044)

Чистовик 2

№4) $НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 2^{18} = 14 \cdot 2^{16} \cdot 7^{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ хотя бы одно число $\vdots\, 2^{17}$ и хотя бы одно $\vdots\, 7^{18}$

Пусть $a \vdots 2^{17}$, $b \vdots 7^{18}$, те:

$a = 14 \cdot 2^{16} \cdot \ldots$ $\times 7$

$b = 14 \cdot 7^{17} \cdot \ldots$ можно добавлять $\times 2$

$c = 14 \cdot \ldots$ $\times 2$ и $\times 7$

чтобы $НОD(a,b,c) = 14$, можно добавлять ко множителям a ~~и~~ или c 7 (не более 15 раз) ~~...~~ — если больше 15 раз, то $НОК(a,b,c) \neq 2^{17} \cdot 7^{18}$

одновременно добавлять к a и к c нельзя, тк. ~~...~~ тогда $НОD(a,b,c) > 14$

Для b и c с добавление 2 не более 16 раз аналогично

Всего таких $\{a, b$ и c будет $(15 \cdot 2) \cdot (16 \cdot 2)$

тк a, b и c можно менять местами, то ответ нужно умножить на 6

Итого $15 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 6 = 576$

Ответ: 576

21104758 (U159856 M1299044)