Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104486**

ID профиля: **212346**

Вариант 22

Чистовик

1.

$a_1+a_2+\ldots+a_{15}=S$, $a_i\in\mathbb{Z}$

Пусть $a_2=a_1+k$; $a_3=a_2+k$ и т.д.

Тогда $S=a_1+(a_1+k)+\ldots+(a_1+14k)=15a_1+\frac{14\cdot15}{2}k=15a_1+105k=15(a_1+7k)$

$a_7=a_1+6k$; $a_{16}=a_1+15k$

$a_7a_{16}=(a_1+6k)(a_1+15k)=a_1^2+21a_1k+90k^2$

По усл., $a_7a_{16}>S-24 \Leftrightarrow \underline{a_1^2+21a_1k+90k^2>15a_1+105k-24}$ (1)

$a_{11}=a_1+10k$, $a_{12}=a_1+11k$

$a_{11}a_{12}=(a_1+10k)(a_1+11k)=a_1^2+21a_1k+110k^2$

По усл., $a_{11}a_{12}<S+4 \Leftrightarrow \underline{a_1^2+21a_1k+110k^2<15a_1+105k+4}$ (2)

Заметим, что $k>0$ (прогрессия возр.) $\Rightarrow 20k^2=(a_1^2+21a_1k+110k^2)-(a_1^2+21a_1k+90k^2)>0 \Leftrightarrow a_{11}a_{12}>a_7a_{16}$. Сл-но, (1) и (2) можно рассматривать отдельно

~~(1) $a_1^2+(21k-15)a_1+(90k^2-105k+24)>0$~~

~~$a_7a_{16}>15a_8-24$~~ ~~$a_7=a_8-k$, $a_{16}=a_8+8k$~~

~~$a_{11}a_{12}<15a_8+4$~~ ~~$a_{11}=a_8+3k$, $a_{12}=a_8+4k$~~

~~$(a_8-k)(a_8+8k)>15a_8-24$~~

~~$(a_8+3k)(a_8+4k)<15a_8+4$~~

(1)+(2): $(15a_1+105k-24)+\underbrace{(a_1^2+21a_1k+110k^2)<(a_1^2+21a_1k}_{<}+90k^2)+\overbrace{(15a_1+105k+4)}^{<} \Leftrightarrow$

$20k^2<28 \Rightarrow k^2<\frac{28}{20}=\frac{7}{5}$

Т.к. $a_i\in\mathbb{Z} \Rightarrow k\in\mathbb{Z}$, $k>0 \Rightarrow k=1$

Тогда $S=15a_1+105$

(1) $a_1^2+21a_1+90>15a_1+105-24 \Leftrightarrow a_1^2+6a_1+9>0 \Rightarrow (a_1+3)^2>0 \Rightarrow \underline{\underline{a_1\neq-3}}$

(2) $a_1^2+21a_1+110<15a_1+105+4 \Leftrightarrow a_1^2+6a_1+1<0$

$D=36-4=32 \Rightarrow a_1=\frac{-6\pm4\sqrt2}{2}=-3\pm2\sqrt2$

$a_1\in\mathbb{Z} \Rightarrow a_1=[-5;-4;-2;-1]$

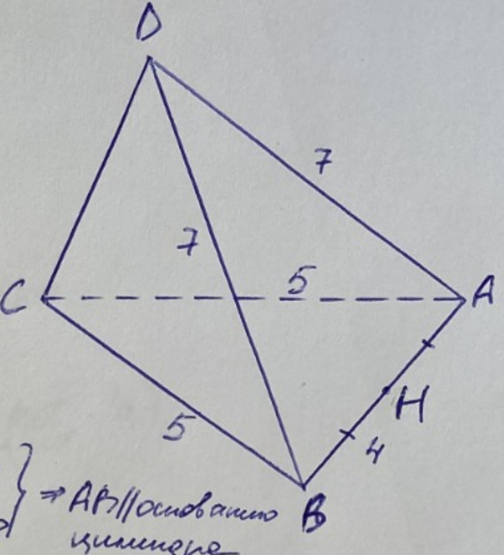
Ответ: $a_1=[-5;-4;-2;-1]$

21104486 (U212346 M1301950)

Чистовик

2. $ABCD$ – тетр.

$AB = 4$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 7$



∡ $ABCD$:

в $\triangle ABC$ $AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$ – р/б с осн. AB

пусть CH – выс. к AB, т. $H \in AB$ } $\Rightarrow CH$ – мед., т. H – сер. AB

∡ $\triangle ABC$: $AD = BD \Rightarrow \triangle ABC$ – р/б с осн. AB, т. H – сер. AB } $\Rightarrow DH$ – мед. и выс.

$CH \perp AB$, $DH \perp AB \Rightarrow (CDH) \perp AB \Rightarrow$ т.к. $CD \subset (CDH) \Rightarrow CD \perp AB$

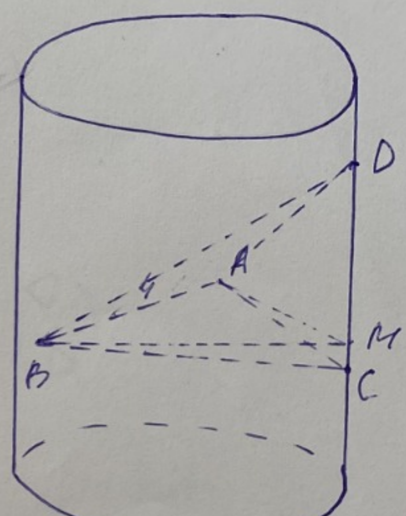
в цилиндре $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow CD \perp$ основанию } $\Rightarrow AB \parallel$ основанию цилиндра

т.к. $AB \parallel$ осн. и внутри цилиндра, то мин. рад. он такой, что AB – диаметр $\Rightarrow r_{min} = \frac{AB}{2} = 2$

в $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ $BC = AC = 5$, $BD = AD = 7$, CD – общ. $\Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD$

пусть т. M: BM – выс. к CD, тогда AM – тоже выс. к CD по пр-ку

$BM \perp CD$, $AB \perp CD \Rightarrow (ABM) \perp CD \Rightarrow \triangle ABM$ – впис. в гориз. сеч. цил.

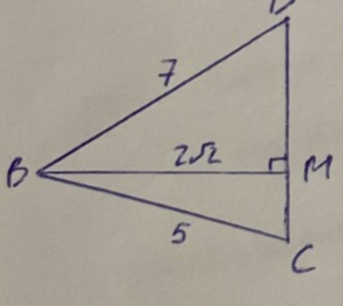


AB – диам., т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$ $BM = AM$, $\angle AMB = 90°$

$AB = 4 \Rightarrow BM = AM = 2\sqrt{2}$

Теперь ∡ $\triangle BCD$

① т. M лежит м/у т. C и D



BM – выс. $\Rightarrow \angle BMD = \angle BMC = 90°$

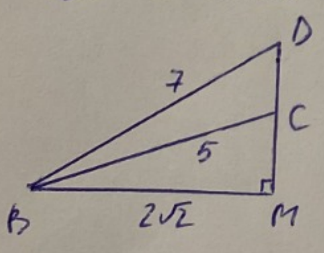
по теор. Пиф.:

в $\triangle BMD$ $DM^2 + BM^2 = BD^2 \Rightarrow DM = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

в $\triangle BMC$ $BM^2 + CM^2 = BC^2 \Rightarrow CM = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

$CD = DM + CM = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

② т. C лежит м/у т. D и M (т.к. $BD > BC$, то т. D м/у т. C и M лежать не может)



$\angle BMD = \angle BMC = 90°$

по теор. Пиф.:

в $\triangle BCM$ $CM^2 + BM^2 = BC^2 \Rightarrow CM = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

в $\triangle BDM$ $BM^2 + DM^2 = BD^2 \Rightarrow DM = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

$CM = DM - CD \Rightarrow CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

Ответ: $CD = \sqrt{41} + \sqrt{17}$ либо $CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

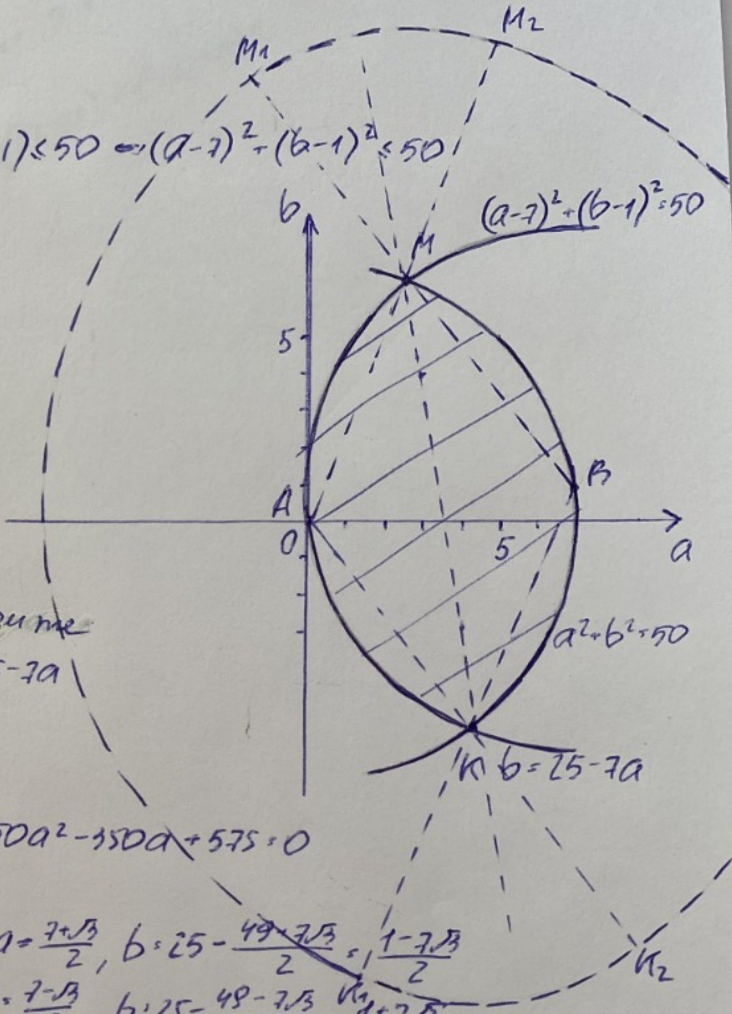
Чистовик

3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50 & ①\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,50) & ②\end{cases}$$

① Δ 2 случая:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}14a+2b<50\Leftrightarrow 7a+b<25\Rightarrow b<25-7a\\ a^2+b^2\le 14a+2b\Leftrightarrow (a^2-14a+49)+(b^2-2b+1)\le 50\Leftrightarrow (a-7)^2+(b-1)^2\le 50\end{cases}\\ \begin{cases}14a+2b\ge 50\Leftrightarrow b\ge 25-7a\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}\end{array}\right.$$



$t_1: (a-7)^2+(b-1)^2=50$, $t_2: a^2+b^2=50$

Найдём точки пересеч.:

$$\begin{cases}a^2+b^2=50\\ a^2-14a+49+b^2-2b+1=a^2+b^2\Rightarrow 50=2b+14a\end{cases}$$

$7a+b=25\Rightarrow b=25-7a$ — след-но, $t_1\cap t_2$ в том же месте, в котором пересекает функцию $b=25-7a$

~~① $(x-a)^2+(y-b)^2\le 50 \Leftrightarrow (a-x)^2+(b-y)^2\le 50$~~

$$\begin{cases}a^2+b^2=50\\ b=25-7a\end{cases}\Rightarrow 625+49a^2-350a+a^2=50\Rightarrow 50a^2-350a+575=0$$

$2a^2-14a+23=0$

$D=196-8\cdot 23=12$ (184) $\Rightarrow a=\frac{14\pm 2\sqrt3}{4}=\frac{7\pm\sqrt3}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=\frac{7+\sqrt3}{2},\ b=25-\frac{49+7\sqrt3}{2}=\frac{1-7\sqrt3}{2}\\ a=\frac{7-\sqrt3}{2},\ b=25-\frac{49-7\sqrt3}{2}=\frac{1+7\sqrt3}{2}\end{array}\right.$

① $(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\Leftrightarrow (a-x)^2+(b-y)^2\le 50$ — ур-е окр. с рад. $\sqrt{50}=5\sqrt2$ и центром в т. $(x;y)$

У той окружности должно быть пересеч. с закр. фигурой на графике

Пусть т. $A(0;0)$ — ц. окр. t_2, т. $B(7;1)$ — ц. окр. t_1

т. x и y могут располагаться не далее чем на расстоянии $5\sqrt2$ от закрашенной фигуры, т.к. $(x;y)$ — ц. окр-у функции $(a-x)^2+(b-y)^2\le 50$. Построим их ГМТ (где может быть центр $(x;y)$)

Δ t_1 с окр. ц. в т. B. Пусть т. M, K — т. пер. t_1 и t_2. Тогда т. M_1: т. M — серед. BM_1; т. K_1: т. K — серед. BK_1. Сегмент с рад. $2\sqrt{50}$ и концами в отр. BM_1, BK_1 — нужная часть.

Аналогично, т. M_2, K_2: $AM_2=AK_2=2\sqrt{50}$, где т. A — ц. окр. t_2. Тогда Δ т. M, K. MM_1M_2, KK_1K_2 — сегменты с рад. $5\sqrt2$, и в итоге у нас получается связная фигура — ГМТ x и y.

Чистовик

7. т. $M\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+7\sqrt{3}}{2}\right)$ и т. $K\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-7\sqrt{3}}{2}\right)$

$KM = \sqrt{\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}-\frac{7-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+7\sqrt{3}}{2}-\frac{1-7\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3+49\cdot 3} = \sqrt{50\cdot 3} = 5\sqrt{6}$

в $\triangle BKM$ $KM = 5\sqrt{6}$, $BM = BK = 5\sqrt{2}$

тогда по теор. кос.

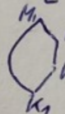
$KM^2 = BM^2 + BK^2 - 2BM\cdot BK\cdot \cos MBK \Rightarrow 25\cdot 6 = 25\cdot 2 + 25\cdot 2 - 2\cdot 25\cdot 2\cdot \cos MBK \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = -2\cos MBK \Rightarrow \cos MBK = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle MBK = 120°$ (тупой угол)

Сл-но, площадь сегмента M_1BK_1 – $1/3$ площади окр. с рад. $2\sqrt{50}$. $\left(\frac{120°}{360°} = 1/3\right)$

$S_{M_1BK_1} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{50})^2 = \frac{4\cdot 50\pi}{3} = \frac{200\pi}{3}$

$S_{MBK} = \frac{1}{2}\cdot BM\cdot BK\cdot \sin MBK = \frac{1}{2}(\sqrt{50})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$

Значит, площадь M_1MKK_1 

равна $\frac{200\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$

Аналогично, площадь M_2MKK_2 равна $\frac{200\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$

$\angle MBK = 120° \Rightarrow \angle KMB = \angle MKB = 30°$

$\left.AM = BM \Rightarrow \angle AMK = \angle BMK = 30°\right\} \Rightarrow \angle AMB = 60° = \angle M_1MM_2$ – верт.

Значит, площадь сегмента $MM_1M_2 = \frac{60}{360}\cdot\pi(\sqrt{50})^2 = \frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 50 = \frac{25\pi}{3}$ 

Площ. сегм. K_1KK_2 тоже $\frac{25\pi}{3}$.

Значит, площадь ГМТ (фигуры Ф) равна $\frac{50\pi}{3} + \frac{400\pi}{3} - 25\sqrt{3} = 150\pi - 25\sqrt{3}$

Ответ: $150\pi - 25\sqrt{3}$

Черновик

$15a_1 + \frac{\cancel{14}^{7} \cdot 15}{\cancel{2}} k = 15a_1 + 105k = S$ $105 - 24 = 101 - 20 = 81$

$15a_1 + 105 = S$

$(a_1+6)(a_1+15) > 15a_1 + 81$

$a_1^2 + \cancel{21a_1}^{6a_1} + \cancel{90}^{9} > \cancel{15a_1} + \cancel{81} \Rightarrow a_1 \neq -3$

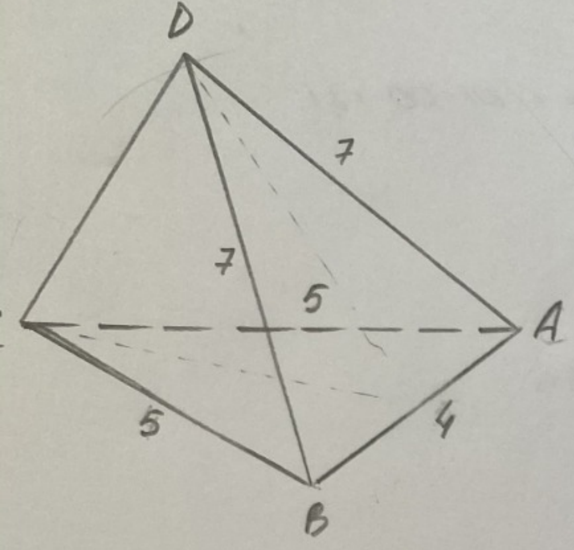
$\cancel{(a_1 + 10k)(a_1}$ $(a_1+10)(a_1+11) < 15a_1 + 109$

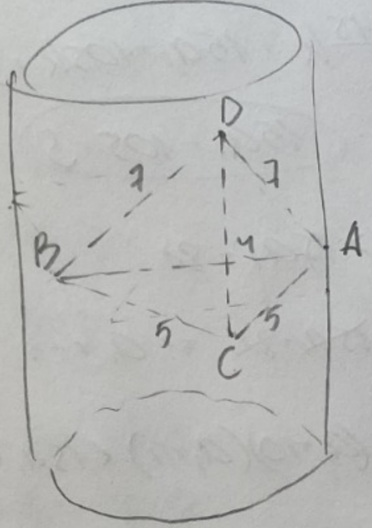
$S = 105 - 75 = 30$

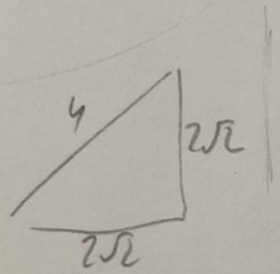
$1 \cdot 10 > 81 - 76$

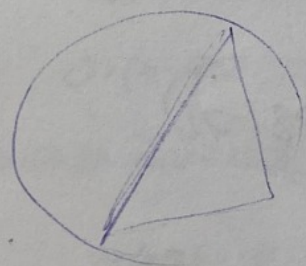
21104486 (U212346 M1301950)

Черновик









$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 8 \\ \hline 184 \end{array}$$

$a^2+b^2=50$

$b=25-7a \Rightarrow b^2=625+49a^2-350a$

$50a^2-350a+575=0$

$2a^2-14a+23=0$

$D=196-184$

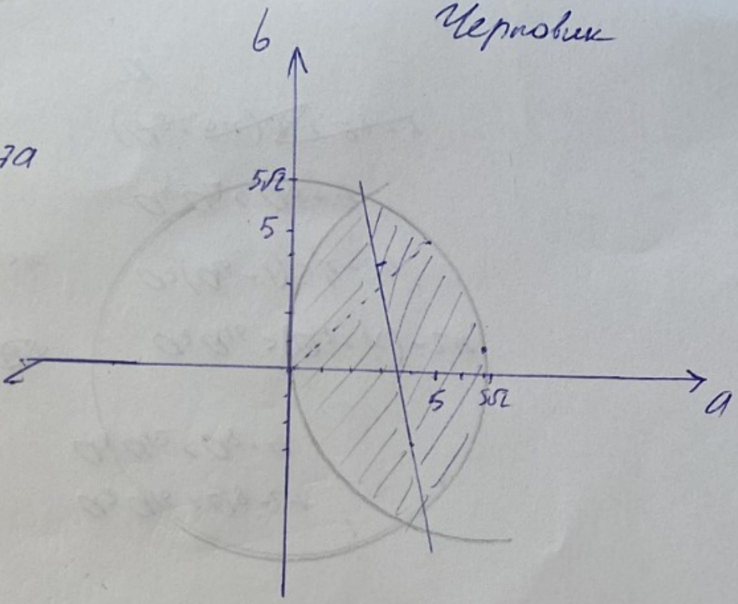
$23\cdot 8=160+24$

Черновик

$\left[\begin{array}{l}\cancel{14a+2b<50}\\ \cancel{14a+2b\geq 50}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}14a+2b<50\\ a^2+b^2\leq 14a+2b\end{cases}\\ \begin{cases}14a+2b\geq 50 \Rightarrow b\geq 25-7a\\ a^2+b^2\leq 50\end{cases}\end{array}\right.$

$2a+b\geq 15$



$(a^2-14a+49)+(b^2-2b+1)\leq 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2\leq 50$

$(a-x)^2+(b-y)^2\leq 50$

$a_8 \to a_1$

$a_{16} \to a_3$

$S=\frac{a_1+a_1+14}{2}\cdot 15=$

$=\cancel{a_1\sqrt{14}\cdot 15}$

$a_7=a_1+6;\ a_{16}=a_1+15$

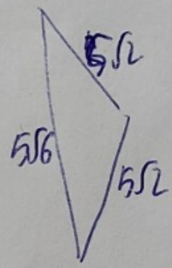
$(7\sqrt{3})^2+3=$

$=49\cdot 3$

$(7\sqrt{3})^2=49\sqrt{3}=$

$\cancel{\frac{2a_1+14}{2}\cdot 15}=$

$(a_1+6)(a_1+15)>15$



$a_7a_{16}>15a_8-24$

$a_{11}a_{12}<15a_8+4$

$\cancel{(a_8-5k)(a_8+8k)>15a}$

$5\cdot 105$

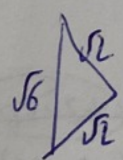
$\frac{a_1+a_n}{2}$

$=\frac{(-2)+12}{2}\cdot 15=$

$-12\cdot 15$

$2\sqrt{2}$ 8

$2\sqrt{2}<3$



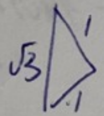
52

$4\cdot 13>105-24$

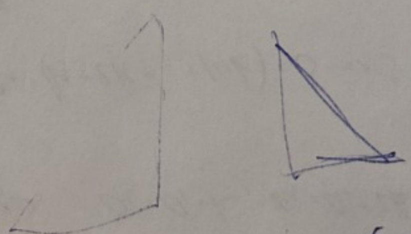
-2

52

$4\cdot 13\geq 81-30$



-2 -1



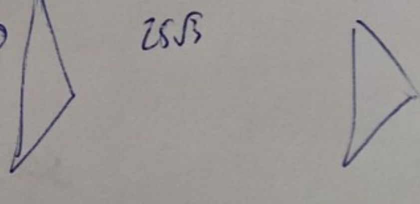
$\cancel{3=\sqrt{51}-2\cos}$

$3=1+1-2\cdot\cos MBK$

$\frac{\sqrt{3}}{2}5\sqrt{50}$

$\sin 120=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$25\sqrt{3}$



21104486 (U212346 M1301950)

Черновик

Черновик

Черновик

$\frac{\cancel{14}^{7}\cdot 15}{\cancel{2}} = 105$

$\frac{n_1+n_{-1}}{2}\cdot k$

$\cancel{\frac{a_1+a_{15}}{2}}$

$\frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15 = S$

Пусть $a_2 = a_1+k$, $a_3 = a_1+2k$ и т.д.

$15(a_1+a_{15}) = 2S$

$15a_1 + (k+2k+\ldots+14k) = S \Rightarrow S = 15a_1+105k$

$a_7 a_{16} > S-24$

$a_7 a$

$a_{11} a_{12} < S+4$

$a_1^2 + 6a_1k + 15a_1k + 90k^2$

$a_{11}a_{12} - 4 < a_8 < a_7 a_{16} + 24$

$(a_1+6k)(a_1+15k) > S-24 =$

$= 15a_1 + 105k - 24$

$a_7 a_{16} > a_8 - 24$

$15(a_1+7k) - 24$

$\cancel{15a_7 - 24}$

$a_{11} a_{12} < a_8 + 4$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1k + 90k^2 > 15a_1 + 105k - 24 \\ a_1^2 + 21a_1k + 110k^2 < 15a_1 + 105k + 4 \end{cases}$$

$15a_1 + 105k - 24 < a_1^2 + 21a_1k + 90k^2 < a_1^2 + 21a_1k + 110k^2 < 15a_1 + 105k + 4 \quad | +24 - 15a_1 - 105k$

$\underbrace{0 < a_1^2 + 21a_1k + 90k^2 + 24 - 15a_1 - 105k}$ $< \underbrace{a_1^2 + 21a_1k + 110k^2 + 24 - 15a_1 - 105k < 28}$

$a_1^2 + 90k^2 + 21a_1k + 24 - 15a_1 - 105k$

$a_1^2 + 21a_1k + 110k^2 + 24 - 15a_1 - 105k - 28 < 0 < a_1^2 + 21a_1k + 90k^2 + 24 - 15a_1 - 105k$

$110k^2 + (21a - 105)k + (a_1^2 - 15a_1 - 4) < 0$

$D =$

$a_7 a_{16} > a_8 - 24$

$\cancel{a_7 a_{16} > a_8 - 24}$

$a_{11} a_{12} < a_8 + 4$

$a_7 a_{16} > (a_7 + k) - 24$

$a_7(a_{16} - 1) + 24 > k$

$a_7(a_{16} - 1) > k - 24$

$a_{11} a_{12} < a_8 + 4$

$\cancel{(a_8 + 3k) a_{12} < a_8 + 4}$

a_1

21104486 (U212346 M1301950)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104486**

ID профиля: **212346**

Вариант 22

Чистовик

5. $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$ ①

$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$ ②

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ ③

ОДЗ: $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2>0 \Rightarrow \frac{x}{2}\neq -1 \Rightarrow x\neq -2$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\neq 1 \Rightarrow \begin{cases}0{,}5x+1\neq 1\\ 0{,}5x+1\neq -1\end{cases} \Rightarrow x\neq \{0;-4\}$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \Rightarrow \frac{7x}{2}>\frac{17}{4} \Rightarrow x>\frac{17}{14}$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \Rightarrow x\neq \frac{3}{2}$

$\frac{3x}{2}-6>0 \Rightarrow x>4$

$\frac{3x}{2}-6\neq 1 \Rightarrow x\neq \frac{14}{3}$ Сл-но, $x\in\left(4;\frac{14}{3}\right)\cup\left(\frac{14}{3};+\infty\right)$

① $=\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

② $=2\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

③ $=2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

Пусть $\frac{x}{2}+1=a$; $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$, $\frac{3x}{2}-6=c$

Сравним числа a,b,c:

$a \vee c \Leftrightarrow \frac{x}{2}+1 \vee \frac{3x}{2}-6 \Leftrightarrow 7\vee x$

$b\vee c \Leftrightarrow \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \vee \frac{3x}{2}-6 \Leftrightarrow 2x \vee -\frac{7}{4}$. Т.к. $x>4 \Rightarrow 2x>8 \Rightarrow 2x>-\frac{7}{4} \Rightarrow b>c$

$a\vee b \Leftrightarrow \frac{x}{2}+1 \vee \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \Leftrightarrow \frac{21}{4}\vee 3x$. Т.к. $x>4 \Rightarrow 3x>12>\frac{21}{4} \Rightarrow a<b$

Сл-но, b – наиб. Также $\frac{x}{2}+1>\frac{4}{2}+1=3 \Rightarrow a>3 \Rightarrow b>3$

Тогда ① $=\frac{1}{2}\log_a b$; ② $=4\log_b c$; ③ $=2\log_c a$

I сл.: ① = ② = ③ + 1

$\frac{1}{2}\log_a b=4\log_b c=2\log_c a+\overset{\log_c c}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a b=4\log_b c=\log_c a^2c$

Пусть $t=\log_b c \Rightarrow c=b^t$

$4t=\frac{1}{2}\log_a b \Rightarrow \log_a b=8t \Rightarrow b=a^{8t}\ \Big\} \Rightarrow c=a^{8t^2}$

$\log_c a^2c=4t \Leftrightarrow 2\log_c a+1=4t \Rightarrow \log_c a=\frac{4t-1}{2} \Rightarrow \log_a c=\frac{2}{4t-1}=8t^2$

$t\neq 1/4$; $2=32t^3-8t^2 \Rightarrow 16t^3-4t^2-1=0$

	16	-4	0	-1
1/2	16	4	2	0

$(t-1/2)(16t^2+4t+2)=0 \Leftrightarrow (t-1/2)(\underbrace{8t^2+2t+1}_{D<0})=0 \Rightarrow t=1/2$

$c=b^{1/2} \Rightarrow b=c^2 \Rightarrow \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=\frac{9x^2}{4}+36-18x \Rightarrow 9x^2-86x+161=0$

$D=7396-36\cdot 161=7396-5796=1600 \Rightarrow x=\frac{86\pm 40}{18}=\left\{\frac{23}{9};7\right\}$

$x>4 \Rightarrow x=7$

Чистовик

II сл.: ① = ③ = ② + 1

$\frac{1}{2}\log_a b = 2\log_c a = 4\log_b c + 1$

Пусть $\log_c a = t \Rightarrow a = c^t$

$\log_c b = 4t^2$

$\frac{1}{2}\log_a b = 2t \Rightarrow \log_a b = 4t \Rightarrow b = a^{4t} = c^{4t^2}$

$2t = 4\log_b c + 1 \Rightarrow \log_b c = \frac{2t-1}{4} \Rightarrow \log_c b = \frac{4}{2t-1}$ $\Big\} \Rightarrow 4t^2 = \frac{4}{2t-1}$, $t \neq 1/2$

$8t^3 - 4t^2 = 4 \Rightarrow 2t^3 - t^2 - 1 = 0$

	2	-1	0	-1
1	2	1	1	0

$D < 0$

$(t-1)(2t^2 + t + 1) = 0 \Rightarrow t = 1$

$\frac{x}{2} + 1 = \frac{3x}{2} - 6 \Rightarrow x = 7$

III сл: ② = ③ = ① + 1

$2\log_c a = 4\log_b c = \frac{1}{2}\log_a b + 1$

Пусть $\log_b c = t \Rightarrow c = b^t$

$2\log_c a = 4t \Rightarrow \log_c a = 2t \Rightarrow a = c^{2t} = b^{2t^2} \Rightarrow \log_b a = 2t^2$

$4t = \frac{1}{2}\log_a b + 1 \Rightarrow \log_a b = 8t - 2 \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{8t-2}$

$2t^2 = \frac{1}{8t-2}$, $t \neq 1/4 \Rightarrow 16t^3 - 4t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = 1/2$ (решено ранее, сл. I) $\Rightarrow x = 7$

Ответ: $x = 7$ (1-е число равно 1, 2-е равно 2, 3-е равно 2)

21104486 (U212346 M1301951)

Чистовик

4.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 14 = 2\cdot 7 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

Т.к. НОД$(a;b;c)=14$ ⇒ каждое из чисел делится на 2 и 7. Ещё в какое-то из чисел 2 входит в степени 1, и ещё в какое-то 7 входит в степени 1, иначе НОД был бы больше. Т.к. НОК$(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18}$, то простые множители a, b и c — это числа 2 и 7, других нет. Более того, в какое-то число 2 входит в степени 17, а ещё в какое-то 7 входит в степени 18, иначе НОК был бы меньше. Тогда представим числа a,b,c в виде пр-я простых множителей:

$a = 2^{x_1}\cdot 7^{y_1}$

$b = 2^{x_2}\cdot 7^{y_2}$

$c = 2^{x_3}\cdot 7^{y_3}$, причём среди x_1, x_2, x_3 есть 2 числа: 1 и 17

среди y_1, y_2, y_3 есть 2 числа: 1 и 18

Найдём кол-во вар-тов выбрать из x_1, x_2, x_3 числа, равные 1 и 17: $3\cdot 2 = 6$. Аналогично, из y_1, y_2 и y_3 выбираем равные 1 и 18: $3\cdot 2=6$. Оставшееся x_i $(i=\{1;2;3\})$ может быть равно любому числу $\in \mathbb{N}$ от 2 до 16 (когда оставшееся x равно 1 либо 17, этот случай разберём отдельно). Аналогично, оставшееся y_i $(i=\{1;2;3\})$ может быть равно нат. числу от 2 до 17 (при оставш. $y=1$ либо 18 разберём отдельно).

Тогда таких чисел a, b и c всего: $\overset{90}{(6\cdot 15)}\cdot\overset{96}{(6\cdot 16)} = 8640$. В этом случае все иксы и все игреки уникальны

одно $x=1$
второе $x=17$
третье x от 2 до 16

одно $y=1$
второе $y=18$
третье y от 2 до 17

(попарно различны — среди x и попарно различны среди y)

Но может быть ситуация, когда какие-то два икса равны 1 либо 17 и когда два игрека равны 1 либо 18. Разберём 3 случая:

I) два икса равны, все игреки уникальны

$$\underset{\text{когда 2 икса} = 1 \text{ либо } 17}{2}\cdot \overset{x_1/x_2/x_3\text{ — уник.}}{3}\cdot\underbrace{(3\cdot 2\cdot 16)}_{\text{игреки}} = 576 \text{ способов}$$

II) два игрека равны, все иксы уникальны

$$\underbrace{(3\cdot 2\cdot 15)}_{\text{иксы}}\cdot \underset{\text{два игрека равны 1 либо 18}}{2}\cdot \overset{3\text{ места}}{3} = 540 \text{ способов}$$

III) два икса равны и два игрека равны

$$(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3) = 36$$

Чистовик

След-но, всего троек: $8640 + 576 + 540 + 36 = 9792$ пары

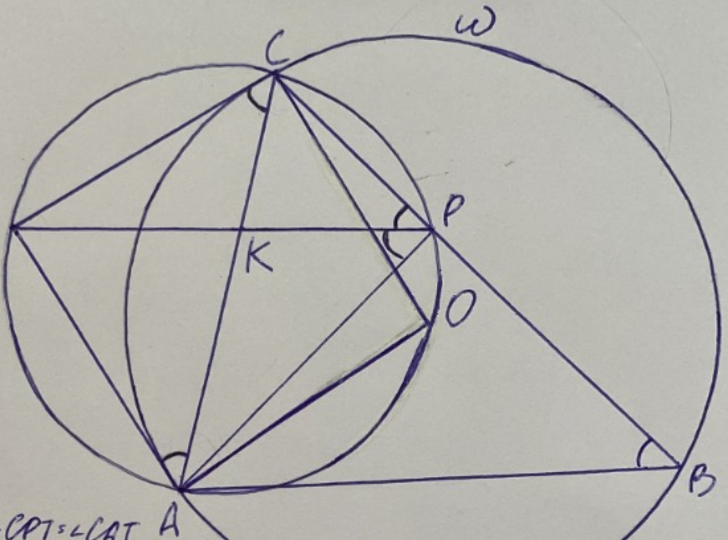
Ответ: 9792 пары

6. $S_{APK} = 7$, $S_{CPK} = 5$

Найти: S_{ABC} - ?

$\angle ABC = \operatorname{arctg} 3/4$ Найти: AC - ?

Решение:



∢ $OCTA$: AT, CT — кас. к ω, т. O — ц.

$\Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow ATCO$ — впис. чет-к $\Rightarrow$ т. $T \in$ опис. окр. $\triangle AOC$

$AO = CO$ — рад. ω, $\angle OCT = \angle OAT = 90°$,

в $\triangle OCT$, $\triangle OAT$ OT — общ. $\Rightarrow \triangle OCT = \triangle OAT$

$\angle CPT$, $\angle CAT$ — впис., опир-ся на $\breve{CT} \Rightarrow \angle CPT = \angle CAT$

$\triangle OCT = \triangle OAT \Rightarrow CT = AT \Rightarrow \triangle ATC$ — р/б с осн. $AC \Rightarrow \angle CAT = \angle ACT$

$\angle ACT$, $\angle APT$ опир-ся на $\breve{AT}$, впис. $\Rightarrow \angle ACT = \angle APT$

Сл-но, $\angle CPT = \angle APT \Rightarrow \dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \dfrac{AP \cdot PK \cdot \sin\angle APT}{CP \cdot PK \cdot \sin\angle CPT} = \dfrac{CP}{AP} = \dfrac{5}{7} = \dfrac{CK}{AK} \Rightarrow AK = 1{,}4CK$

$\angle APC$; $\angle AOC$ — впис. в опис. окр. $\triangle AOC$, опир-ся на $\breve{AC} \Rightarrow \angle APC = \angle AOC = 2\angle APT$

в ω $\angle AOC$ — центр., оп-ся на $\breve{AC}$ в ω, $\angle ABC$ — впис., оп-ся на $\breve{AC}$ в $\omega \Rightarrow \angle ABC = \dfrac{\angle AOC}{2} = \angle APT$

∢ $\triangle CKP$, $\triangle CAB$: $\angle ACB$ — общ., $\angle CPK = \angle CBA \Rightarrow \triangle CKP \sim \triangle CAB \Rightarrow \left(\dfrac{CK}{AC}\right)^2 = \dfrac{S_{CKP}}{S_{ABC}} =$

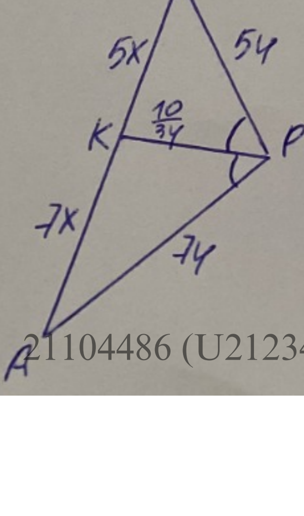
$= \left(\dfrac{5}{12}\right)^2 = \dfrac{25}{144} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{144}{25} \cdot S_{CKP} = \dfrac{144}{25} \cdot 5 = \dfrac{144}{5} = 28{,}8$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, $\angle ABC \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. По теор. $\sin^2 ABC + \cos^2 ABC = 1$

$\operatorname{tg} ABC = \dfrac{3}{4} = \dfrac{\sin ABC}{\cos ABC} \Rightarrow \cos ABC = \dfrac{4}{3}\sin ABC \Rightarrow \cos^2 ABC = \dfrac{16}{9}\sin^2 ABC$ $\Bigg\} \Rightarrow \dfrac{25}{9}\sin^2 ABC = 1 \Rightarrow$

$\sin ABC = \dfrac{3}{5}$, $\cos ABC = \dfrac{4}{5}$

Пусть $AC = 12x$, $CP = 5y$, $AP = 7y$



$S_{CPK} = \dfrac{1}{2} \cdot \sin CPK \cdot CP \cdot PK = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot 5y \cdot PK = 5 \Rightarrow PK = \dfrac{10}{3y}$

по теор. син. в $\triangle ACP$ $\dfrac{12x}{\sin APC} = \dfrac{7y}{\sin ACP} = \dfrac{5y}{\sin CAP}$

$\sin APC = 2\sin CPK \cos CPK = 2 \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow \cos APC = 1 - 2\sin^2 CPK = 1 - \dfrac{18}{25} = \dfrac{7}{25}$

по теор. кос. в $\triangle ACP$ $AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2 \cdot AP \cdot CP \cdot \cos APC \Rightarrow$

$144x^2 = 25y^2 + 49y^2 - 2 \cdot 5y \cdot 7y \cdot \dfrac{7}{25} = 74y^2 - \dfrac{98y^2}{5} = \dfrac{272y^2}{5} \Rightarrow$

$y^2 = 144x^2 \cdot \dfrac{5}{272} = \dfrac{45x^2}{17} \Rightarrow y = \sqrt{\dfrac{45}{17}}\,x = 3\sqrt{\dfrac{5}{17}}\,x$

Чистовик

в $\triangle ACP$ $AC = 12k$, $CP = 5y = 15\sqrt{\frac{5}{17}}k$, $AP = 7y = 21\sqrt{\frac{5}{17}}k$

$S_{ACP} = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \cdot \sin APC = \frac{1}{2} \cdot 35y^2 \cdot \frac{24}{25} = \frac{84}{5}y^2 = 12 = 5+7$

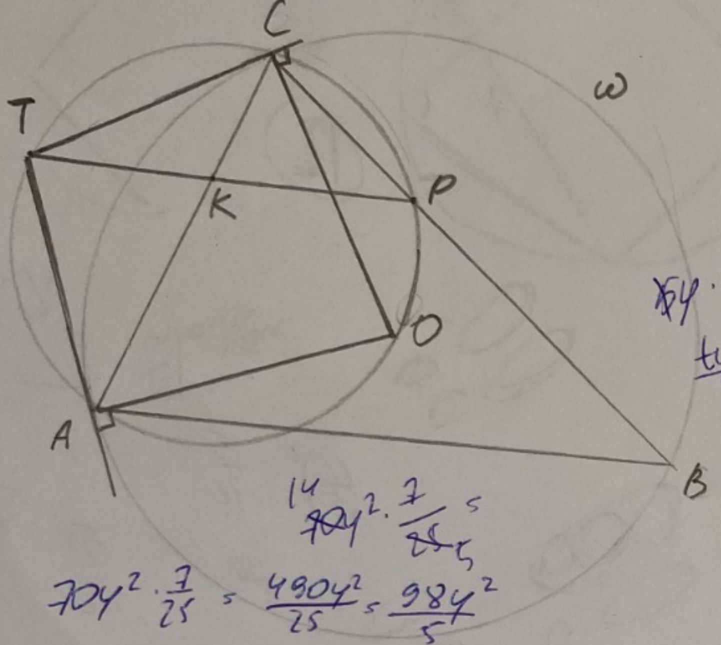
$y^2 = \frac{12 \cdot 5}{84} = \frac{5}{6} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{5}{6}} = 3\sqrt{\frac{5}{17}}k \Rightarrow k = \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{17}{5}} = \sqrt{\frac{17}{6}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{6}}$

$AC = 12k = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{6}}$

Ответ: $AC = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{6}}$

Черновик

$\log_{4,5^2}$ $\frac{1}{2}\log_{4,5}$



$\frac{41}{2}-6=\frac{41}{2}-\frac{12}{2}=\frac{29}{2}$

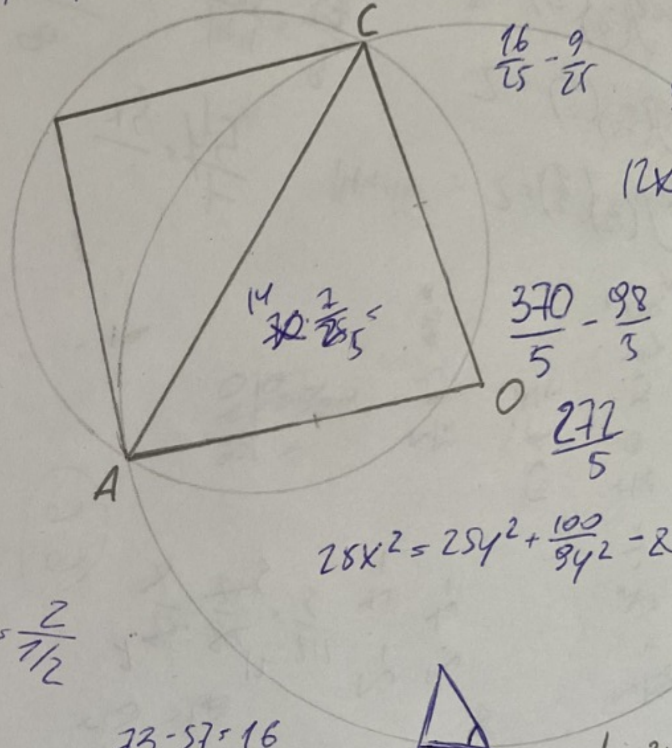
$\frac{49}{2}-\frac{17}{4}=\frac{98}{4}-\frac{17}{4}=\frac{81}{4}$

$\log^{1}_{(\frac{9}{2})^2}\left(\frac{81}{4}\right)\cdot\log^{1}_{(\frac{9}{2})}\left(\frac{9}{2}\right)=\log_{9/}$

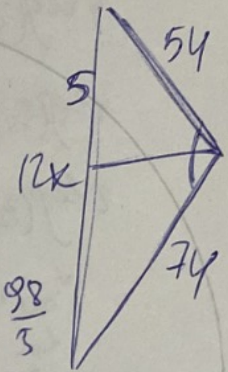
$\cancel{7y}\cdot t\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=1$

$\frac{ty3}{10}=1 \Rightarrow$

$1-2\cdot\frac{9}{25}=1-\frac{18}{25}$



$\frac{16}{25}-\frac{9}{25}$



$\frac{370}{5}-\frac{98}{3}$

$\frac{272}{5}$

$\cancel{70}^{14}\cdot\frac{7}{\cancel{25}_5}=$

$\cancel{70}^{14}y^2\cdot\frac{7}{\cancel{25}_5}=$

$3x\cdot6$ $70y^2\cdot\frac{7}{25}=\frac{490y^2}{25}=\frac{98y^2}{5}$

$\frac{46}{18}=\frac{23}{9}$ $\frac{86+40}{18}=$ $\frac{126}{18}=\frac{14}{2}=7$

$28x^2=25y^2+\frac{100}{9y^2}-2\cdot\cancel{5}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}$

$1/2\,\frac{\log_c b}{\log_c a}=4\log_b c=\frac{4}{\log_c b}$

$\log_2 \cancel{16}=\cancel{\log}\,\frac{\log_4 16}{\log_4 2}=\frac{2}{1/2}$

$\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{8}{\log_c b}\Rightarrow(\log_c b)^2=8\log_c a$

$\begin{array}{r} 86 \\ \times\ 86 \\ \hline 516 \\ 688 \\ \hline 7396 \end{array}$ $\begin{array}{r} 161 \\ \times\ 36 \\ \hline 966 \\ 483 \\ \hline 5796 \end{array}$

$73-57=16$

$144x^2$

$\frac{1}{2}\cdot3y\cdot PK=5$

$\frac{3}{2}yPK=5$

$PK=\frac{10}{3y}$

$t=\cancel{\log}$

$6^t=c=(8t^2)=\frac{4t-1}{2}$

43   $t=\log_b c$ $b^t=c$

$1/2\log_a b=4t$

$\log_c a=\frac{4t-1}{2}$

$\log_a b=8t \Rightarrow a^{8t}=b$

$\log_c a^2c=4t$

$-2\cdot\frac{9}{25}$

$-18x-3{,}5x=-21{,}5x$ $2-1$

$-86k$

$+36+4\frac{1}{4}=40\frac{1}{4}$

$\log_c c+\log_c a^2=4t\Rightarrow2\log_c a=4t-1$

Черновик

4. $\begin{cases} (a,b,c)=14 \\ [a,b,c]=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$

$9\cdot 21\cdot 48$

$x > \frac{17}{2x}\cdot\frac{x}{7}=\frac{17}{14}$

$\frac{7x}{2}=\frac{17}{4}+1=\frac{21}{4} \Rightarrow x=\frac{21}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{2}$

$x > \frac{2}{x}\cdot\frac{2}{x}$

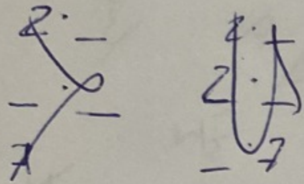
хотя бы 1

$\frac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{81}{4}\right)=1$

$4\log_{\frac{81}{4}}\left(\frac{9}{2}\right)=2$

$2\log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{9}{2}\right)=2$

$576\cdot 2=1000+152=1152+8640=152+9640=9740+52$



$2\cdot 7$

$2\cdot 7$

$\frac{3x}{2}+7=12x$

$\frac{5x}{6}=\frac{7x}{144}$

$144:16$

(11)

$\frac{17}{4}\cdot\frac{5}{17}$

$\frac{5}{7}=\frac{5x}{7}$

$\frac{54}{8}$

$\begin{array}{r} 96 \\ \times\ 90 \\ \hline 8640 \end{array}$

$\frac{x}{2}+1 \vee \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$

$1 \vee 3x-\frac{17}{4}$

$\frac{21}{4} \vee 3x$

$144:4=30+6=36$

$36x^2\cdot\frac{5}{68}$

$\frac{9x^2\cdot 5}{17}=45$

6·6

1

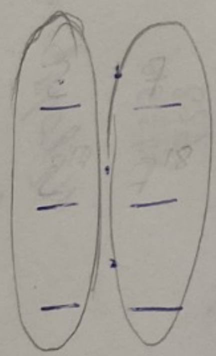
$\frac{17}{4}-6=\frac{17}{4}-\frac{24}{4}=-\frac{7}{4}$

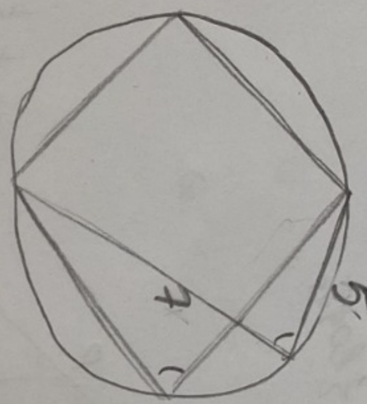
1 1

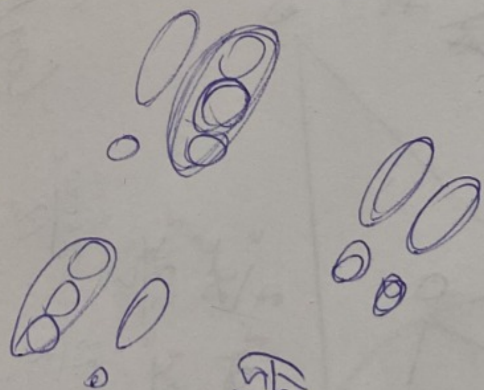
1 1

0 0

(3)







$2-2^{17}$ $7-7^{18}$

$(3\cdot 2\cdot 16)\cdot(3\cdot 2\cdot 16)$

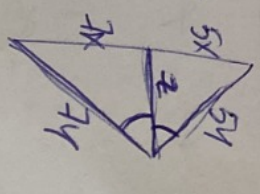
$\left(\frac{12}{5}\right)^2$

$\frac{5}{12}$

(12)

$6\cdot(6\cdot 16)$ 96

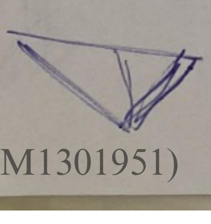
$\begin{array}{r} 96 \\ \times\ 6 \\ \hline 576 \end{array}$

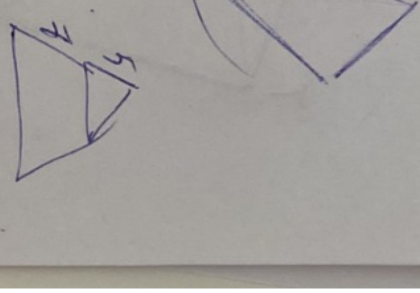


90·6

$\frac{5x}{12x}$

$\frac{5x}{5m}$





21104486 (U212346 M1301951)