Часть 1

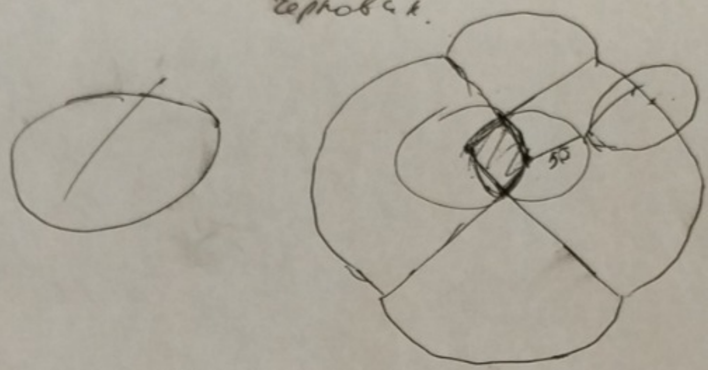
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

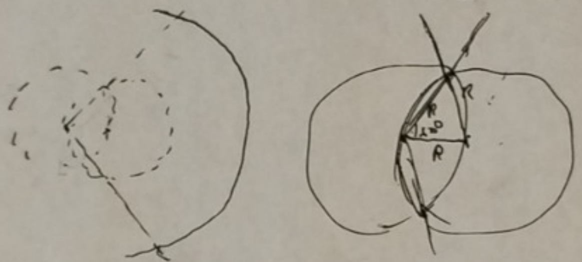
Шифр: **21104170**

ID профиля: **852587**

Вариант 22

Черновик.





$2 \to d$ $\quad \frac{\sqrt{3}R}{2}$ $\quad \frac{1}{2}\cdot R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$

$\frac{(3+11)15}{2} = 4\cdot 15 = 60$

$3\cdot 11 = 36 \; 76$

Вариант 22. 12 чистовик 1

1. $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} = \frac{(a_1 + (a_1 + 14d))\cdot 15}{2} = 15(a_1 + 7d)$

$$\begin{cases} a_7 a_{16} = (a_1+6d)(a_1+15d) > 15(a_1+7d) - 24 \\ a_{11} a_{12} = (a_1+10d)(a_1+11d) < 15(a_1+7d) + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

d – разность.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 - 15(a_1+7d) > -24 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 - 15(a_1+7d) < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a_1^2 - 21a_1 d - 90d^2 + 15(a_1+7d) < 24 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 - 15(a_1+7d) < 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 20d^2 < 28 \Leftrightarrow d^2 < \frac{7}{5}$

Т.к. последовательность целочисленная ~~то d~~ и возрастающая, $d^2 < \frac{7}{5} \Leftrightarrow \underline{d = 1}$.

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 - 15(a_1+7d) > -24 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 - 15(a_1+7d) < 4 \end{cases} \quad d=1 \Leftrightarrow$$

$$\overset{d=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 - 15(a_1+7) > -24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 - 15(a_1+7) < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 - 15 > -24 \\ a_1^2 + 6a_1 + 5 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}) \end{cases} \overset{a_1 \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow a_1 \in \{-5, -4, -2, -1\}$

Ответ: $-5; -4; -2; -1$.

зеркально

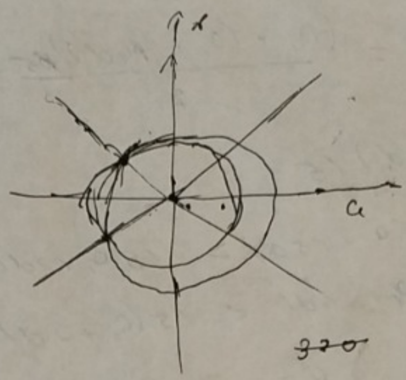
$\min(14a+2b, 50) \geq a^2+b^2 \iff \begin{cases} a^2+b^2 \leq 50 \\ a^2+b^2 \leq 14a+2b \end{cases} \iff$

$\iff \cancel{a^2+b^2 \leq 50}$

$a^2 - 14a + b^2 - 2b \leq 0$

$(a-7)^2 + (b-1)^2 \leq 50$

$\begin{cases} a^2+b^2 \leq 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50 \\ (a-1)^2+(b-7)^2 \leq 50 \end{cases}$



$\begin{cases} (a-7)^2+(b-1)^2 = 50 \\ a^2+b^2 = 50 \end{cases}$

$a^2 - 14a + b^2 - 2b = 0$

$50 - 14a - 2b = 0$

$7a + b = 25$

$b = 25 - 7a$

$a^2 + (25-7a)^2 = 50$

$a^2 + 49a^2 - 350a + 625 = 50$

$50a^2 - 350a + 575 = 0$

$2a^2 - \cancel{140}\,14a + 23 = 0$

$\cancel{370}$

$23 \cdot 25 = 115 + 46 = 575$

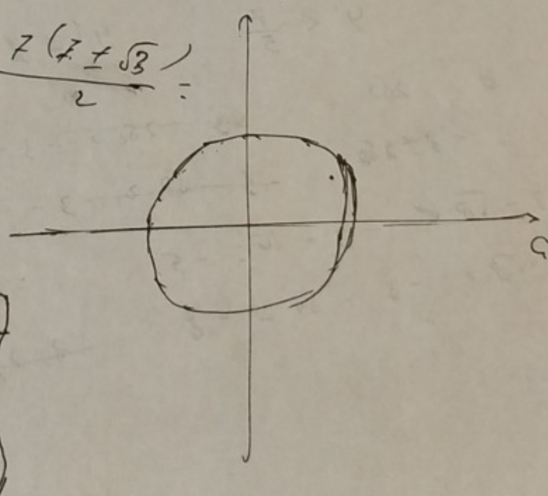
$25 \cdot 8 = 200$

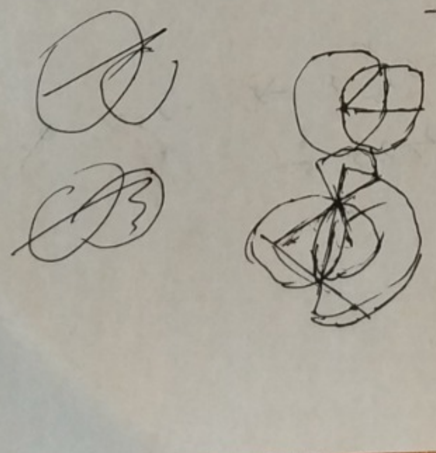
$2a^2 \cancel{+14a+23=0}$

$\cancel{49-46=3}$ $\quad 49 - 46 = 3$

$25 - \dfrac{7(7\pm\sqrt{3})}{2} =$

$= \dfrac{\cancel{50}\; 1 \mp 7\sqrt{3}}{2}$





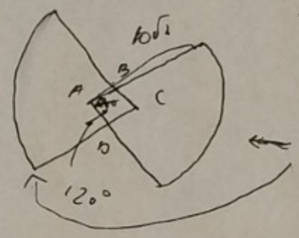
Вариант 22 11. Чистовик $\boxed{4}$

3. Продолжение.

AC — биссектриса ∠BAD ~~[illegible]~~ т.к. ABCD — ромб, значит $\angle = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Угол $\beta = \angle ABC = 60^\circ$.

(1)



$AB = BC = CD = AD = 5\sqrt2$

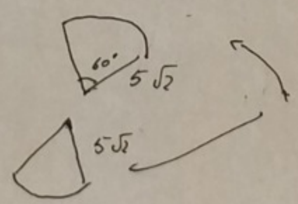
части окр-тей с рад. $10\sqrt2$

Площадь этой фигуры будет равна

$$2\cdot\frac{\pi(10\sqrt2)^2}{3} - S_{ABCD} = \frac{2\pi(10\sqrt2)^2}{3} - 2\cdot\frac{\sqrt3\,(5\sqrt2)^2}{4} =$$

$$= \frac{2\pi\cdot 200}{3} - \frac{\sqrt3\ 50}{2} = \frac{400\pi}{3} - 25\sqrt3$$

Чтобы найти площадь фигуры M, нужно нужно к площади фигуры (1) добавить площадь этой фигуры:



части окр-тей с радиусом $5\sqrt2$

Площадь будет равна $2\cdot\frac{1}{6}\pi(5\sqrt2)^2 =$

$$= \frac{1}{3}\pi\, 50 = \frac{50\pi}{3}$$

$$S = \frac{50\pi}{3} + \frac{400\pi}{3} - 25\sqrt3 = 150\pi - 25\sqrt3$$

Ответ: ~~$90\pi - 25\sqrt3$~~, $150\pi - 25\sqrt3$.

Чистовик $\boxed{2}$

Вариант 22. 17

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b,\ 50)\end{cases}$

$a^2+b^2 \le \min(14a+2b,\ 50) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \\ a^2+b^2-14a-2b \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases}$

Исходная система будет равносильна системе

$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50\end{cases}$

В координатах aOb $(a-x)^2+(b-y)^2 \le 50$ есть круг с центром в т. $(x;y)$ и радиусом $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$, $(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$ - тоже круг с центром в точке $(7;1)$ и радиусом $\sqrt{50}=5\sqrt{5}$. $a^2+b^2 \le 50$ - круг с центром в т. $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. Нужно найти все $(x;y)$, при которых система имеет решение относительно $(a;b)$.

~~Найдём, в каких точках окружности $(a-7)^2+(b-1)^2=50$ и $a^2+b^2=50$ пересекаются.~~

~~$\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2=50 \\ a^2+b^2=50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overbrace{a^2+b^2}^{50}-14a-2b=0 \\ a^2+b^2=50\end{cases} \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{cases}7a+b=25 \\ (25-7a)^2+a^2=50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=25-7a \\ 50a^2-350a+625-50=0\end{cases} \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{cases}b=25-7a \\ 2a^2-14a+23=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{7\pm\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{1\mp7\sqrt{3}}{2}\end{cases}$~~

Заметим, что центр окружности $(a-7)^2+(b-1)^2=50$ лежит на окр-ти $a^2+b^2=50$. $7^2+1^2=49+1=\underline{50}$.

черновик

$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$ $\quad a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_7 a_{16} > S - 24 \quad a_{11} a_{12} < S + 4$

$$a_1 + \dots + a_{15} = \frac{(a_1 + (a_1 + 14d))15}{2} = \frac{(2a_1 + 14d)15}{2} =$$

$= (a_1 + 7d)15$

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 15(a_1 + 7d) - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < 15(a_1 + 7d) + 4 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2 + 21d}$ $\quad d = y \quad a_1 = x$

$$\begin{cases} (x + 6y)(x + 15y) > 15(x + 7y) - 24 \\ (x + 10y)(x + 11y) < 15(x + 7y) + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 21xy + 90y^2 > 15x + 105y - 24 \\ x^2 + 21xy + 110y^2 < 15x + 105y + 4 \end{cases}$$

$\cancel{x^2 + 21xy + 90y^2 - 15x - 105y > -24}$

$$\begin{cases} -x^2 - 21xy - 90y^2 < -15x - 105y + 24 \\ x^2 + 21xy + 110y^2 < 15x + 105y + 4 \end{cases}$$

$20y^2 < 28 \quad y^2 < \frac{7}{5} \quad y^2 \le 1 \quad y = 1$

$9 \quad 2\sqrt{2}$

$-3 \pm 2\sqrt{2}$ $\quad \cancel{-3 - 2\sqrt{2} >} -3 - 2$

$\cancel{-3 - \sqrt{8} >} -3 -$

$-3 - \sqrt{8} < -3 - \sqrt{4} = -5$

$-3 - \sqrt{8} > -3 - \sqrt{9} = -6$

$-5, -4, \cancel{-3}, -2, -1, 0$

$\cancel{2, 2, 3, 3, 5}$

$-1 \quad 13$

14

$6 \cdot 15$

$90 - 24 = 66$

9

$9 \cdot 10 < 94$

$5 \cdot 14 = 70 > 66$

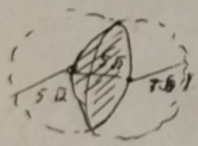
Вариант № 2 18. Чистовик [3]

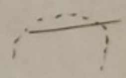
3. Продолжение

Т.к. эти окружности равных радиусов, то и центр окр-ти $a^2+b^2=50$ лежит на окр-ти $(a-7)^2+(b-7)^2=50$ $(0-1)^2+(0-7)^2=1+49=50$

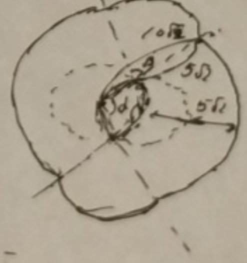
Множество точек A_t $(x;y)$ фигуры M состоит из тех и только тех точек $(x;y)$, что ~~окружность~~ круг $(a-x)^2+(b-y)^2\le 50$ пересекает фигуру $\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$, т.е. точек, удалённых от фигуры $\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$ на расстояние не ~~мен.~~ больше $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Фигура $\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$ есть пересечение двух ~~кругов~~ равных кругов, расстояние между центрами которых равно радиусу этих кругов.



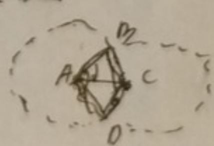


~~Фигура M состоит из двух кругов~~



Фигура M состоит из ч-х кругов радиусами $5\sqrt{2}$ и $10\sqrt{2}$ (см рис)

Найдём угол $\alpha=\angle BAD$ ~~$=\angle ACD$~~



$AB=5\sqrt{2}=BC=CD=AD=AC$ как радиусы

$\angle BAC=60°$, т.к. $AB=BC=AC$)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104170**

ID профиля: **852587**

Вариант 22

Билет 22. 2 ч. Чистовик

$\boxed{2}$

4. Продолжение.

Разберёмся с числами d, ~~пусть~~
~~d_c максимально, а d_a (…)~~
пусть одно из чисел равно 17, а другие не превосходят 16

Пусть d_c макс. а d_a, d_b не превосходят 16. ~~Будем~~ Пусть $d_a = 1$, $d_b \in [2:16]$, тогда получим 15 вариантов. Аналогично, если $d_b = 1$, $d_a \in [2:16]$ 15 вар. Всего $2 \cdot 15$ вариантов. ~~Аналог~~ Ещё нужно не забыть про ~~вариант~~ случай, когда $d_a = 1$, $d_b = 1$. Получаем $2 \cdot 15 + 1$ вар.
Аналогично для случаев, когда $d_b = 17$; $d_a, d_c \le 16$ и $d_a = 17$; $d_b, d_c \le 16$. Получили $3(2 \cdot 15 + 1)$ вар.

Пусть теперь два числа максимальны, а ~~тогда~~ третье минимально, тогда получаем 3 варианта ($C_3^2 = 3$)

Всего вариантов $3 \cdot (2 \cdot 15 + 1) + 3 = 3 \cdot 32 = \cancel{93}\ \cancel{99}\ \underline{96}$

Аналогично для чисел B будет $3(2 \cdot 16 + 1) + 3 =$
$= \underline{102}$

Всего вариантов будет $102 \cdot 96 = 9792$.

<u>Ответ</u>: 9792.

21104170 (U852587 M1295904)

SHOT ON MI 6
MI DUAL CAMERA

2021/3/7 15:01

~~Вариант~~ билет 22. 27. Чистовик. $\boxed{1}$

4. $\begin{cases} НОД(a; b; c) = 14 = 2 \cdot 7 \\ НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$

В разложении чисел a, b и c не может быть степеней чисел, отличных от 2 и 7, т.к. в противном случае в разложении НОК$(a; b; c)$ будут ~~эти числа~~ степени этих чисел, а их там нет. Пусть

$a = 2^{\alpha_a} 7^{\beta_a}$, $b = 2^{\alpha_b} \cdot 7^{\beta_b}$, $c = 2^{\alpha_c} 7^{\beta_c}$

$\alpha_a, \beta_a, \alpha_b, \beta_b, \alpha_c, \beta_c$ — натуральные числа и 0.

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 2^{\min(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)} \cdot 7^{\min(\beta_a, \beta_b, \beta_c)} = 2 \cdot 7 \\ НОК(a; b; c) = 2^{\max(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)} \cdot 7^{\max(\beta_a, \beta_b, \beta_c)} = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \min(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c) = 1 \\ \min(\beta_a, \beta_b, \beta_c) = 1 \\ \max(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c) = 17 \\ \max(\beta_a, \beta_b, \beta_c) = 18 \end{cases} \cancel{\Leftrightarrow \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \beta_a, \beta_b, \beta_c \neq 0}$$

~~$\begin{cases} \max(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c) = 17 \\ \max(\beta_a, \beta_b, \beta_c) = 18 \end{cases}$~~

~~1) Пусть $\alpha_c = 17$; $\alpha_b, \alpha_a \le 16$, тогда существует $16 \cdot 16 = 16^2$ вариантов~~

~~2) Если $\alpha_b = 17$; $\alpha_a, \alpha_c \le 16$, то будет 16^2 вариантов~~

~~3) Если $\alpha_a = 17$; $\alpha_b, \alpha_c \le 16$, то будет 16^2 вариантов~~

~~Из этих 3-х пунктов получаем $3 \cdot 16^2$ вариантов~~

~~Пусть теперь какие-то 2 числа α принимают максимальное значение 17, тогда для оставшегося числа есть 16 вариантов.~~

черновик.

$НОД(a, b, c) = 14 = 2 \cdot 7$

$НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

~~$a = 2^{\alpha_a} \quad b =$~~

$a = 2^{\alpha_a} 7^{\beta_a} \qquad b = 2^{\alpha_b} 7^{\beta_b}$

$НОК(a, b, c) = 2^{\max(\alpha_a, \alpha_b)} 7^{\max(\beta_a, \beta_b)} =$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \max(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c) = 17 \\ \max(\beta_a, \beta_b, \beta_c) = 18 \end{cases} \\ \begin{cases} \min(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c) = 1 \\ \min(\beta_a, \beta_b, \beta_c) = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

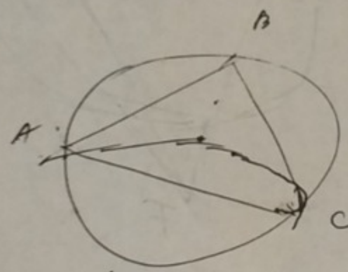
$\alpha_c = 17$

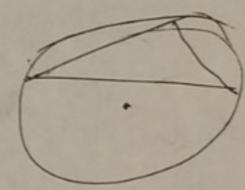
$3 \cdot 16^2 + 16 + 16 + 16 + 1 =$

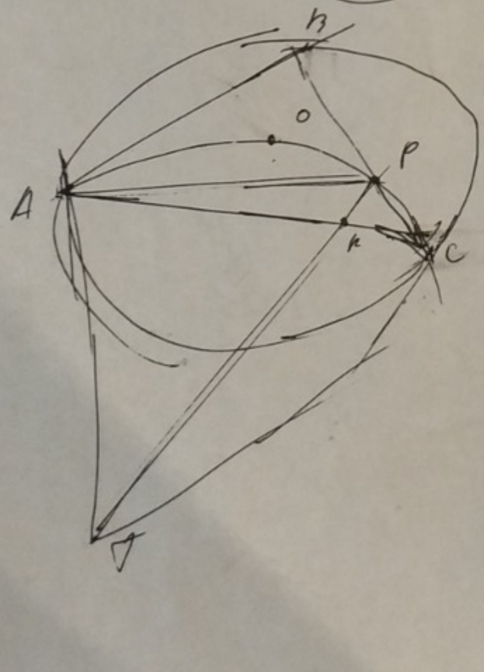
$= 3 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 1$

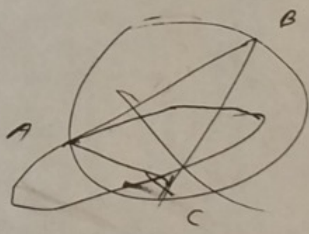
kis (a, b, c)

$$\begin{array}{r} \times 102 \\ 96 \\ \hline 612 \\ +918 \\ \hline 9792 \end{array}$$









Rozbitohle

$\frac{x}{2}+1>0$ $\quad$ $\frac{3x}{2}-6>0$ $\quad$ $\frac{31}{3} = \frac{7x}{2}$

$x>-2$ $\quad$ $x>4$

$\frac{7x}{2} > \frac{17}{3}$ $\quad$ $7x > \frac{17}{2}$ $\quad$ $\frac{3}{2} = x$

$x > \frac{17}{7}$

$x>4$ $\quad$ x

$x = \frac{18}{7}$ $\quad$ $x =$

$\frac{31}{3} = \frac{7x}{2}$ $\quad$ $\frac{4}{\log_c b}$

$\cancel{\frac{\frac{1}{2}\log_a b}{\log_b c} = 4}$

$\frac{4 \cdot \log_b c}{\log_b c} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{3}\right) = \cancel{2\log_{\frac{3x}{2}-6}}$

$4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{3}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{3}\right)-1 = 2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\frac{1}{2}\log_a b = 2\log_b c$

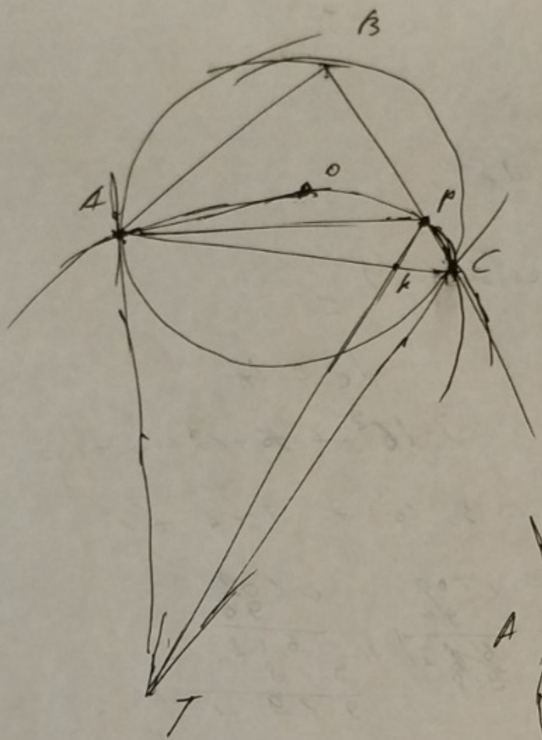
$\log_a b \log_c b = 8$

$\frac{x}{2}+1$

1	4	17
1	15	1
4	1	17
15	1	1

SHOT ON MI 6
MI DUAL CAMERA
2021/3/7 15:03

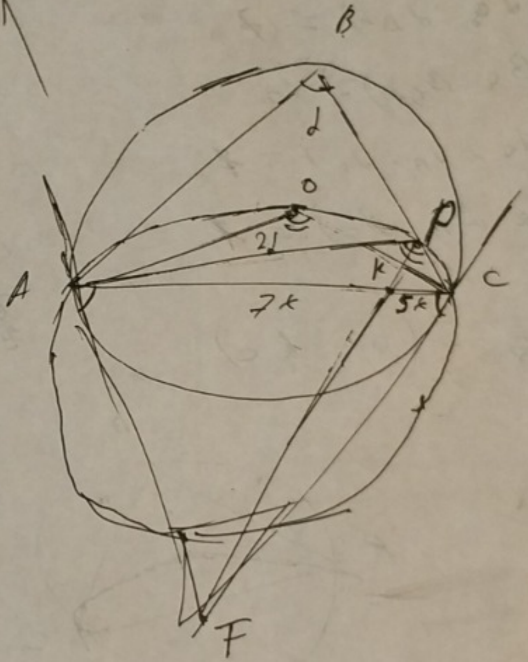
Черновик



$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$

$\frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$



Черновик.

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

$\cancel{2\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}$

$4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$ $\quad 2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\underbrace{\frac{x}{2}+1}_{a}, \quad \underbrace{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}_{b}, \quad \underbrace{\frac{3x}{2}-6}_{c}$

~~log~~

$\cancel{b\cdot a} = b\cdot c = 2x$

$4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right) = \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

~~$2\log$~~

$\frac{1}{2}\log_a b, \quad 4\log_b c \quad 2\log_c a$

$2\log_c a = 4\log_b c - 1 =$

$2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right) - 1$

$2\log_c a = \frac{1}{2}\log_a b$

~~$2\log_c a = \frac{1}{2}\log_b a \quad \frac{1}{2\log_b a}$~~

$\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c = \frac{4}{\log_c b}$

$\frac{1}{2}\log_a b\,\log_c b = 4$

$\frac{1}{2}\frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{2}\log_c b = 4$ $\quad \log_a b\,\log_c b = 8$

$\log_c b = 8$

21104170 (U852587 M1295904)

SHOT ON MI 6
MI DUAL CAMERA

2021/3/7 15:02