Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104506**

ID профиля: **802507**

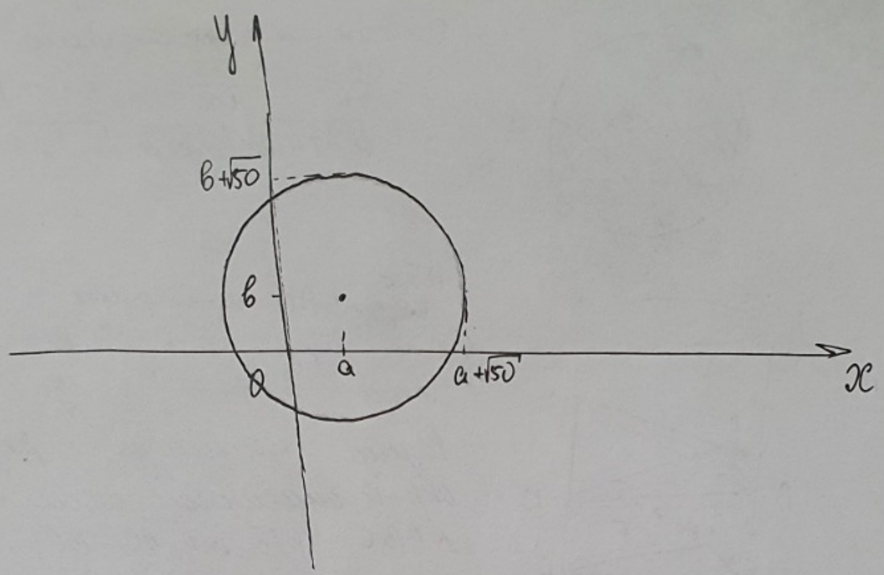
Вариант 22

черновик

3. $$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,50) & (2)\end{cases}$$

(1) Первое ~~уравнение~~ неравенство системы задает ~~окружность~~ множество кругов с центром в точке $O(a;b)$ и радиусом $\sqrt{50}$

(2) ~~Уравнение~~ Неравенство (2) задает условие выбора a и b.



$$\begin{cases}a^2+b^2\le 14a+2b\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$$

$(a^2-14a+49)-49+(b^2-2b+1)-1\le 0$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

$$\left.\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}\right] \to$$ минимум из этих выражений:

Для ур-я (2) заметим, что $14a+2b=50$ при $a=3$, $b=4$; $a=\frac{25-b}{7}$

Для отрицательных чисел a, b ~~...~~ $14a+2b\le 0$, $a^2+b^2\ge 0$ $\forall a,b$ $\to a,b\ge 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 14a+2b\\ 14a+2b<50\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 50\\ 14a+2b>50\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50\\ 14a+2b<50\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 50\\ 14a+2b>50\end{cases}\end{array}\right.$$

$(a-7)^2+(b-1)^2=a^2+b^2$

$(a-7-a)(a-7+a)=(b-b+1)(b+b-1)$

$-7(2a-7)=\cancel{1}\cdot(2b-1)$

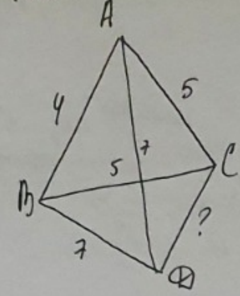
$-14a-49=2b-1$

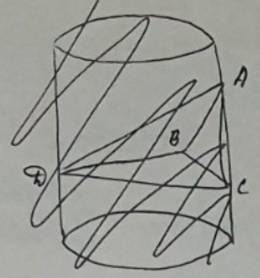
$14a+2b=50$

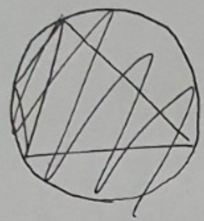
Вар. 22

2. $AB = 4$
$AC = CB = 5$
$AD = DB = 7$

Чистовик



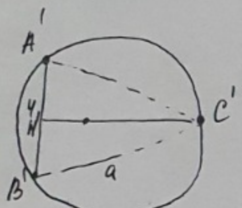


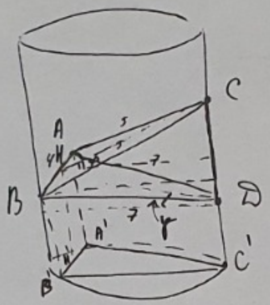


Описанная окр-сть около ΔABC:

$S = \frac{abc}{4R} = \frac{4\cdot5\cdot5}{4\cdot R} = 2\sqrt{3} \to R = \frac{25}{2\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}}{6}$

$S = \sqrt{7\cdot2\cdot2\cdot3} = 2\sqrt{21}$





Ребро AB проецируется на основание как хорда $A'B'$, $|A'B'| = 4$

Точки C и D – в одну точку C'

Радиус цилиндра – радиус окр-и, описанной около $A'B'C'$!

$\Delta A'B'C'$ – р/б, тк $AC = BC$, $AD = BD$

Наименьшая возможная длина стороны $A'C'$ a. Найдем a из неравенства Δ.

$\begin{cases} a < 4 + a \\ 4 < 2a \end{cases} \to a > 2$

$a^2 = AC^2 - (AA')^2$ по т. Пифагора

$a^2 = 25 - (AA')^2$

По теореме о площади ортогональной проекции $S_{A'B'C'} = S_{ABC}\cdot\cos\varphi = S_{ABD}\cdot\cos\gamma$

$0 \le \cos\gamma,\ \cos\varphi \le 1$

$S_{A'B'C'} = \sqrt{(2+a)\cdot2\cdot2\cdot(a-2)} = 2\sqrt{a^2-4}$

$S_{ABC} = 2\sqrt{21}$

$S_{ABD} = \sqrt{9\cdot5\cdot2\cdot2} = 6\sqrt{5}$

$2\sqrt{a^2-4} = 2\sqrt{2}\cdot\cos\varphi = 6\sqrt{5}\cos\gamma$

$\sqrt{a^2-4} = \sqrt{2}\cdot\cos\varphi = 3\sqrt{5}\cos\gamma$

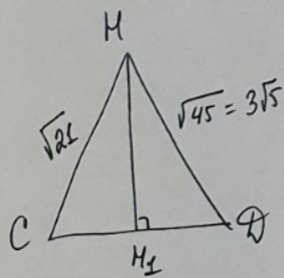
$1 \ge \cos\varphi = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cos\gamma$

$0 \le \cos\gamma \le \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$

Заметим, что радиус цилиндра зависит от высоты ΔHCD, где $CH \perp AB$ (соотв. $DH \perp AB$)

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{21}$, $HD = 3\sqrt{5}$ (по т. Пифагора)

Пусть высота HH_1. Ее проекция на плоскость основания $H'C$



$\frac{1}{2}\cdot A'B'\cdot CH' = S_{A'B'C'} \to CH' = \frac{2\sqrt{a^2-4}}{4}\cdot 2 = \sqrt{a^2-4}$

$S_{CHD} = \frac{1}{2}CH\cdot HD\cdot\sin\angle H = \frac{1}{2}\cdot3\sqrt{105}\cdot\sin\angle H$

$S_{CHD} = \frac{1}{2}HH_1\cdot CD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4}\cdot CD$

$HH_1 > 4 \to CD < \frac{S_{CHD}}{2}$

$\begin{cases} CD < 12 \text{ из неравенства } \Delta ACD \\ CD + 7 > 5 \\ CD + 5 > 7 \end{cases} \to CD > 2$

$|CD| \in (2; 12)$ без ограничения с радиусом цилиндра

Чем больше CD, тем меньше радиус цилиндра соответственно.

Чистовик

Вариант 22.

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;50) & (2) \end{cases}$

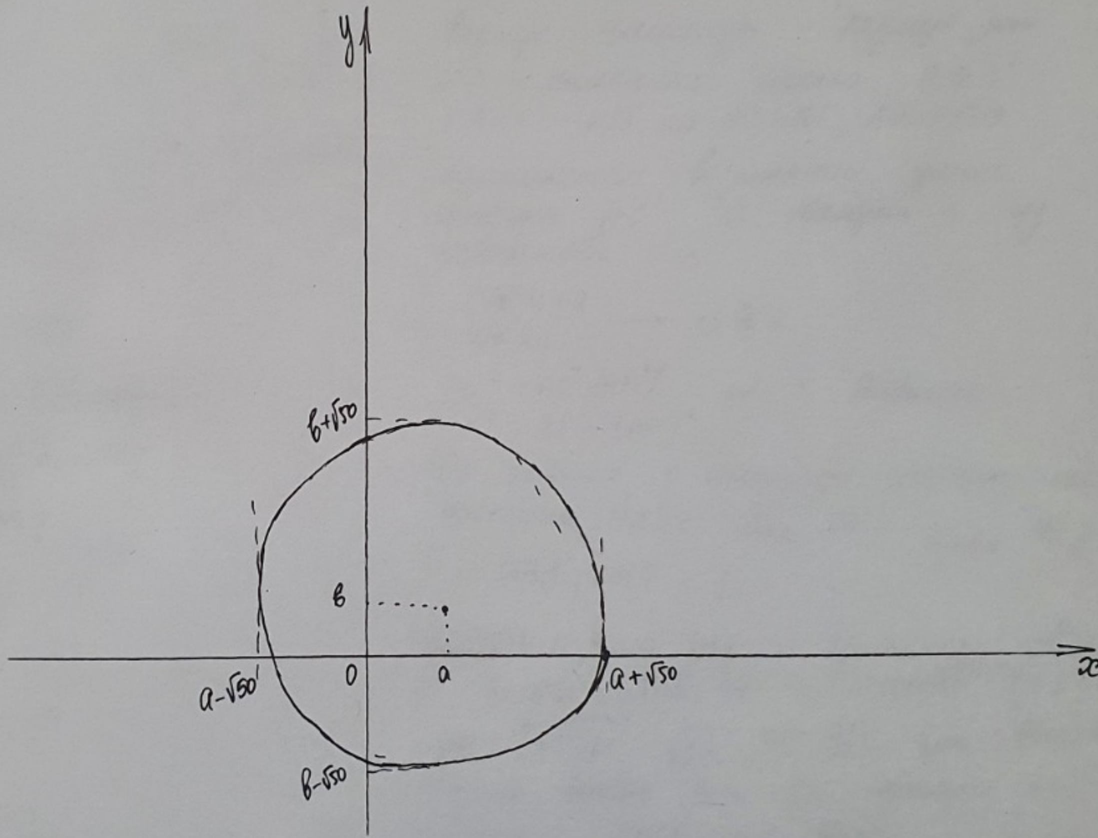
(1) Нерав-во (1) задает на плоскости XOY (в Декартовой системе координат) множество кругов с центром в точках $O_i\ (a;b)$ и радиусом $\sqrt{50}$

(2) Неравенство (2) – условие на координаты центров кругов

Заметим, что $a, b \ge 0$, так как $a^2+b^2 \ge 0\ \forall a$, $14a+2b<0$ при $a, b<0$

Неравенство (2) можно представить в виде:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 14a+2b \\ 14a+2b \le 50 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \\ 14a+2b > 50 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 & \text{- круг с центром в } (7;1),\ R=\sqrt{50} \\ 14a+2b \le 50 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 & \text{- круг с центром в } (0;0)\ R=\sqrt{50} \\ a > \frac{50-2b}{14} \end{cases} \end{array}\right.$$



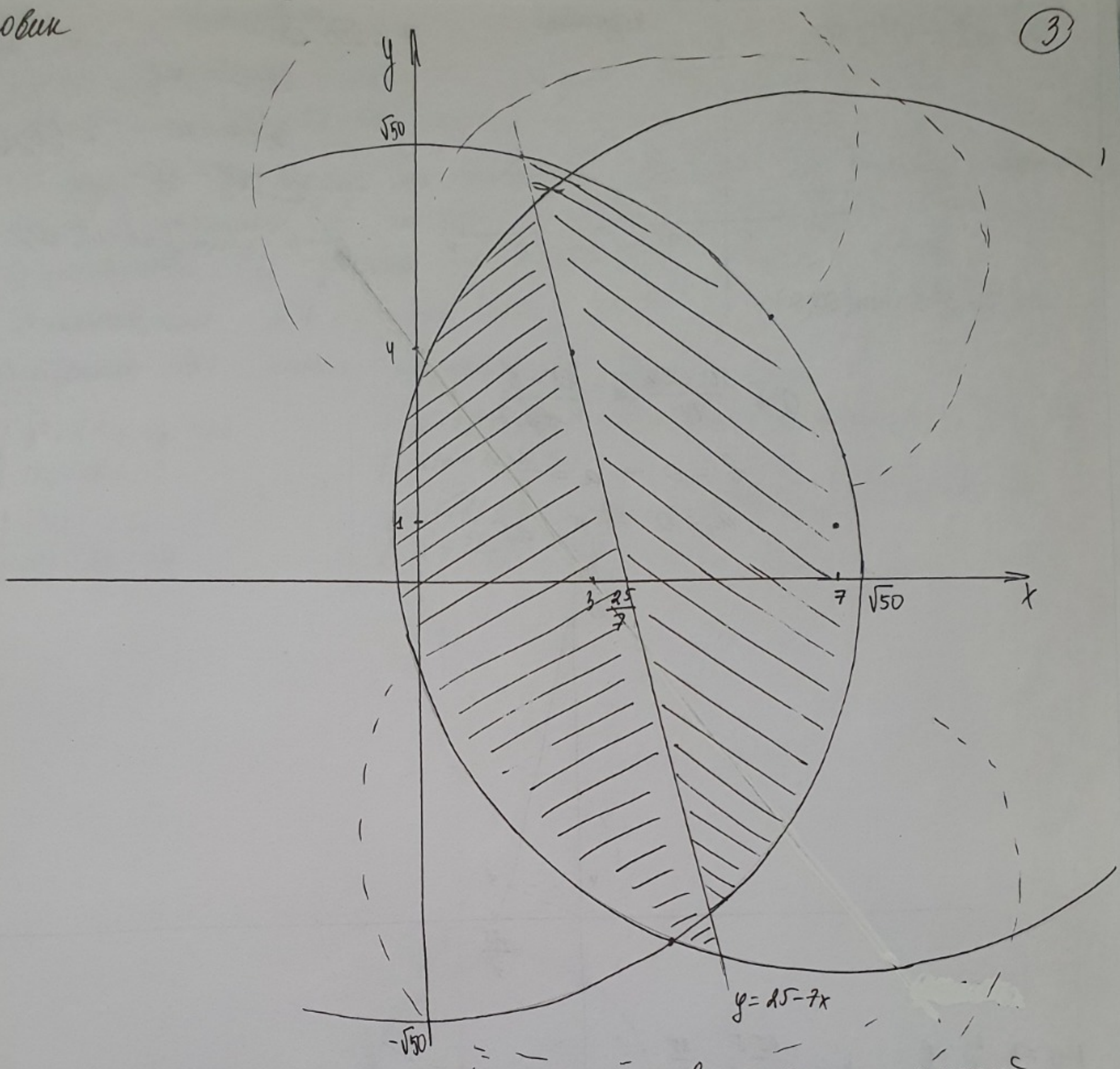
a, b – координаты точек на пл-и XOY => пусть (x_a, y_b) совпадает с (a, b)

[redacted] построим график прямой $14x = 50-2y$

$7x = 25-y$

$\begin{cases} y=0 \\ x=\frac{25}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=25 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

Чистовик



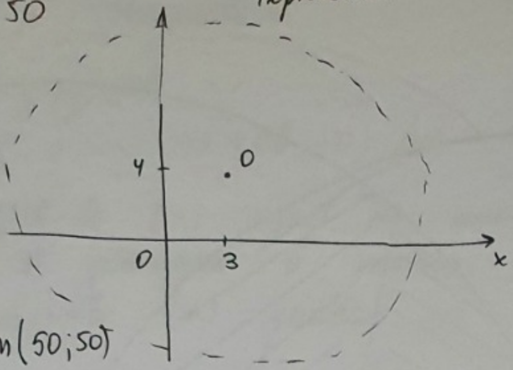
Заштрихованная область на графике - область возможных значений а и в.

Каждая точка из области на графике - центр круга с радиусом $\sqrt{50}$ (неравенство (1)) => фигура М - ~~множество~~ пересечение множества кругов одинакового радиуса

Покажем пунктиром несколько возможных кругов (масштаб нарушен, чтобы чертеж поместился на листе)

$(x-3)^2+(y-4)^2 \le 50$

Черновик



$4^2+3^2 \le \min(50;50)$

$7 < \sqrt{50} < 8$

$14 \times 3 = 42$

$36+9=45$

$\cancel{(6,4)}$

$36+16=51$

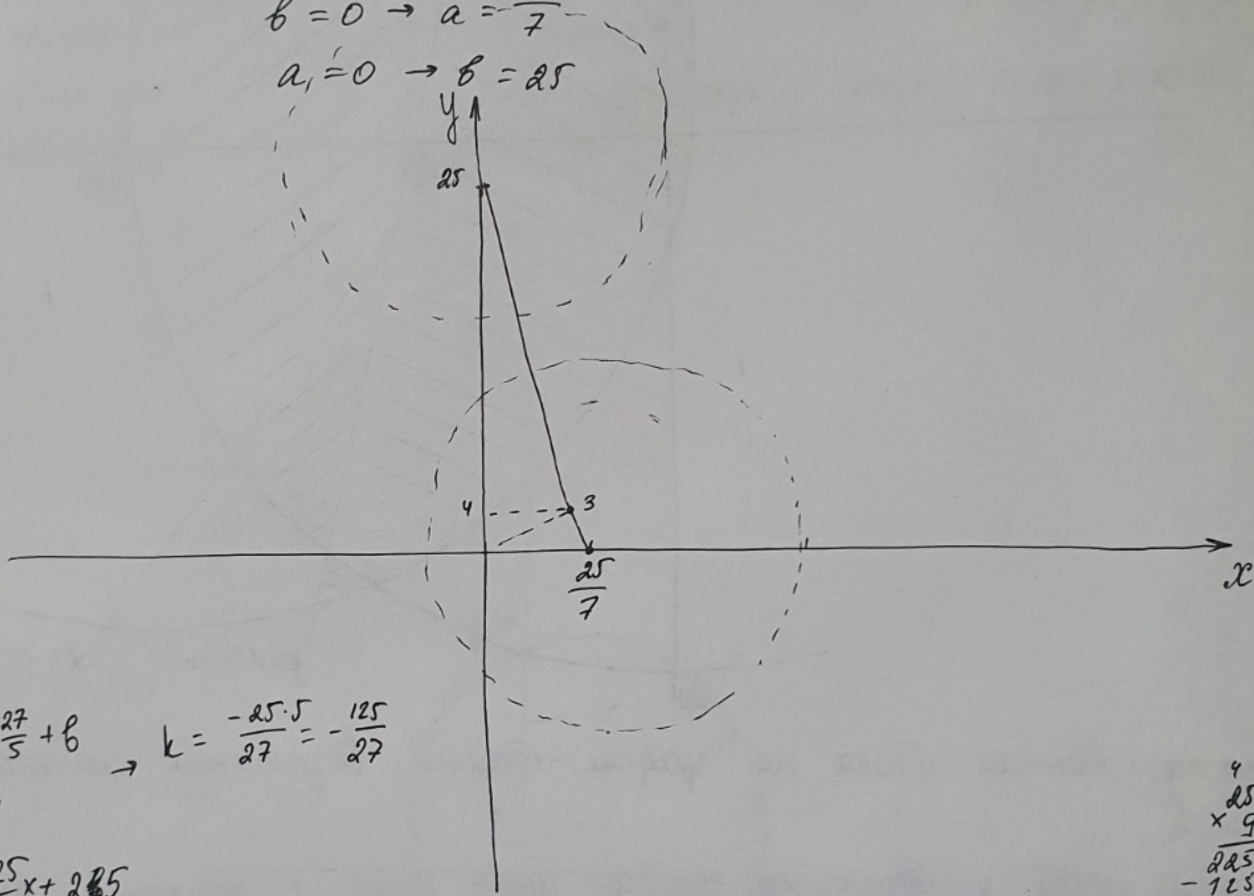
$a^2+b^2 \le \min(42+12;50)$

5)

$a = \frac{50-2b}{14} = \frac{25-b}{7}$

$b=0 \to a=\frac{25}{7}$

$a_1=0 \to b=25$



$\begin{cases} 0 = k\cdot\frac{27}{5}+b \\ 25 = b \end{cases} \to k = \frac{-25\cdot 5}{27} = -\frac{125}{27}$

$y = -\frac{125}{27}x + 25$

$x=3 \to y(3) = -\frac{125}{9}+25 = \frac{100}{9}$

$25 \times 9 = 225$

$225 - 125 = 100$

Вар 22 Чистовик: (1)

1. $S_{15} = \frac{a_1+a_{15}}{2} \cdot 15 = (a_1+7d)15$

$a_1, a_2, \dots$ - целые числа

d - разность прогрессии, $d>0$, d - целое, тк a_i - целые

1) $a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$(a_1+6d)(a_1+15d) > 15a_1+105d-24$

$a_1^2+21a_1d+90d^2 > 15a_1+105d-24 \quad (*)$

2) $a_{11} \cdot a_{12} < S+4$

$(a_1+10d)(a_1+11d) < S+4$

$a_1^2+21da_1+110d^2 < 15a_1+105d+4 \quad (**)$

Домножим $(**)$ на -1 и сложим $(*)$ и $(**)$

$a_1^2+21a_1d+90d^2-a_1^2-21a_1d-110d^2 > 15a_1+105d-24-15a_1-105d-4$

$20d^2 < 28$

$|d| < \frac{7}{5}$, d - целое положительное $\Rightarrow d=1$

Подставим $d=1$ в $(*)$ и $(**)$ чтобы найти a_1, которые удовлетворяют условию:

$(*)$: $a_1^2+21a_1+90 > 15a_1+105-24$

$a_1^2+6a_1+9>0$

$(a_1+3)^2>0$ верно для $\forall a_1$

$(**)$ $a_1^2+21a_1+110 < 15a_1+109$

$a_1^2+6a_1+1<0$

$D/4 = 9-1=8$

$a_1 = -3 \pm \sqrt{8} \qquad a_1 \in (-3-\sqrt{8}; -3+\sqrt{8})$

Проверим, какие целые значения a_1 лежат в полученном промежутке:

$-3-\sqrt{8} \overset{>}{\vee} -6$ $\qquad$ $-3-\sqrt{8} \overset{<}{\vee} -5$

$-\sqrt{8} \overset{>}{\vee} -3$ $\qquad$ $-\sqrt{8} \overset{<}{\vee} -2$

$\sqrt{8} \overset{<}{\wedge} 3$ $\qquad$ $\sqrt{8} \overset{>}{\wedge} 2$

$8<9$ $\qquad$ $8>4$

$\to a_{1\,min} = -5 \quad (\text{тк } -6 < a_{1\,min} \le -5)$

$-3+\sqrt{8} \overset{>}{\vee} -1$ $\qquad$ $-3+\sqrt{8} \overset{<}{\vee} 0$

$+\sqrt{8} \overset{>}{\vee} 2$ $\qquad$ $\sqrt{8}<3$

$8>4$ $\qquad$ $8<9$

$\to a_{1max} = -1 \quad (\text{тк } -1 < a_{1\,max} < 0)$

Ответ: $-5; -4; -3; -2; -1$.

21104506 (U802507 M1299375)

Черновик

$1.\ S = \frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15 = \frac{2a_1+14d}{2}\cdot 15 = (a_1+7d)15$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 7 \\ \hline 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 15 \\ 6 \\ \hline 90 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1,7 \\ 2 \\ \hline 3,4 \end{array}$

a_i - целые числа

1) $a_7 \cdot a_{16} > S - 24 = 15a_1 + 105d - 24$

$(a_1+6d)(a_1+15d) > 15a_1 + 105d - 24$

$a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24$

2) $a_{11}\cdot a_{12} < S + 4$

$(a_1+10d)(a_1+11d) < 15a_1 + 105d + 4$

$a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \\ 15a_1 + 105d - 24 < a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 \end{cases}$ +

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1d} + 110d^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{105d} - 24 < \cancel{15a_1} + \cancel{105d} + 4 + \cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1d} + 90d^2$

$20d^2 < 28$

$d^2 < \frac{7}{5}$

$|d| < \frac{7}{5}$

$a_1, \dots a_n$ - целые $\to d = 1$ (последовательность возрастающая)

1) $(a_1+6)(a_1+15) > 15a_1 + 105 - 24$

$a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$ $\qquad a \in R$

2) $(a_1+10)(a_1+11) < 15a + 109$

$a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a + 109$

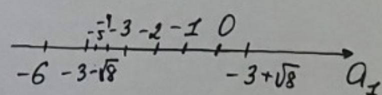
$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$D = 36 - 4 = 32$

$a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2}$

$a_1 = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2})$



a_1 - целые $\Rightarrow$

$-3-2\sqrt{2} \vee -6$ ($>$)
$3+2\sqrt{2} \wedge 6$ ($<$)
$2\sqrt{2} \wedge 3$

$-3-2\sqrt{2} \vee -7$ ($>$)
$3+2\sqrt{2} \wedge 7$ ($<$)
$2\sqrt{2} \wedge 4$

$-3-2\sqrt{2} \vee -5$ ($<$)
$3+2\sqrt{2} \wedge 5$ ($>$)
$8 \wedge 4$

$8 < 9$

$-3+2\sqrt{2} \vee 1$ ($<$)
$2\sqrt{2} \vee 4$
$8 < 16$

$-3+2\sqrt{2} \vee 2$
$2\sqrt{2} \vee 5$
$8 \vee 25$

Ответ: $a_1 = -5; -4; -3; -2; -1; 0.$

21104506 (U802507 M1299375)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104506**

ID профиля: **802507**

Вариант 22

4. $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 14 \\ НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} НОД(a,b,c) = 2^1 \cdot 7^1 \\ НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$

$a, b, c \geq НОД = 14$, a, b, c – целые числа

НОД – произведение простых делителей чисел в ~~наибольших~~ ~~возможных~~ наименьших степенях из встречающихся; НОК – произведение простых делителей наибольших степеней из встречающихся. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если числа представить в виде:

$$\begin{cases} a = 2^{a_2} \cdot 7^{a_7} \\ b = 2^{b_2} \cdot 7^{b_7} \\ c = 2^{c_2} \cdot 7^{c_7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min(a_2; b_2; c_2) = \min(a_7; b_7; c_7) = 1 \\ \max(a_2; b_2; c_2) = 17 \\ \max(a_7; b_7; c_7) = 18 \end{cases}$$

Выберем произвольным образом среди a_2, b_2, c_2 наименьшее (1) и наибольшее (17) – 6 вариантов

Аналогично 6 вариантов выбрать ~~наим~~ 1 и 18 из a_7, b_7, c_7

Всего вариантов выбрать наименьшие и наибольшие степени 12 (6+6)

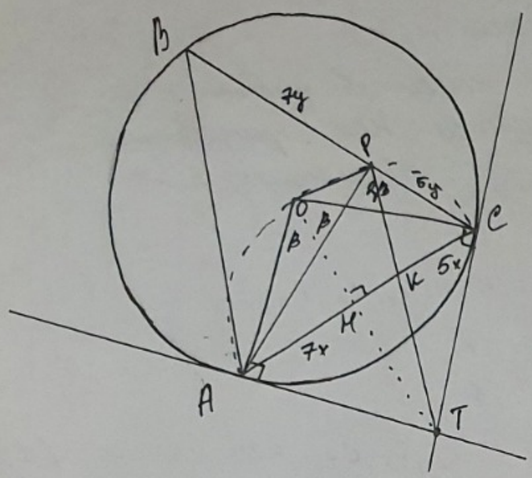
тогда третье число (пусть c_2 и c_7) могут принимать любые значения из промежутков: $\underbrace{1 \leq c_2 \leq 17; \quad 1 \leq c_7 \leq 18}_{17 \cdot 18 \text{ способов выбрать число}}$

Так как тройки упорядоченные, то всего вариантов:

$$3 \cdot (6 + 6 + 17 \cdot 18) = 3 \cdot (12 + 306) = 954$$

Ответ: 954.

5.



1) $S_{APK}=7$
$S_{CPK}=5$
высота в ΔAPK, ΔCPK, опущенная из точки P, одинаковая $\Rightarrow AK:KC=7:5$

2) $\angle ABC=\angle CAT=\angle ACT$ (вписанный и угол между касательной и хордой)
$AT=CT$ (касательные, проведенные из одной точки)

3) A, O, P, C лежат на окружности $\Rightarrow$
$\Rightarrow \square AOPC$ вписанный

4) $AO=OC$ (радиусы опис. около ΔABC окр-и), $AO\perp AT$, $CO\perp CT$ (радиусы в точки касания) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$
Пусть углы ΔABC соответственно α, β, γ,
тогда $\angle T=180^\circ-2\beta$

$\Delta AOCT$: $\angle A+\angle C=180^\circ \to \angle O+\angle T=180^\circ \to$
$\to \square AOCT$ – вписанный в окружность радиуса $OT/2$ $\to AH=HC$, $\angle AOH=\angle COH=$
$=\dfrac{180^\circ-\angle T}{2}=\beta$

5) $\angle AOC=\angle CPA$ (опир. на AC) $=2\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \square APCT$ – вписанный $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по св-ву хорд, пересек. в окр-и
$PK\cdot KT=AK\cdot KC$, $\angle CPT=\angle ACT=\beta$ (опир. на CT) $\Rightarrow$
(тк $\angle ABC=\angle TPC$ – соответственные)
$\Rightarrow AB \parallel PK \Rightarrow BP:PC=\dfrac{BK}{KA}=\dfrac{5}{7}\Rightarrow$
$\Rightarrow S_{ABC}=5\cdot\dfrac{144}{25}=\dfrac{144}{5}$
$\Delta ABC \sim \Delta PKC$ $k=12/5$

$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\to AC-?$
$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin\angle BCA$
$S_{PCK}=\frac{1}{2}PC\cdot CK\cdot\sin\angle BCA=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}BC\cdot\frac{5}{12}AC\cdot\sin\angle BCA=5$

Ответ: $\dfrac{144}{5}$

Вариант 22 Чистовик. (1)

5. Посчитаем произведение всех логарифмов на ОДЗ.

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{2}+1>0 \\ \frac{x}{2}+1\neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 0 \\ x>\frac{17}{14} \\ x\neq \frac{3}{2} \\ x>4 \\ x\neq \frac{14}{3} \end{cases} \rightarrow x>4,\ x\neq \frac{14}{3}$

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2\cdot \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_2\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\log_2\left(\frac{x}{2}+1\right)}\cdot 4\cdot\frac{\log_2\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\log_2\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\cdot 2\cdot\frac{\log_2\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\log_2\left(\frac{3x}{2}-6\right)}=4$$

Так как два числа равны a, а третье $(a-1)$, то

$a^2(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$a_1=2$

	1	-1	0	-4
2 ↓		+2	2	4
	1	1	2	0

$a^2+a+2=0$

$D<0 \rightarrow$ нет решений

Два логарифма равны 2, третий 1.

1) $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=1 \\ 4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=2 \\ 2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2 & (1) \\ \log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=\frac{1}{2} & (2) \\ \log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1 & (3) \end{cases}$

(3): $\frac{3x}{2}-6=\frac{x}{2}+1$

$\boxed{x=7}$

Подставим в (1) и (2): (1) $\log_{4,5}\left(\frac{49}{2}-\frac{17}{4}\right)=\log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{81}{4}\right)=2$

(2) $\log_{\frac{81}{4}}\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$

2) $\begin{cases} 4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=1 \\ \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2 \\ 2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{2})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=\frac{1}{4} & (1) \\ \log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=4 & (2) \\ \log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1 & (3) \end{cases}$

$x=7$, при $x=7$ (1) и (2) не равны $\frac{1}{4}$ и 4 → нет реш

3) $\begin{cases} 2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1 \\ 4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=2 \\ \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{1}{2} & (1) \\ \log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=\frac{1}{2} \\ \log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=4 \end{cases}$

21104506 (U802507 M1299376)

Черновик

5. $x=\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$; $y=\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$; $z=\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ $xyz=4$

ОДЗ: $\begin{cases}\frac{x}{2}+1\geq 0\\ \frac{x}{2}+1\neq 1\\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0\\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1\\ \frac{3x}{2}-6>0\\ \frac{3x}{2}-6\neq 1\end{cases}$ $\begin{cases}x>-2\\ x\neq 0\\ x>\frac{17}{14}\\ x\neq\frac{3}{2}\\ x>4\\ x\neq\frac{14}{3}\end{cases}$ $\longrightarrow$ $x>4,\ x\neq\frac{14}{3}$

1) $\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=22\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=8\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$\frac{1}{\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{x}{2}+1\right)}=8\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$49 \times 2 = 98$ $\frac{98-17}{4}$ $\frac{3\cdot 7}{2}-6=\frac{21-12}{2}$

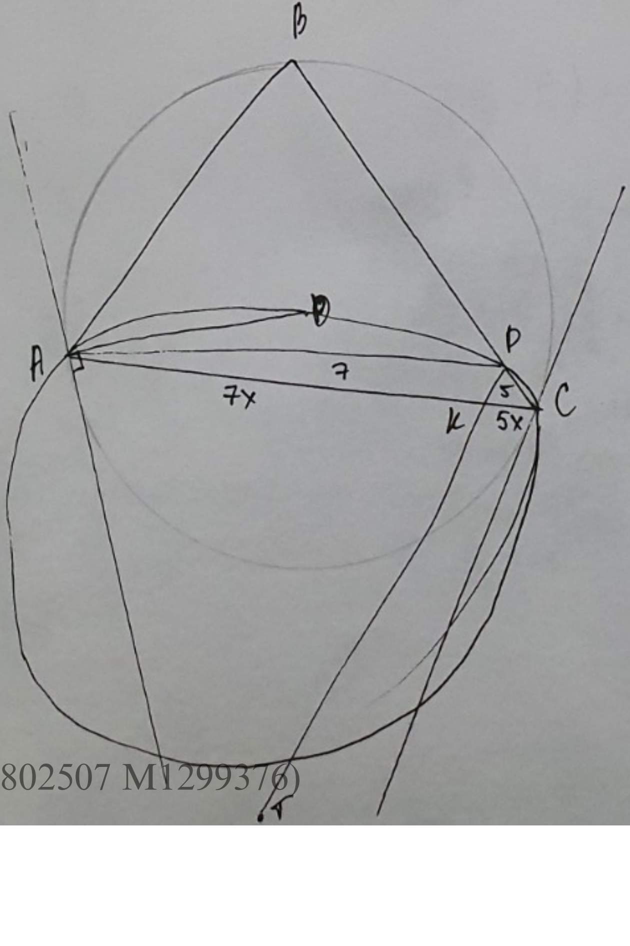
$\frac{x}{2}+1=\sqrt{\frac{3x}{2}-6}$ $\uparrow 2$ (на ОДЗ)

$\frac{x^2}{4}+\frac{2x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6$

$\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}+7=0 \quad |\cdot 4$

$x^2-6x+28=0$

$D=36-28\cdot 4<0$



S_{ABC} –?

$(a_2\ 3\ b_2\ 2\ c_2\ 17)\cdot 3$

$(a_7\ 3\ b_7\ 2\ c_7\ 18)\cdot 3$

Черновик

$a_1^{1}{}_{,1,17}\ b_1^{17}{}_{,}\quad c_{1\ 17}$ ~~[illegible]~~ 6

$a_2 \quad b_2 \quad c_2$

$\frac{\cancel{17}x}{2}-\frac{17}{4}=1 \rightarrow \cancel{17}x=2+\frac{17}{2}$

$7x=\frac{21}{2}$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2\cdot\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_2\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\log_2\left(\frac{x}{2}+1\right)}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{\log_2\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\log_2\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\cdot 2\cdot\frac{\log_2\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\log_2\left(\frac{3x}{2}-6\right)}=4$$

два числа a, третье $(a-1)$

$a^2(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$a=2\rightarrow 8-4-4=0$

a^3-a^2-4

	1	-1	0	-4
2	↓	2	2	4
	1	1	2	0

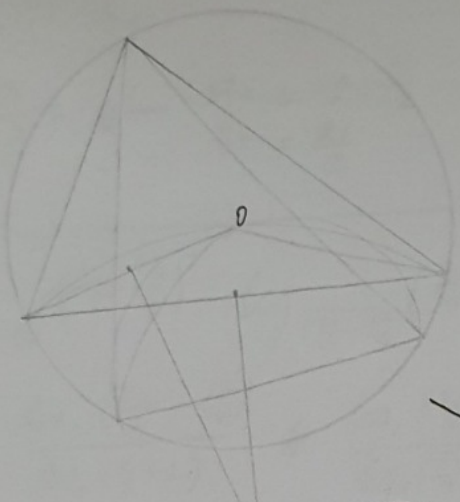
$a^2+a+2=0$

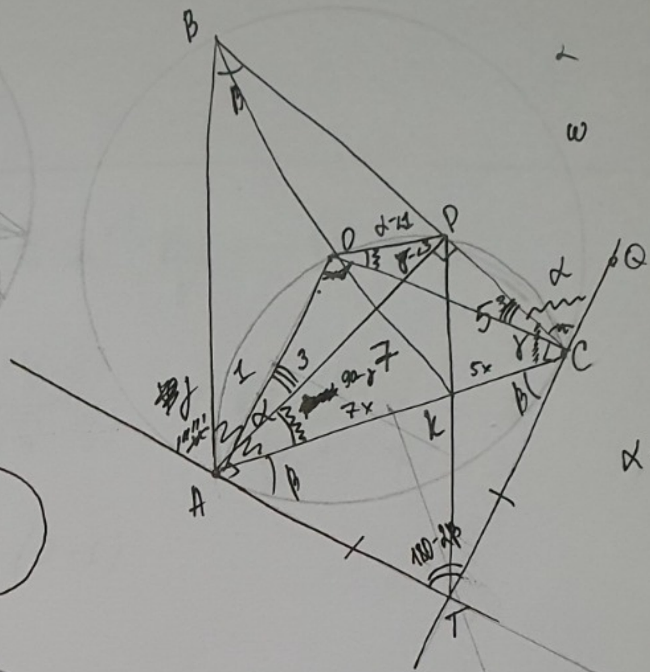
$D<0=1-8<0\ \rightarrow$ решений нет

Рассмотрим случаи:

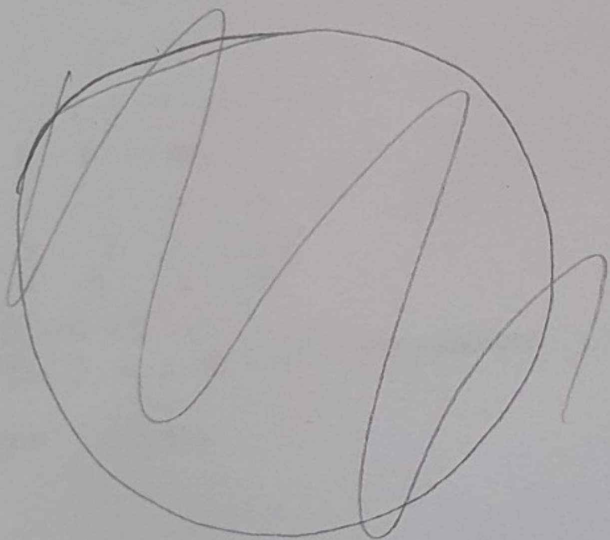
21104506 (U802507 M1299376)

Черновик





$\alpha - \angle 1 = \gamma = 3$



$\angle B = \frac{\breve{AC}}{2} = \cancel{360} \; \angle CAT = \angle ACT$

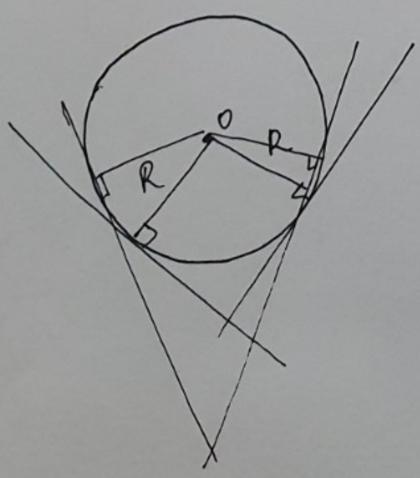
$\gamma + \angle O = 180^\circ = \alpha - \angle 1 + \angle OPC$

$\angle O = \alpha + \beta$

$S_{ABC} = 12$

AOCT – прямоугольник $\rightarrow \beta = 45^\circ$

$AO = OC$



Черновик

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 14 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} НОД(a;b;c) = 2^1 \cdot 7^1 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$

Т.к. a, b, c – натуральные числа и их НОК и НОД равны фиксированным значениям, то следует, что все числа (a, b и c) можно разложить на простые множители 2 и 7 в разных ~~не~~ степенях НОД должен делить ~~на~~ все числа (a, b и c) => a, b, c ≥ НОД

Представим числа в виде $\begin{cases} a = 2^{a_1} 7^{a_2} \\ b = 2^{b_1} 7^{b_2} \\ c = 2^{c_1} 7^{c_2} \end{cases}$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – натуральные числа

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 2^{min} \cdot 7^{min} \\ НОК(a;b;c) = 2^{max} \cdot 7^{max} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le a_1, b_1, c_1 \le 17 \\ 1 \le a_2, b_2, c_2 \le 18 \end{cases}$

Тк все числа состоят из одинаковых простых множителей и НОД = 14 => => хотя бы в одном из чисел 2 встречается в 1 степени, и хотя бы в одном 7 встречается в 1 степени

$\begin{cases} min(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ max(a_1, b_1, c_1) = 17 \\ min(a_2, b_2, c_2) = 1 \\ max(a_2, b_2, c_2) = 18 \end{cases}$

Рассмотрим несколько вариантов:

1) Одно из чисел $a_1, b_1, c_1 = 1$ – 3 варианта (3 числа)
Одно из чисел $a_2, b_2, c_2 = 1$ – 3 варианта
Одно из чисел $a_1, b_1 c_1 = 17$ – 2 варианта (одно из чисел не равных 1)
Одно из чисел $a_2, b_2, c_2 = 18$ – 2 варианта

9 вариантов

4 вар.

Всего вариантов из каждой тройки выбрать по 2 числа, равные 1 и 17 и 1 и 18 соответственно равно 12 (2·3·2), тогда третье число $2^k \cdot 7^l$, где $\underbrace{1 \le k \le 17}_{17}$, $\underbrace{1 \le l \le 18}_{18}$

a b c 3·2

Всего вариантов: $(12 + 17 \cdot 18) \cdot 3 = 318 \cdot 3 = 954$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 18 \\ \hline 136 \\ 17 \\ \hline 306 \\ +12 \\ \hline 318 \end{array}$

21104506 (U802507 M1299376)

Чистовик

②

(1) $\log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{1}{2}$

$\frac{x}{2}+1=\sqrt{\frac{3x}{2}-6}$ ↑2 (возможно без доп. ограничений на ОДЗ)

$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{3x}{2}-6$

$\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+7=0 \quad |\cdot 4$

$x^2-2x+28=0$

$D=4-28\cdot 4<0$

нет решений

=> 3) случай не имеет решений

Ответ: $\underline{x=7}$