Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104220**

ID профиля: **382272**

Вариант 22

Чистовик   Вариант 22.

Задача №1.   Часть 1.

$S=\frac{a_1+a_1+14d}{2}\cdot 15 = (a_1+7d)\cdot 15$ d - разность прогрессии, $d>0$

$$\begin{cases} S-24 < (a_1+6d)(a_1+15d) \\ S+4 > (a_1+10d)(a_1+11d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -24+15a_1+105d < a_1^2+21da_1+90d^2 \\ 15a_1+105d+4 > a_1^2+110d^2+21da_1 \end{cases}$$

$\cancel{15a_1+105d}+4-20d^2 > -24+\cancel{15a_1+105d}$

$20d^2<30 \quad d^2<1{,}5 \Rightarrow d=1$

$-24+\cancel{15a_1}^{15}+\cancel{105} < a_1^2+\cancel{21a_1}^{6a_1}+\cancel{90}$

$a_1^2+6a_1+9>0$

$(a_1+3)^2>0 \quad a_1\neq-3$

$2\sqrt2<3$
$2\sqrt2>2$

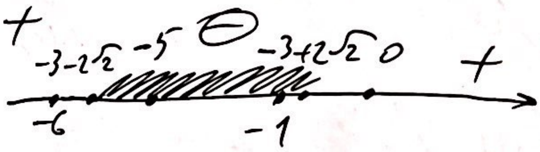
$\cancel{15a_1}+\cancel{105}^{5}+4 > a_1^2+\cancel{110}+\cancel{21a_1}^{6a_1}$

$a_1^2+6a_1+1<0$

$D'=9-1=8=(2\sqrt2)^2$

$a=\frac{-3+2\sqrt2}{1}=-3+2\sqrt2$

$a=-3-2\sqrt2=-3-2\sqrt2$



Ответ: $a_1\in\{-1;-2;-4;-5\}$.

Scanned with CamScanner

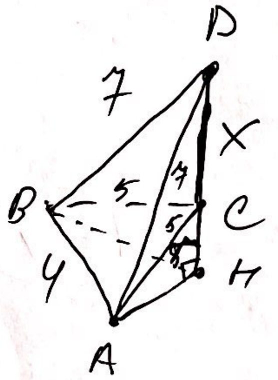
Чистовик   Вариант 22

Задача №2.   Часть 1

Дано: тетраэдр $ABCD$: $AB=4$ $AC=BC=5$
$AD=DB=7$. Впис. в цилиндр. $CD \parallel$ оси цилиндра.

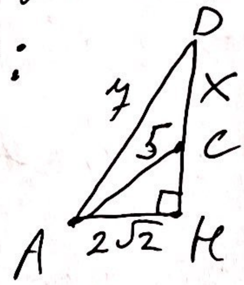
Найти: $\underline{CD}$.

Решение: $C\in$ бок стор. и $D\in$ бок стор. $\Rightarrow CD\in$ бок. стор.



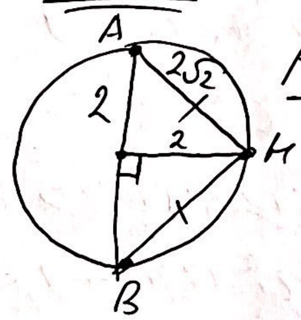
DH — перпендикуляр к горизонт. плоскости. (на неё цилиндр проецируется окружностью).

Тогда:



Радиус min, когда AB — диаметр, тогда

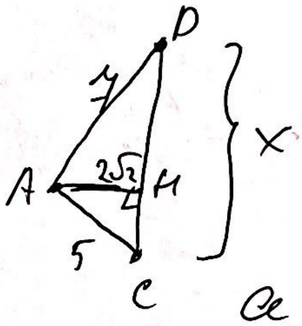
$R=2.$



$AH=2\sqrt{2}$

$X=\sqrt{49-8}-\sqrt{25-8}=$
$=\sqrt{41}-\sqrt{17}.$

Возможен и такой случай:



Тогда $X=\sqrt{49-8}+\sqrt{25-8}=\sqrt{41}+\sqrt{17}$

Больше случаев нет, т.к. при перестановке A и B ничего не изм., т.к. CD — фиксированный на боковой стороне.

Ответ: $X_1=\sqrt{41}-\sqrt{17}$
$X_2=\sqrt{41}+\sqrt{17}$

Чистовик   Вариант 22

Задача №3.   Часть 1.

Фигура M задана: все точки $(x;y)$, что $\exists$ a и b $\in$ что:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;50) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

① $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50$ — окружность с $R=5\sqrt{2}$

② $\begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$ — окружность с $R=5\sqrt{2}$

③ $14a+2b \ge 50$ — полуплоскость

④ $\begin{cases} a^2+b^2 \le 14a+2b \end{cases}$ — окружность с $R=5\sqrt{2}$, т.к. $(a-7)^2+(b-1)^2 \le 49+1$

⑤ $14a+2b<50$ — полуплоскость

a и b — ~~точки~~ координаты точки на плоскости.

Р-м ур-е № ③

$\underline{b \ge 25-7a}$

② $a^2+b^2 \ge 50$ $5\sqrt{2} > 7$

Найдём точки пересечения окружности и пр.

~~Заметим, что $\sqrt{50} = \sqrt{25} + \sqrt{25}$ и что при~~

$$\begin{cases} a^2+b^2=50 \\ b=25-7a \end{cases}$$

$a^2+625-350a+49a^2=50$

$2\cancel{50}a^2-\overset{14}{\cancel{350}}a+\underset{23}{\cancel{575}}=0$

$D'=49-46=3$

$a=\frac{7\pm\sqrt{3}}{2}$

$b_1=0{,}5-3{,}5\sqrt{3}$

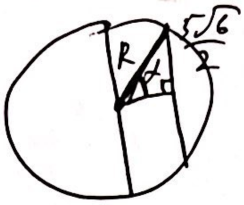
$b_2=0{,}5+3{,}5\sqrt{3}$

см. продолжение на стр. 4

Чистовик Вар. 22

Задача №3 Часть 1

Расс. между точками $S_1=\sqrt{\frac{(7+\sqrt{3}-7+\sqrt{3})^2}{4}+(7\sqrt{3})^2}=5\sqrt{6}$

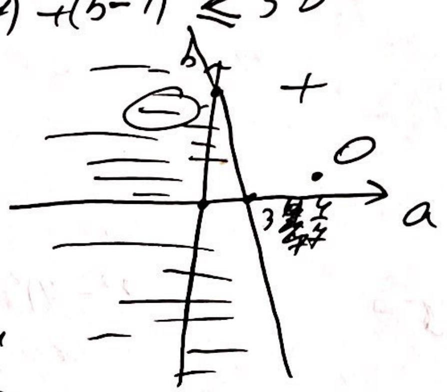


$\sin\alpha=\frac{\frac{5\sqrt{6}}{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 30^\circ=\alpha$

$2\alpha=60^\circ\Rightarrow\frac{1}{6}$ окружности

Р-м систему ур-й (4) и (5):

$\cancel{a^2+b^2\leq 14a+2b}$ $(a-7)^2+(b-1)^2\geq 50$



$14a+2b<50$

$b<25-7a$

центр ~~окружн.~~ круга $-\ O(7;1)$

принадлежит окружности

$a^2+b^2=50$

т.к. $7^2+1^2=50$

Найдём точки пересечения окружн. $(a-7)^2+(b-1)^2=50$ с пр. $b=25-7a$

$a^2-14a+49+576-336a+49a^2=50$

$50a^2-350a+575=0$

$a_1=\frac{7-\sqrt{3}}{2}\quad b_1=0{,}5+3{,}5\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad S_1=S_2=5\sqrt{6}$

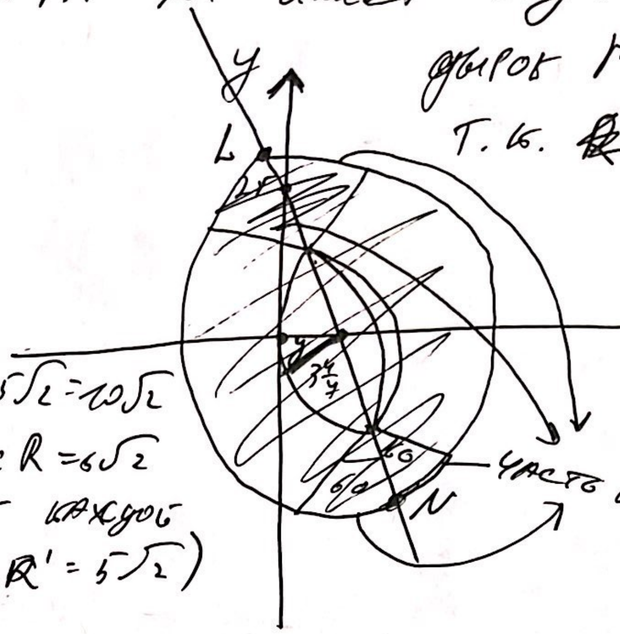
$a_2=\frac{7+\sqrt{3}}{2}\quad b_2=0{,}5-3{,}5\sqrt{3}\quad\Rightarrow$ опять $\frac{1}{6}$ окружности.

См. продолжение на стр. 5

Чистовик Вариант 22

Задача №3 Часть 1

Тогда фигура M имеет вид:

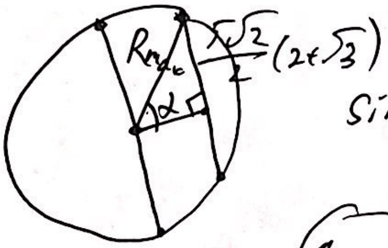


дырок не будет, т.к. ~~R~~ $5\sqrt{2} > 5\sqrt{2}(1-\cos 60°)$

$R > y$

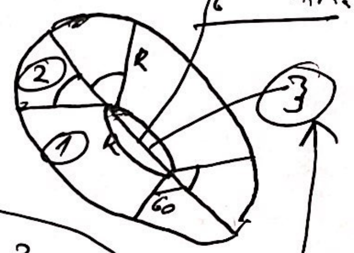
$R_{max} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$
(для окружно с $R = 5\sqrt{2}$ ~~опл.~~ опис. вокруг каждой точки окр. с $R' = 5\sqrt{2}$)

$$LN = 2\cdot 5\sqrt{2} + S_1 = 10\sqrt{2} + 5\sqrt{6} = 5\sqrt{2}(2+\sqrt{3})$$



$$\sin\alpha = \frac{\cancel{5\sqrt{2}}(2+\sqrt{3})}{4\cancel{10\sqrt{2}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

это R, т.к. $\frac{1}{6}$ окружн.



$$S_M = \frac{1}{3}\text{ окружности с } R_{max} - \frac{1}{3}\text{ окружности } R + 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\pi R^2 + 2\text{ сектора}$$

$$S_{сектора} = \frac{\pi R^2 - R^2\frac{2\sqrt{3}}{4}\cdot 6}{6}$$

$$S_M = \frac{1}{3}\left(\pi\cdot(10\sqrt{2})^2 - \pi\cdot(5\sqrt{2})^2\right) + \frac{2}{3}\pi\cdot(5\sqrt{2})^2 + 2\cdot\left(\frac{\pi(5\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{2})^2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}{6}\right) =$$

$$= 50\pi + \frac{100}{3}\pi + \frac{50\pi}{3} - \frac{2\cdot 75\sqrt{3}}{6} = 100\pi - 25\sqrt{3}$$

Ответ.

Черновик

$14a+2b>50$

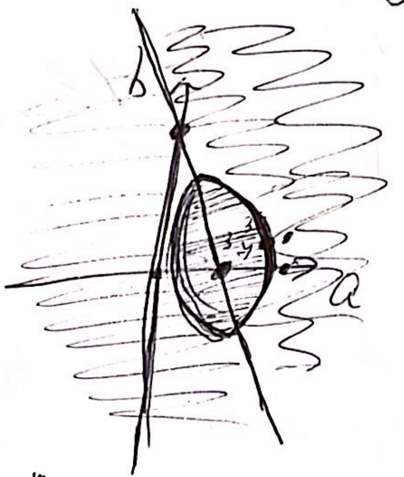
$a^2+b^2\le 50$

$7a+b>25$

$b>25-7a$

$\sqrt{50}=25\cdot 2=$

$5\sqrt{2}$



$a^2+b^2\le 14a+2b$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

sin

$\times\begin{array}{r}14\\24\end{array}$ $\quad\times\begin{array}{r}24\\14\\\hline 96\\240\\\hline 336\end{array}$

$\sin 2\alpha=2\sin\cos\alpha$ $\quad 25-\frac{\cancel{7\cdot 40}+4\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{16-\cancel{7+4\sqrt{3}}}{16}}=$

$4+4\sqrt{3}+3$

$3\cdot 49=147$ $\quad\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{16}}$

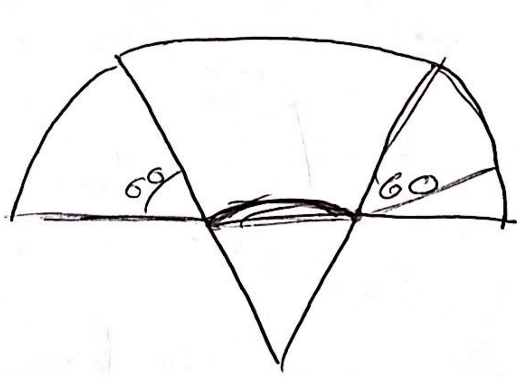
$2\sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{16}}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{16}}=$

$5\sqrt{2}$

$\frac{1}{4}\sqrt{63-28\sqrt{3}+36\sqrt{3}-48}=$

$5\sqrt{2}(1-\cos 60°)$

$\frac{1}{4}\sqrt{15+8\sqrt{3}}$



Черновик.

$$S = \left(\frac{a_1 + a_1 + 14d}{2}\right) \cdot 15 = (a_1 + 7d) 15.$$

-6

$a < b$ $\quad 1 < 3$

$c < d$ $\quad 1 < 3$

105

$81 < 90$

$\cancel{109 > 110}$

$1 < 2$

$3 > 4$

$2 = 2$

$0 < -1$

$2 \cdot 1{,}11 = 2{,}88$

90

-1 $\quad 56 < 70$

$94 > 90$

60 $\quad \cancel{56 < 36}$

$- \quad < 0$

-2

$\cancel{-3}$

45 $\quad 21 < 22$

$49 > 42$

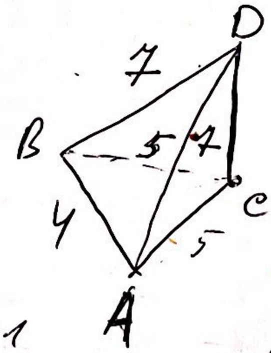
$\cancel{19 > 20}$

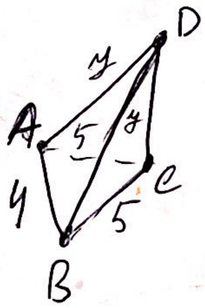
-4

-5

$6 < 10$

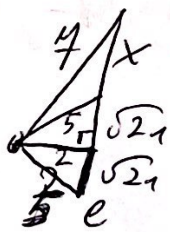
$34 > 30$





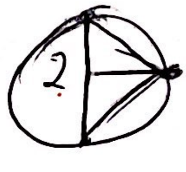
$25 - 4 = 21$

$49 - 4 = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



$x = 3\sqrt{5} + \sqrt{21}$

2



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104220**

ID профиля: **382272**

Вариант 22

Чистовик	Вариант 22
Часть 2

Задача №4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 7\cdot 2 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

$a; b; c$ „состоят" из двоек и семёрок, перемноженных. В каждом числе есть хотя бы одна двойка и семёрка. Хотя бы в одном числе должна быть 1 двойка (не больше) и не больше 1 семёрки (необязательно в одном числе).

~~для второго числа~~ Также хотя бы 1 число должно „содержать" 18 семёрок или 17 двоек (необязательно одно и то же).

	„2"	„7"
a	1	1
b	17	18
c	x	~~x~~ y

при $x \in \overbrace{\{2;16\}}^{15}$ и $y \in \overbrace{\{2;17\}}^{16}$, помножив это на $2\cdot P_3 = (3!)^2 = 36$, получим кол-во подходящих троек. (все будут подходить)

$N_1 = 15\cdot 16\cdot 36 = 8640$

2) при $x = 1; 17$ $y \in \{2;17\}$ и наоборот, при $y = 1; 18$ и $x \in \{2;16\}$, помножив на $\frac{P_3 P_3}{P_2} = 18$, получим кол-во подход. троек.

$N_2 = 18\cdot 16\cdot 2 + 18\cdot 2\cdot 17 = 18\cdot 66 = 1188$

3) при $x = 1; 17$ и $y = 1; 18$, надо умножать на $\frac{P_3 P_3}{P_2 P_2} = 9$

$N_3 = 2\cdot 2\cdot 9 = 36$

$N_0 = N_1 + N_2 + N_3 = 8640 + 1188 + 36 = 8640 + 1224 = \underline{9864}$

Ответ: 9864 тройки.

Чистовик Вариант 22

Задача № 5 Часть 2

I случай:

ОДЗ: $14x > 17$

$x > \frac{17}{14}$

$\frac{x}{2} \neq 0$

$x \neq -\ldots$

$14\frac{x}{4} - \frac{17}{4} \neq 1$

$14x \neq 21$

$x \neq 1,5$

$x \neq 4$

$3x > 12$

$x > 4$

$x \neq \frac{14}{3}$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$$

$$\cancel{\frac{1}{\log_{\sqrt{\ldots}}\left(\frac{x}{2}+1\right)} = \log_{\sqrt{\ldots}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2}$$

$$\cancel{\log_{\sqrt{\ldots}}(\sqrt{\ldots}) = \log_{\sqrt{\ldots}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 \log_{\sqrt{\ldots}}\left(\frac{x}{2}+1\right)}$$

$$\cancel{16(14x-17) = (9x^2-72x+144)(x+2)^2}$$

$$\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 2\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left|\frac{3x}{2}-6\right| \pm 1$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 4\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right) \\ \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 2\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) + 1 \end{cases}$$

$\frac{x}{2}+1 = a$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4} = b$

$\frac{3x}{2}-6 = c$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c \\ \frac{1}{2}\log_a b = 2\log_c a + 1 \end{cases}$$

$$4\log_b c = 2\log_c a + 1$$

$$1 = 8\log_b c \cdot \log_b a$$

$$b = c^{8\log_b a} \qquad \log_c b = 8\log_b a$$

II случай Чистовик задача № 5 Шифр 2

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a b = 2\log_c a \\ \frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c + 1 \end{cases}$$

$$2\log_c a = 4\log_b c + 1$$

$$2\log_c a = \frac{4}{\log_c b} + 1$$

$$2\log_c a \log_c b = 4 + \log_c b$$

$$2\log_c a \log_c b = \log_c bc^4$$

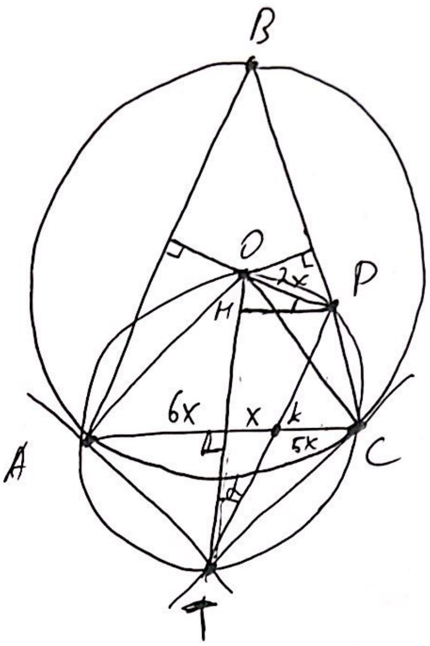
$$b^{2\log_c a} = bc^4$$

$$b^{(2\log_c a)-1} = c^4$$

Чистовик Вар. 22

Задача №6. Часть 2

Дано:



Решение: т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ (касательные) ~~(...)~~, то

AOCT – вписанный.

OT – диаметр.

$$\frac{AK}{AC} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{5}$$

$OP = 2x$ (подобие)

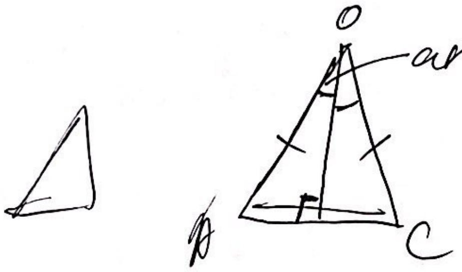
$PH = 2x\cos\alpha$

$OT = D$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{D^2-4x^2}}{D}$$

$$S_{ABC} = 12 \cdot \frac{6x}{\cancel{6x}-2x\cos\alpha} = \frac{36}{3-\frac{\sqrt{D^2-4x^2}}{D}}$$

2)



$\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ (т.к. угол центральный, $\angle AOC = 2\angle B$)

$$AC = \cancel{2} \cdot \frac{D}{\cancel{2}} \cdot tg(\operatorname{arctg}\tfrac{3}{4}) =$$

$$AC = \frac{3}{4}D$$

~~$TC^2 = (...)D = D^2 + OC^2$~~

~~$D^2 + xD = D^2 + OC^2$~~

Черновик.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 14 = 7\cdot 2 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

$3!\cdot 3! = 9\cdot 4 = 36$

$a; b; c = 2^{x+1}$ $x\in$

240

$a = 2\cdot 7$

$\frac{3!\,3!}{2!\cdot 2!} = 9$

x	1	17	1	17
y	1	1	18	18
P	9	9	9	9

Число 1 $- 2\cdot 7$

Число 2 $- 2^{17}\cdot 7^{18}$

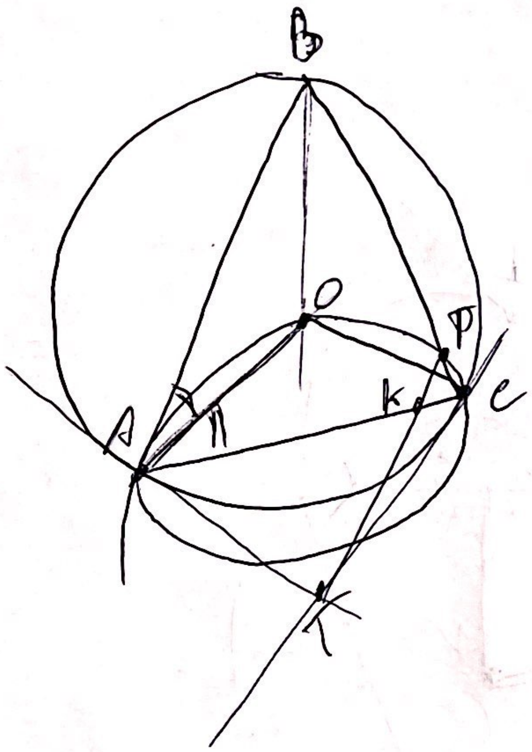
Число 3 $- 2^{x}\cdot 7^{y}$

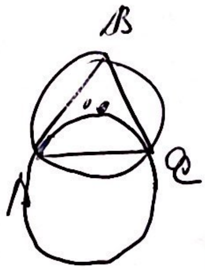
НОК $x - 17$

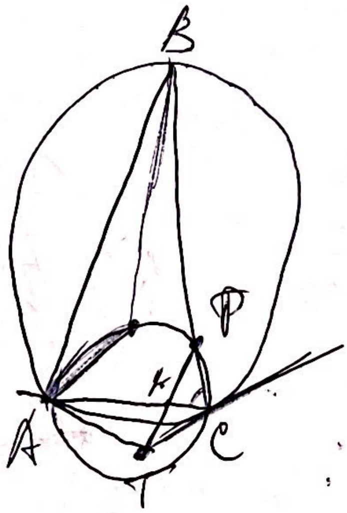
$y - 18$

$$\begin{array}{r} \times\ 240 \\ 36 \\ \hline 144 \\ 720 \\ \hline 8640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 66 \\ 18 \\ \hline 528 \\ 660 \\ \hline 1188 \end{array}$$







$\angle B = 15°$

Черновик.