Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104615**

ID профиля: **132415**

Вариант 22

Чистовик

① $S = \frac{2a_1 + 14d}{2} 15 = (a_1 + 7d)15$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > (a_1+7d)15 - 24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) > (a_1+7d)15+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) - 105d + 24 > 15a_1 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) - 105d - 4 > 15a_1 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 - 105d - 4 < 15a_1 < a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 - 105d + 24$$

Т.к. $a_1^2 + 21a_1d - 105d$ справа и слева в неравенстве, то

$$110d^2 - 4 < 90d^2 + 24$$
$$20d^2 < 28$$
$$d^2 < \frac{7}{5}$$
$$-\sqrt{\frac{7}{5}} < d < \sqrt{\frac{7}{5}}$$

Т.к. d - целое и положительное, то $d = 1$, тогда

$$a_1^2 + 21a_1 + 110 - 105 - 4 < 15a_1 < a_1^2 + 21a_1 + 90 - 105 + 24$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 1 < 15a_1 \\ a_1^2 + 21a_1 + 9 > 15a_1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \end{cases}$$

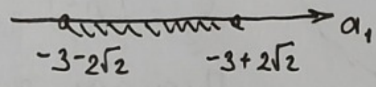
$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \quad (1) \\ (a_1 + 3)^2 > 0 \quad \Rightarrow a_1 \neq -3 \end{cases}$$

(1) $a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$f(x) = a_1^2 + 6a_1 + 1$

$f(x) = 0$: $D = 32 = (4\sqrt{2})^2$

$a_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$



Т. к. a_1 - целое, то $a_1 = \{-5; -4; -3; -2; -1\}$, с учётом $a_1 \neq -3$

Ответ: $-5; -4; -2; 1$

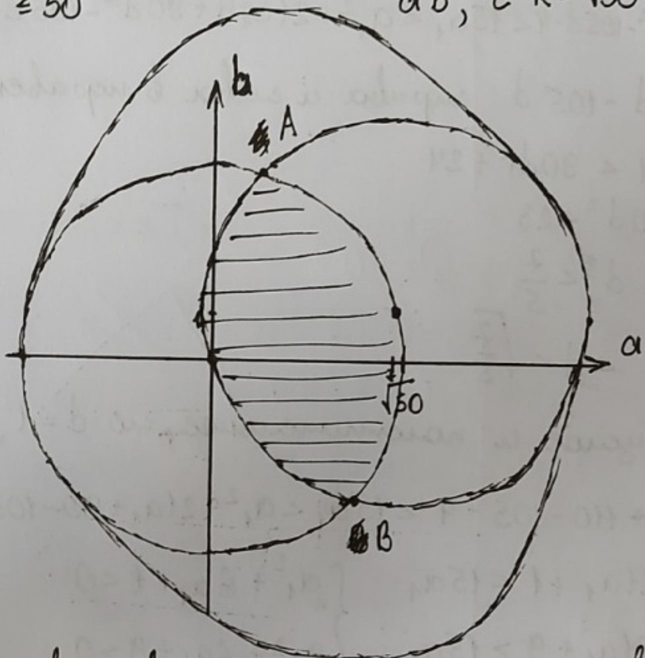
Чистовик

③ $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) & (2)\end{cases}$

(2) неравенство равносильно системе

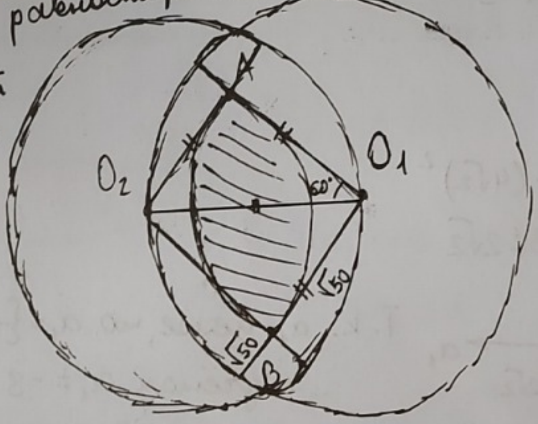
$\begin{cases}a^2+b^2 \le 14a+2b\\ a^2+b^2 \le 50\end{cases}$ $\begin{cases}(a^2-14a+49)+(b^2-2b+1) \le 50\\ a^2+b^2 \le 50\end{cases}$

$\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le 50\end{cases}$ Две окружности в координатах ab, с $R=\sqrt{50}$



Тогда (1) неравенство окружит заштрихованную часть дугами окружностей с $R=\sqrt{50}$

$\triangle O_1AO_2$ – равносторонний со стороной $\sqrt{50} \Rightarrow \angle AO_1O_2 = 60°$



$S_1 = \frac{1}{2}R_2^2 d - \frac{1}{2}R_1^2 d =$

$= \frac{1}{2}(2\sqrt{50})^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}(\sqrt{50})^2 \cdot \frac{2\pi}{3} =$

$= 50\pi$

Площадь 2 усеченных секторов

$S_2 = \frac{1}{2}R_1^2 d = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{50})^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{25\pi}{3}$

Площадь 2 маленьких целых секторов

$S = 2S_1 + 2S_2 = 100\pi + \frac{50\pi}{3} = \frac{350\pi}{3}$

Ответ: $\frac{350\pi}{3}$

Стр: 2

Черновик

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S-24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S+4 \end{cases}$$

$S = S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} 15 = a_2 + a_{14} = a_3 + a_{13} = a_4 + a_{12} + a_5 + a_{11} =$
$= a_6 + a_{10} + a_7 + a_8$

$\frac{2a_1 + 14d}{2} 15 = (a_7 + 7d) 15$

$a_7 \cdot a_{16} > \frac{a_7 + a_8}{2} 15 - 24$

$S = (a_1 + 7) 15 =$
$= 15a_1 + 105$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > (a_1 + 7d) 15 - 24$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < (a_1 + 7d) 15 + 4$

$-5+6=1$

$$\begin{cases} (a-d)(a+8d) > 15a - 24 \\ (a+3d)(a+4d) < 15a + 4 \end{cases}$$

$-5+15=10$

$-5+10=5$

$S = \frac{-2+14}{2} 15 =$
$= 6 \cdot 15 = 90$

$-5+11=6$

$-1+6=5$

~~$S+9d=X$~~

$-1+15=14$

$\frac{\times 1,4 \quad 2}{2,8}$

$(a+3d)(a+4d) - 4 < 15a < (a-d)(a+8d) + 24$

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 15a_1 + 105d - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

$S = \frac{-10+14}{2} 15 = 30$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 11d) - 105d - 4 < 15a_1 < (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) - 105d + 24$

$$\begin{cases} 10 > 6 \\ 30 < 34 \end{cases}$$

$a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 - 105d - 4 < 15a_1 < a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 - 105d + 24$

$110d^2 - 4 < 90d^2 + 24$

$20d^2 < 28$

$d^2 < \frac{7}{5}$

$(a_1 + 3)^2 > 0$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$D = 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$-3-2\sqrt{2} \qquad -3+2\sqrt{2} \quad a_1$

$-5,8 \qquad -0,2$

$-\sqrt{\frac{7}{5}} < d < \sqrt{\frac{7}{5}} \Rightarrow d = 1$

$-5, -4, -3, -2, -1$

$a_1^2 + 21a_1 + 110 - 105 - 4 < 15a_1 < a_1^2 + 21a_1 + 90 - 105 + 24$

$a_1^2 + 21a_1 + 1 < 15a_1 < a_1^2 + 21a_1 + 9$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 9 > 15a_1 \\ a_1^2 + 21a_1 + 1 < 15a_1 \end{cases}$$

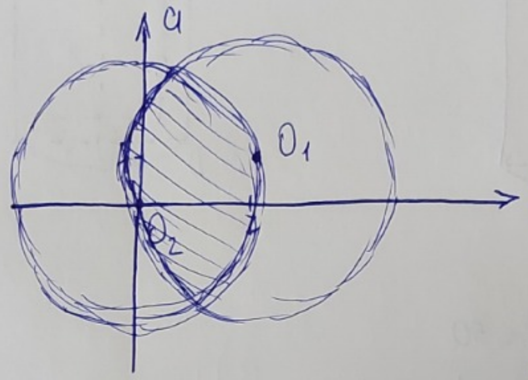
черновик

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 14a+2b \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$$

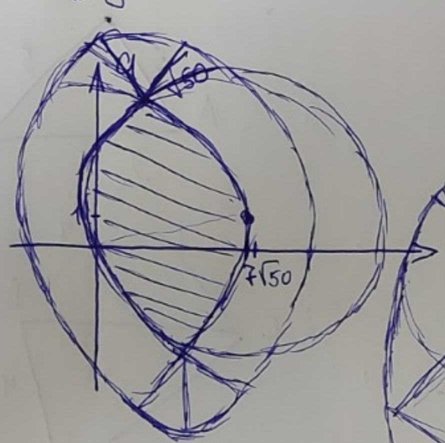
$$\begin{cases} (a^2-14a+49)+(b^2-2b+1) \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$$

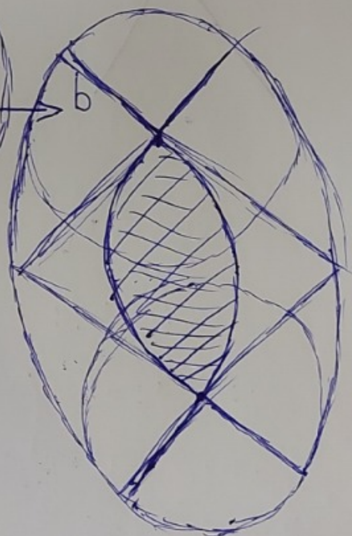
черновик

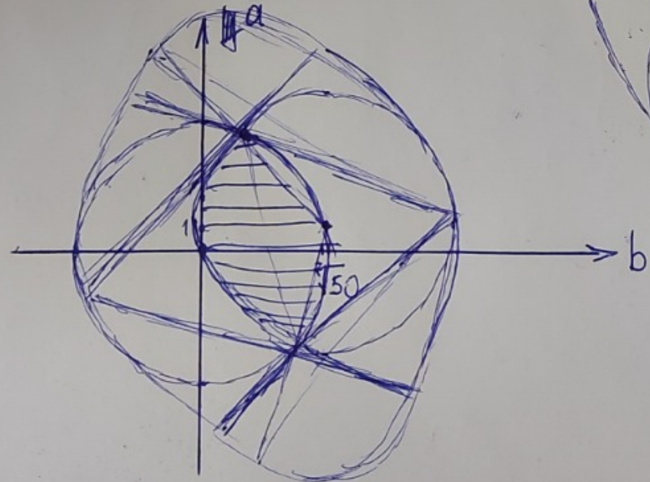
$$\begin{cases} (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$$



$$(a-x)^2+(\cancel{a}\overset{b}{}-y)^2 \le 50$$







Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104615**

ID профиля: **132415**

Вариант 22

Чистовик

5. $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right),\ \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2,\ \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{2}+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+1>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0 \\ x>-2 \\ x\neq \frac{3}{2} \\ x>\frac{17}{4} \\ x\neq\frac{14}{3} \\ x>4 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x\neq\frac{14}{3} \end{cases}$

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$$

Представим $\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, как

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\Rightarrow$$

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=1,$$

Тогда, $\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot 4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)\cdot 2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=4$

Но, по условию, один из логарифмов $=a$, а один $=a-1$,

Значит, $a^2(a-1)=4$

$a^3-a^2=4$

$(a^3-8)-(a^2-4)=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$a=2$ $\quad D<0$

Значит, нужно рассмотреть 3 случая

$$(1)\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2 \\ 4\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=2 \\ 2\log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2 \\ 2\log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2 \\ 4\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=1 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} 4\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=2 \\ 2\log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2 \\ \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=1 \end{cases}$$

(1): $\sqrt{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}=\frac{x}{2}+1$

$\frac{3x}{2}-6=\frac{x^2}{4}+x+1 \;/\cdot 4$

$x^2+4x+4=6x-24$

$x^2-2x+28=0$

$D=4-4\cdot 28<0$

нет решений

(3): $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$

$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \;/\cdot 4$

$x^2+4x+4=14x-17$

$x^2-10x+21=0$

$x_1=7,\ x_2=3$ - не уд. ОДЗ.

(2) $\frac{3x}{2}-6=\frac{x}{2}+1$

$x=7$ не уд. ОДЗ

нет решений

Проверим $x=7$: $2\log_{\left(\frac{21}{2}-6\right)}\left(\frac{7}{2}+1\right)=2\log_{\frac{9}{2}}\frac{9}{2}=2$ - верно

$4\log_{\left(\frac{7\cdot 7}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{21}{2}-6\right)=4\log_{\frac{81}{4}}\frac{9}{2}=4\cdot\frac{1}{2}=2$ - верно

Ответ: 7

Чистовик

(4) Т.к. числа 2 и 7 - простые, а НОК делится на a, b, c, то все эти числа имеют вид $2^x \cdot 7^y$

Обозначим $a = 2^x \cdot 7^y$, $b = 2^z \cdot 7^t$, $c = 2^u \cdot 7^v$

Т.к. НОК $= 2^{17} \cdot 7^{18}$, то наибольшее из $x, z, u = 17$,
а наибольшее из $y, t, v = 18$

Т.к. НОД $= 2 \cdot 7$, то наименьшее из $x, z, u = 1$,
а наименьшее из $y, t, v = 1$

Поэтому любая тройка натуральных чисел (x, z, u), одно из которых равно 1, ~~и~~ ещё одно равно 17, а третье принимает значение от 1 до 17. подходит

Таких троек $3 \cdot 2 \cdot 17 = 102$

При этом тройки $(1,1,17)$, $(1,17,1)$, $(1,17,17)$, $(17,1,1)$, $(17,17,1)$, $(17,1,17)$ мы учли дважды, поэтому всего $102 - 6 = 96$ троек.

Аналогично с числами (y, t, v) - их $3 \cdot 2 \cdot 18 = 108$, но снова тройки $(1,1,18)$, $(1,18,1)$, $(1,18,18)$, $(18,1,1)$, $(18,18,1)$, $(18,1,18)$ мы учли дважды, поэтому всего $108 - 6 = 102$ тройки

Итого, троек $96 \cdot 102 = 9792$

Ответ: 9792

Черновик

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

~~log~~

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{2}+1 \neq 1 \\ \frac{x}{2}+1>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0 \\ x>-2 \\ x>\frac{17}{14} \\ x\neq\frac{3}{2} \\ x>4 \\ x\neq\frac{14}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x\neq\frac{14}{3}\neq 4\frac{2}{3} \end{cases}$

$\frac{7x}{2}>\frac{17}{4}$

$7x>\frac{34}{4}$

$x=\frac{34}{28}=\frac{17}{14}$

$\frac{7x}{2}\neq\frac{21}{4}$

$x=\frac{42}{28}=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}$

$\frac{a}{a}+a-1=a$

$a+a+a-1=3a-1$

$a-a-a+1=1-a$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$, $2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\parallel$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{2}{\log_{\frac{x}{2}+1}\frac{3x}{2}-6}$ $\qquad \frac{2}{\log_{\frac{x}{2}+1}\frac{3x}{2}-6}$

~~$\frac{1}{2}\log$~~

~~$\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=4$~~

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)+4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)+2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\frac{\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{8\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}=\frac{1}{8}$ $\qquad \frac{8\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}=$

$=8\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)\cdot\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1$

Черновик

$$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)}=\frac{1}{2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}$$

$$\log_2 8=3=\frac{\log_4 2}{\log_4 8}\qquad \log_2 16=4=\frac{\log_4 16}{\log_4 16}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2}\log_a b,\ 4\log_b c,\ 2\log_c a$$

$$\frac{1}{2}\log_a b=\frac{1}{2\log_c a\cdot\log_b c}$$

$$\begin{cases}\log_a b\cdot\log_c a\cdot\log_b c=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4\\ \frac{1}{2}\log_a b+4\log_b c+2\log_c a=\frac{3}{2}\log_a b-1\end{cases}$$

$$a\cdot a\cdot(a+1)=a^3+a^2$$

$\frac{1}{2}$

$$a^3+a^2=4$$
$$(a^3-8)-(a^2-4)=0$$
$$(a-2)(a^2+a+2)=0$$
$$a=2$$

21104615 (U132415 M1297160)