Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104564**

ID профиля: **101137**

Вариант 22

№3

(Чистовик) $\boxed{В22}$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b;\ 50)\end{cases}$$

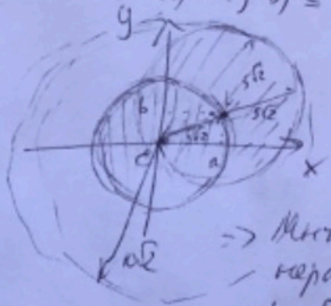
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\\ 14a+2b\ge 50\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 14a+2b\\ 14a+2b\le 50\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

Заметим, что параметр a влияет только на x, параметр b влияет только на y $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы имеем право рассматривать точки $(a;b)$ на той же координатной плоскости xy ($a\to x$; $b\to y$)

Рассмотрим (1):

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 50$ это круг с центром в т. $(a;b)$ и $R=5\sqrt{2}$. Все точки внутри круга удовл. неравенству



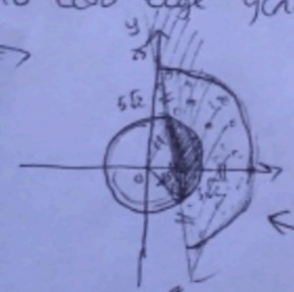
$\Rightarrow$ В свою очередь $a^2+b^2\le 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a;b)$ должны лежать внутри круга с центром $(0;0)$ и $R=5\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Множество точек $(x;y)$ удовл. 1-ым двум неравенствам это круг с центром в $(0;0)$ и $R=2\cdot 5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

Но есть еще условие, что $14a+2b\ge 50 \Rightarrow \boxed{b\ge 25-7a}$ ($b=0$ при $a=\frac{25}{7}$, что $<5\sqrt{2}$)

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ Закрашенная черная область – это все значения $(a;b)$ удовл. (1)

$\Rightarrow$ область $(x;y)$ это сегмент круга радиуса $10\sqrt{2}$ с центром в точке $(0;0)$, ограниченный прямой $y\ge 25-7x$

$b\ge 25-7a$

$y\ge 25-7x$

Посчитаем его площадь позже. Сначала разберемся с (2)

Рассмотрим (2):

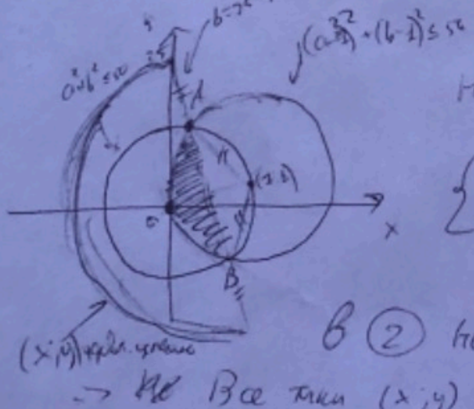
$a^2+b^2\le 14a+2b \Rightarrow a^2-14a+b^2-2b\le 0$

$a^2-2\cdot 7a+49+b^2-2\cdot 1b+1\le 50$

$\boxed{(a-7)^2+(b-1)^2\le 50}$

круг с центром в т. $(7;1)$ и рад. $5\sqrt{2}$

Заметим, что $(7;1)\in(a^2+b^2\le 50)$, более того эта точка лежит на окр. $a^2+b^2=50$



Найдем точки пересеч. окружностей A и B:

$$\begin{cases}A^2+B^2=(A-7)^2+(B-1)^2\\ A^2+B^2=50\end{cases} \Rightarrow \boxed{14A+2B=50}$$

$\Rightarrow$ точки A и B лежат на прямой $\boxed{b=25-7a}$

в (2) нас интересует сегмент, ограниченный условием $b\le 25-7a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Все точки $(x;y)$ это сегмент круга радиуса $10\sqrt{2}$ с центром в $(7;1)$

$\Rightarrow$ Искомая фигура это объединение (1) и (2), то есть объединение 2-ух сегментов, одинаковых по площади!

Осталось посчитать площадь 1-ого сегмента.

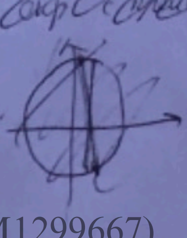
$$\begin{cases}x^2+y^2=(10\sqrt{2})^2=200\\ y=25-7x\end{cases}$$

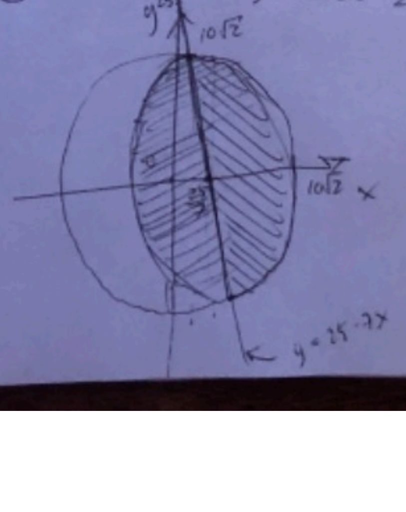
~~Найдем точки пересечения окр. с прямой~~

$x^2+(25-7x)^2=200$

$50x^2+625-350x=200$

$50x^2-350x+425=0$





№1 Пусть k - разность последовательности => последовательность возраст. и целая => $\underline{k>0;\ k\in Z}$

Чистовик | В22

$$a_1=a_1,\quad a_2=a_1+k,\quad a_3=a_1+2k,\quad \dots,\quad a_{15}=a_1+14k,\quad a_{16}=a_1+15k \Rightarrow \begin{cases} a_7a_{16}=(a_1+6k)(a_1+15k) \\ a_7a_{16}>S-24 \end{cases} \Rightarrow (a_1+6k)(a_1+15k)>S-24$$

$$\begin{cases} a_{11}a_{12}=(a_1+10k)(a_1+11k) \\ a_{11}a_{12}<S+4 \end{cases} \Rightarrow (a_1+10k)(a_1+11k)<S+4$$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1k+90k^2>S-24 \\ a_1^2+21a_1k+110k^2<S+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+21a_1k+110k^2>S-24+20k^2 \\ a_1^2+21a_1k+110k^2<S+4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S+4>S-24+20k^2$$
$$28>20k^2$$
$$k^2<1.4;\ k>0;\ k\in Z \Rightarrow \boxed{k=1}$$

Перепишем неравенства, подставив $\underline{k=1}$

$$\cancel{(a_1+6)}\ \begin{cases} a_1^2+21a_1+110<S+4 \\ a_1^2+21a_1+90>S-24 \end{cases}$$

$$\underline{S}=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{15}=15a_1+(k+2k+3k+\dots+14k)=15a_1+15\cdot 7k=15a_1+105$$

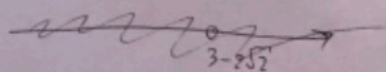
$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+21a_1+110<15a_1+109 \\ a_1^2+21a_1+90>15a_1+81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+6a_1+1<0 \\ a_1^2+6a_1+9>0 \end{cases} \Rightarrow$$

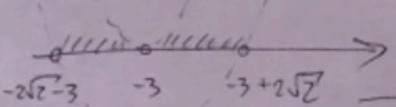
$D_1=36-4=32=(4\sqrt2)^2$

$a_{1_1}=\frac{-6-4\sqrt2}{2}=2\sqrt2-3$ ⇒

$a_{1_2}=\frac{-6+4\sqrt2}{2}=-2\sqrt2-3$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1-2\sqrt2+3)(a_1+2\sqrt2+3)<0 \\ (a_1+3)^2>0 \Rightarrow a_1\neq -3 \end{cases}$$





; $a_1\in Z$

$2\sqrt2\approx 1.4\cdot 2=2.8$

$\Rightarrow -2\sqrt2-3\approx -5.8$

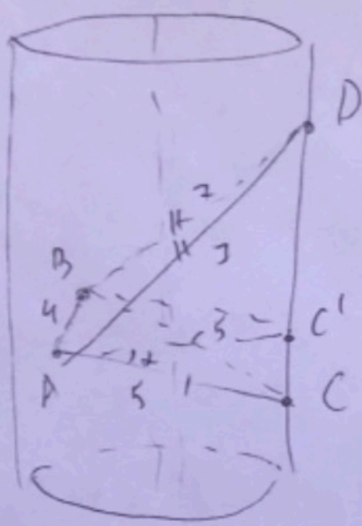
$2\sqrt2-3\approx -0.2$

$$\Rightarrow \boxed{a_1\in\{-5;-4;-2;-1\}}$$ Ответ:

21104564 (U101137 M1299667)

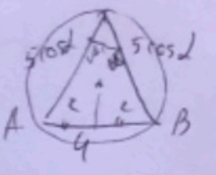
№2

Чистовик (В 22)



$C': AC' \perp DC$. Рассмотрим $\triangle ABC'$

Он вписан в окр. радиуса R



α - угол между AC' и AC

$\Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\frac{1}{2}AB}{C'B} = \dfrac{2}{5\cos\alpha}$

$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$

$\cos\beta = \sqrt{1 - \dfrac{4}{25\cos^2\alpha}}$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \dfrac{4}{5\cos\alpha}\sqrt{1-\dfrac{4}{25\cos^2\alpha}}$

$\triangle AC'B$ - р/б

$2R = \dfrac{AB}{\sin 2\beta}$ (т. sin)

$R = \dfrac{AB}{2\sin 2\beta} = \dfrac{5\cdot\cancel{4}\cos\alpha}{2\cdot\cancel{4}\sqrt{1-\frac{4}{25\cos^2\alpha}}} = \dfrac{5\cos\alpha}{2\sqrt{1-\frac{4}{25\cos^2\alpha}}}$

R - min $\Rightarrow R' = 0$

$R = \dfrac{5}{2}\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\frac{25\cos^2\alpha - 4}{25\cos^2\alpha}}} = \boxed{\dfrac{25\cos^2\alpha}{2\sqrt{25\cos^2\alpha-4}}}$

$\cos^2\alpha \in (0;1]$

$\Rightarrow \left(\dfrac{25}{2}\cos^2\alpha\cdot(25\cos^2\alpha-4)^{-\frac{1}{2}}\right)' = 0$

$\dfrac{-25\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{25\cos^2\alpha-4}} + \dfrac{\frac{25}{4}\cos^2\alpha\cdot 50\cos\alpha\sin\alpha}{(\sqrt{25\cos^2\alpha-4})^3} = 0$ $\quad$ $\sin\alpha_0 = 0$ $\Rightarrow$ $(\cos\alpha \neq 0)$

$R' = 0$ при $\sin\alpha = 0$

Находим α_0, при котором $R' = 0 \Rightarrow$ $\alpha_0 = 0$

$\Rightarrow$ при этом α_0 R - min $\Rightarrow$ ~~$DC = AC\sin\alpha$~~

$\dfrac{AC'}{AC} = \cos\alpha_0 \Rightarrow AC' = AC\cdot\cos\alpha_0 = 5\cos\alpha_0$

По теор Пиф: $AD^2 = AC'^2 + DC'^2 \Rightarrow$

$DC' = \sqrt{49 - 25\cos^2\alpha_0}$

$\Rightarrow DC = CC' + DC'$

$CC' = AC\cdot\sin\alpha_0 = 5\sin\alpha_0$ $\quad \Rightarrow \boxed{DC = 5\sin\alpha_0 + \sqrt{49-25\cos^2\alpha_0}}$

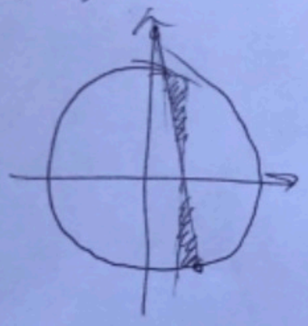
$DC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

при $\sin\alpha_0 = 0$

$\cos^2\alpha_0 = 1$

$\Rightarrow R$ min при $\underline{AC \perp DC}$

Продолжение задачи из $\boxed{\text{Чистовик}}$ B22



если провести $x = \frac{25}{7}$, то сегмент отсеченный от окр радиуса $10\sqrt{2}$ будет равен по площади сегменту, который мы получим тогда из симметрии очевидно.

$y^2 + x^2 = 200$

$\Rightarrow y = \sqrt{200 - x^2}$

$$S = \int_{\frac{25}{7}}^{10\sqrt{2}} y(x)\,dx = \int_{\frac{25}{7}}^{10\sqrt{2}} \sqrt{200 - x^2}\,dx$$

$S_1 = 2S$ – площадь этого сегмента, т.к. то что под Ox мы не считаем.

$S_x = 2S_1$, т.к. 2 симметричных сегмента.

$$\Rightarrow S_x = 4S = 4\int_{\frac{25}{7}}^{10\sqrt{2}} \sqrt{200 - x^2}\,dx =$$

$\sqrt{200 - x^2} = u$

$200 - x^2 = u^2$

$x^2 = 200 - u^2$

$d(x^2) = -d(u^2) = 2x\,dx = -2u\,du$ $\quad du = -\frac{x}{u}dx$

$d(x^2) = 2x\,dx = -2u\,du$

$\Rightarrow dx = -d(u^2)$

21104564 (U101137 M1299667)

$S = \frac{(a_1 + a_{15}) 15}{2}$ $a_7 a_{16} >$

1234567 $(a_1 + a_{15}) 7 + a_8$

Черновик

$\begin{cases} a_7 a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases}$

$a_1; a_2; a_3; a_4 \dots a_{15}$

$a_1; a_1+k; a_1+2k; a_1+3k, a_1+4k \dots a_1+14k$

$S = 15a_1 + (k + 2k + 3k + \dots + 14k) = 15a_1 + 15 \cdot 7k$

$a^2 + b^2 \leq 14a + 2b$

$14a + 2b \leq 50$

$b < 25 - 7a$

$\begin{cases} (a_1+6k)(a_1+15k) > 15a_1 + 15 \cdot 7k - 24 \\ (a_1+10k)(a_1+11k) < 15a_1 + 15 \cdot 7k + 4 \end{cases}$

$14a + 2b \geq 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \leq 50 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 50 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1k + 90k^2 > 15a_1 + 15 \cdot 7k - 24 \\ a_1^2 + 21ka_1 + 110k^2 < 15a_1 + 15 \cdot 7k + 4 \end{cases}$

$15a_1 + 15 \cdot 7k + 4 > a_1^2 + 21a_1k + 90k^2 + 20k^2 > 15a_1 + 15 \cdot 7k - 24 + 20k^2$

$4 > -24 + 20k^2$

$20k^2 < 28$

$10k^2 < 14$

$k^2 < 1{,}4$ k – целое, $k > 0 \Rightarrow k = 1$

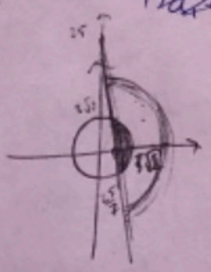
$x^2 + 6x + 1$

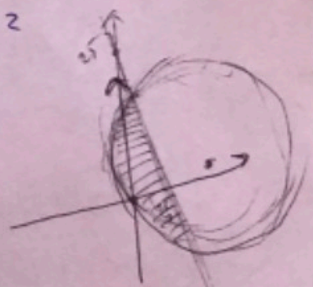
$D = 36 - 4 = 32$

$x = \frac{-6 + \sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2} - 3$

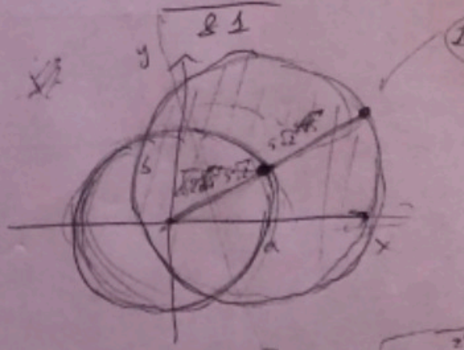
$x = \frac{-6 - \sqrt{32}}{2} = -2\sqrt{2} - 3$

$(a_1+6)(a_1+15) > 15a_1 + 105 + 4$





$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 50 \\ a^2 + b^2 \leq \min(14a + 2b; 50) \end{cases}$



$14a + 2b \geq 50$

$7a + b \geq 25$

$b \geq 25 - 7a$

$\sqrt{200 - x^2} = a$

$200 - x^2 = a^2$

$y^2 + x^2 = 100$ $y = \sqrt{200 - x^2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104564**

ID профиля: **101137**

Вариант 22

№4

Чистовик

В 22

$НОД(a,b,c) = 2^1 \cdot 7^1$ $\Rightarrow$ каждое число имеет в разложении хотя бы 1 (2) и 1 (7).

$НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$ $\Rightarrow$ Каждое число раскладывается в виде произведений простых множителей 2 и 7. (только)

$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

Среди $[a_1; b_1; c_1]$ должны быть 1, ~~17~~ 17, и $x \in [1; ~~17~~ 17]$.

Среди $[a_2; b_2; c_2]$ должны быть 1; 18, и $y \in [1; 18]$

При этом $(a; b; c)$ и $(b; a; c)$ это разные тройки $\Rightarrow$ нам важен порядок $\Rightarrow$ $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (для a.b.c.)

Среди a.b.c. есть x который принимает значения от 1 до 17 $\Rightarrow$ Кол-во вариантов для $(a_1 b_1 c_1) = A = P_3 \cdot 17 = 6 \cdot 17$.

Аналогично с $(a_2 b_2 c_2)$, есть y который $\in [1; 18]$, $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ $\Rightarrow$

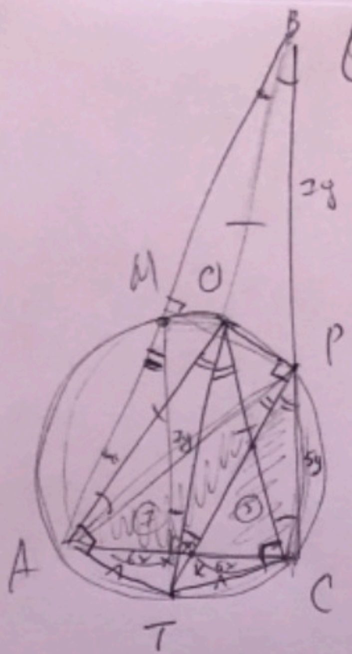
$\Rightarrow$ для $(a_2 b_2 c_2) = B = P_3 \cdot 18 = 6 \cdot 18$.

Искомое число $X(a\,b\,c)$ это $A \cdot B$ (очевидно, т.к. 2 и 7 независимые как множители)

$\Rightarrow X = 6 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 18 = 36 \cdot 17 \cdot 18 = 306 \cdot 36 = \underline{\underline{11016}}$

Ответ: 11016

№6



Сисовик В22

1) $\angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow$

т O, т A, т T; т C, т P лежат на 1 окр.

2) $\triangle AOC$ - р/б $(AO = OC)$ / OT - диагор $\Rightarrow \angle AOk = \angle kOC$

$OT \perp AC$

3) TC и AT равные дуг $\Rightarrow$ Pk - биссектриса.

4) OT - диагогр. $\Rightarrow \angle OPT = 90°$

5) $\frac{Ak}{kC} = \frac{7}{5}$; Pk - биссектриса $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{7}{5}$

6) $X = OT \cap AC$. OX - медиан в р/б $\triangle AOC \Rightarrow$

$\Rightarrow A\cancel{X} = XC \Rightarrow Xk = \frac{1}{\cancel{7}} AK$; $Xk = \frac{1}{5} AC$

7) $\triangle ABP$ - р/б $\triangle$; т.к. $\angle OAP = \angle OBP$ $(\angle OAP = \angle OTP = \angle OCP = \angle OBP)$

$\Rightarrow AP = BP = 7y$

8) $S_{ABP} \cancel{\varnothing} S_{ABC} = \frac{BP}{PC} = \frac{7}{5}$ $\Rightarrow$ $S_{ABP} = \frac{7}{5} \cdot 12$

$S_{APC} = 5 + 7 = 12$

$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = \frac{7}{5} \cdot 12 + 12$

$= \frac{12}{5} \cdot 12 = \frac{144}{5}$

9) $\angle ABC = \arctg \frac{5}{4} = \angle BAP$. Опустим из P перпенд. на AB

$PM \perp AB$

$\Rightarrow PM = \tg \alpha \cdot AM \Rightarrow S_{ABP} = \frac{12 \cdot 7}{5} = MP \cdot AM = MP^2 \tg \alpha$

Нод$(a,b,c)=14=2\cdot 7^{1}$

Нок$(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18}$

Черновик

$2\cdot 7$

$2^{17}\cdot 7^{18}$

$2\cdot 7$

$2^{x}\cdot 7^{y}$

$2\cdot 7$

$1;17;x$

$[1;17]$

$1;18;y$

$[1;18]$

$\boxed{6\cdot 17\cdot 6\cdot 18}$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}$

$17\cdot 18=306$

$306\cdot 36=11016$

Чистовик

Черновик

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right),\ \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2,\ \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

ОДЗ:

$\frac{x}{2}+1>0$

$\frac{3x}{2}-6>0$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0$

$\frac{x}{2}+1\neq 1$

$\frac{3x}{2}-6\neq 1$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1$

$x>-2$

$x>-4$

$x>\frac{17}{14}$

$x\neq 0$

$x\neq\frac{14}{3}$

$x\neq\frac{3}{2}$

$14x-17>0$

$x>\frac{17}{14}$

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$$

$$\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=8\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$$

$\log_a b=\log_b c^8$

$a^x=b$

$a^{x^x}=b^x$

$b^x=c^8$

$(b)^x=c^8$

$$\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)^{\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}=\left(\frac{3x}{2}-6\right)^8$$

$$\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^8$$

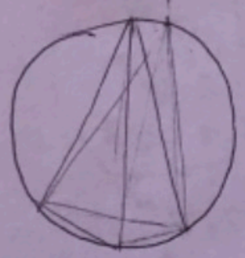
$\frac{3x}{2}\neq 7$

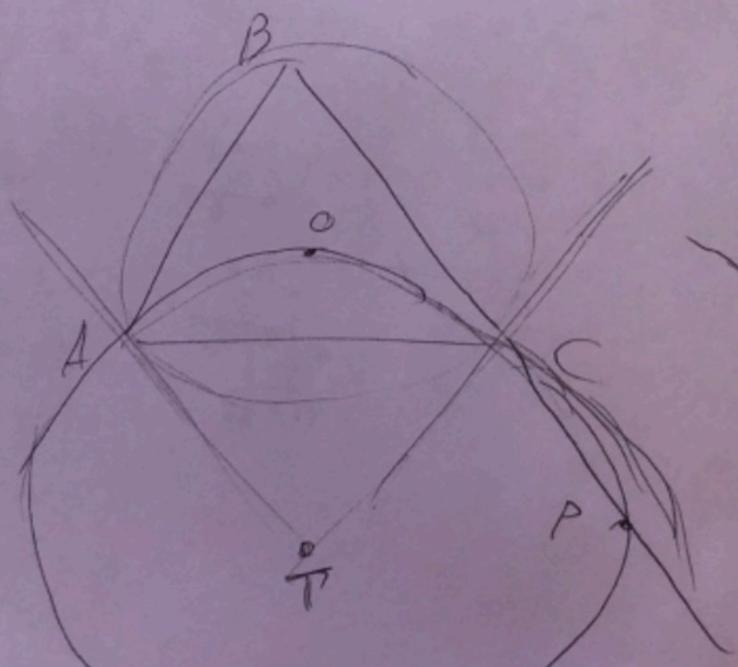
$x\neq\frac{14}{3}$

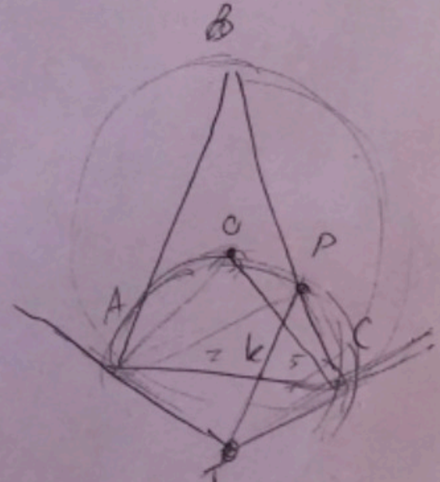
$\frac{14x}{4}\neq\frac{21}{4}$

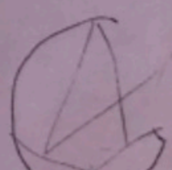
$x\neq 1{,}5$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq\frac{3x}{2}-6$









№5 (чистовик) (В22)

$$\underbrace{\log_{(\overset{u}{\frac{x}{2}+1})^2}\left(\overset{v}{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\right)}_{A};\quad \underbrace{\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\overset{w}{\frac{3x}{2}-6}\right)^2}_{B};\quad \underbrace{\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)}_{C}$$

① $A=B$; $C=A-1$

② $B=C$; $A=C-1$

③ $A=C$; $B=C-1$

①: $$\begin{cases} \log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right) \\ \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_u(\cancel{v}) = 2\log_v(w) \\ 2\log_w(u)=\frac{1}{2}\log_u(v)-1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2\log_v(w)=2\log_{(w)}(u)+1 \\ 2\left(\log_v(w)-\log_w(u)\right)=1 \end{array}$$