# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104088**

ID профиля: **834440**

Вариант 22

Чистовик

№1

Решение: $S = a_1 + \ldots a_{15} = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} d = 15 \cdot a_1 + \frac{15 \cdot 14}{2} d =$

$= 15 \cdot a_1 + \frac{10 \cdot 10}{2} \cdot d = 15 \cdot a_1 + 10 \cdot 5 \cdot d \ (1)$

$a_n = a_1 + (n-1) d.$

Учитывая условие и выражение (1), имеем:

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > S - 24 = 15a_1 + 105d - 24 \ (2) \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < S + 4 = 15a_1 + 105d + 4 \ (3) \end{cases}$$

Раскрываем скобки в (2) и (3) и приведем подобные, считая выражения (2) и (3) квадратными трехчленами относительно $a$:

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1(21d - 15) + 90d^2 > 105d - 24 \ (2) \\ a_1^2 + a_1(21d - 15) + 110d^2 < 105d + 4 \ (3) \end{cases}$$

Преобразуем выражение (2):

$-a_1^2(21d - 15) - 90d^2 < -105d + 24$

И сложим с выражением (3):

1

$20d^2 < 28$

$d^2 < 1,4$

$-1,4 < d < 1,4$

Учитывая, что все $a_n$ - целые, то $d$ - целые и $>0$ (прогрессия возрастает), тогда $d = 1$.

Подставляем в выражения (2) и (3)

Чистовик

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1 \cdot 6 + 90 > 105 - 24 \\ a_1^2 + a_1 \cdot 6 + 110 < 105 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 & (a_1+3)^2 > 0;\ a_1 \neq -3 \quad (4) \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 & -3-\sqrt{8} < a_1 < -3+\sqrt{8} \quad (5) \end{cases}$$

Из (5) целые $a_1 = -5; -4; -3; -2; -1; 0$

Из (4). $a_1 \neq -3$

Ответ: $a_1 = -5; -4; -2; -1; 0.$

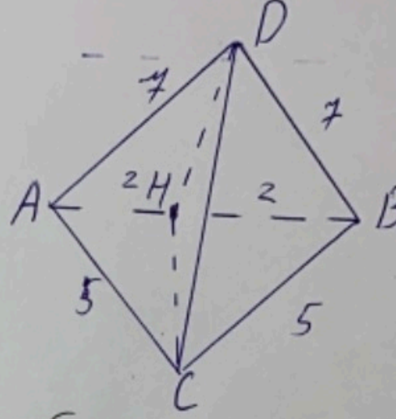
2

Чистовик

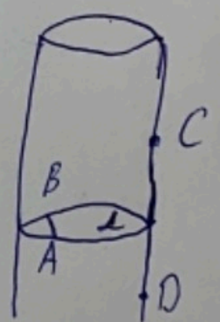
№2

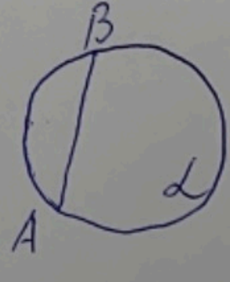
Решение:

1) В р/б $\triangle ADB$ высота $DH$ - является медианой, аналогично, в р/б $\triangle ABC$: высота $CH$ - медиана. Тогда $AH = HB = \frac{AB}{2} = 2$. Причем $AB$ перпендикулярно плоскости $(DHC)$, так как $AB$ перп-но $DH$.




2) Учитывая, что точки $D$, $C$ лежат на боковой поверхности цилиндра и $CD$ - парал-но его оси, то $CD$ лежит на образующей боковой поверхности. Т.к. $AB$ пер-но $CDH$, то $AB$ пер-но $CD$, значит $AB$ лежит в плоскости, пер-ной плоскости оси цилиндра. Проведем сечение цилиндра этой пл-тью $\alpha$: это круг, пар-ный основанию цилиндра и $AB$ - его хорда, т.к. $AB = 4$, то радиус основания цилиндра $r \geqslant \frac{AB}{2}$, т.к. хорда $\leqslant$ диаметру. Поэтому наим $r = 2$




3

21104088 (U834440 M1304476)

Чистовик

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) & (2) \end{cases}$$

Решение: 1) Заметим, что из (2) следует:

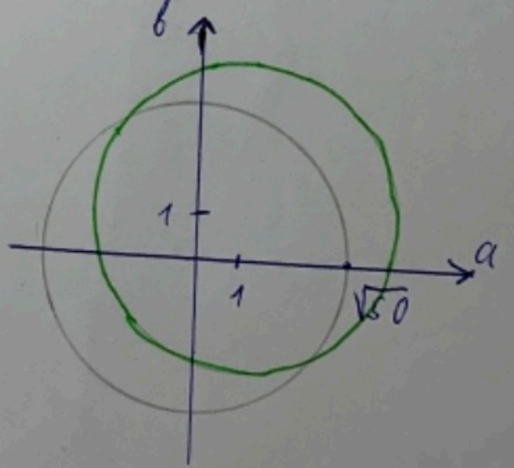
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 14a+2b & (3) \\ a^2+b^2 \le 50 & (4) \end{cases}$$

Рассмотрим (3):

$$a^2-14a+49-49+b^2-2b+1-1 \le 0$$

$$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$$ – на плоскости это ~~[illegible]~~ круг, с центром в точке $(7;1)$ радиуса $R=\sqrt{50}$;

Круг, с центром в точке $(0;0)$ радиуса $R=\sqrt{50}$




4

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104088**

ID профиля: **834440**

Вариант 22

Чистовик

№4

Решение:

1) По У.З. (условию задачи) $a = 2^{k_1} \cdot 7^{m_1}$; $b = 2^{k_2} \cdot 7^{m_2}$; $c = 2^{k_3} \cdot 7^{m_3}$, при этом хотя бы одно $k_i$ ровно 1 и хотя бы одно $m_i = 1$, иначе НОД$(a;b;c) \neq 14$. и хотя бы одно $k_j = 17$ и хотя бы одно $m_j = 18$, иначе НОК$(a;b;c) \neq 2^{17} \cdot 7^{18}$

2) Выберем одно из $k_1, k_2$ такое, что $k_i = 1$ (возможны три способа). Из тех $k$, что остались, выберем одно $k_j = 17$ (два способа). Оставшееся $k_p$ может принимать любо значение от 1 до 17.

Всего вариантов: $3 \cdot 2 \cdot 17 = 102$

3) Аналогично, выберем $m_i = 1$ (три возможных способа), $m_j = 18$ (два способа), оставшееся $m_p$ принимает любое значение от 1 до 18.

Всего вариантов $3 \cdot 2 \cdot 18 = 108$.

4) Все способы выбрать $k$ умножаем на все способы выбрать $m$: $102 \cdot 108$. Однако, при таком способе выбора тройки чисел $(a;b;c)$ могут быть выбраны несколько раз, исключим эти варианты.

5) Тройки чисел $(a;b;c)$, в которых два числа $k$ равны 1 и 17, а третье $k \in [2;16]$ (15 чисел), но все три $m$ равны, либо 1, либо 18, учтены дважды. Выбрать такую тройку можно

$\underbrace{(3 \cdot 2 \cdot 15)}_{\text{выбор } k_i} \cdot \underbrace{(3 \cdot 2)}_{\text{выбор } m_i}$ способами

1

21104088 (U834440 M1304477)

Чистовик

6) Тройки чисел $(a;b;c)$, в которых два числа $m$ равны 1 и 18, а третье, $m \in [2;17]$ (16 чисел), но все три числа $k$ равны 1 или 17, учтены дважды. Их можно выбрать

$$\underbrace{(3\cdot 2)}_{\text{выбор } k_i} \cdot \underbrace{(3\cdot 2\cdot 16)}_{\text{выбор } m_i} \text{ способами.}$$

7) Тройка чисел, в которых все $k_i$ равны 1 или 17 (или две 1, одно 17, или наоборот). и все $m_i = 1$ или 18 (или две 1, одно 18, или наоборот). Можно выбрать $\underbrace{(3\cdot 2)}_{\text{выбор } k_i} \cdot \underbrace{(3\cdot 2)}_{\text{выбор } m_i}$ способами

Каждая такая тройка при подсчете в 1) учтена четыре раза.

Итого, всего кол-во разных $(a;b;c)$ равно: $102 \cdot 108 - (3\cdot 2\cdot 15)\cdot(3\cdot 2) -$
$-(3\cdot 2)(3\cdot 2\cdot 16) - 3(3\cdot 2)(3\cdot 2) = 11016 - 540 - 576 - 108 = 9792$

Ответ: 9792

2

Чистовик

№5

Решение:

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+1 \neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \quad x>4 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \end{cases}$$

3

2) Обозначим:

u равно $\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_a b$, где $a=\frac{x}{2}+1$; $b=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$,

v равно $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=4\log_b c$, где $c=\frac{3x}{2}-6$

w равно $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\log_c a$.

Заметим, что $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\log_a c\cdot\log_c a=1$

Таким образом: $u\cdot v\cdot w=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$. (1)

3) Если $u=v$, $w=u-1$, то из (1):

$u\cdot u(u-1)=4$; $u^3-u^2-4=0$

подходит $u=2$

$u=2$ или $u^2+u+2=0$

$D=1-8<0$

корней нет

$$\begin{array}{r|l} u^3-u^2-4 & u-2 \\ \underline{u^3-2u^2} & u^2+u+2 \\ u^2-4 & \\ \underline{u^2-2u} & \\ 2u-4 & \\ \underline{2u-4} & \\ 0 & \end{array}$$

т.е. только $u=2$

21104088 (U834440 M1304477)

Чистовик

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2$$

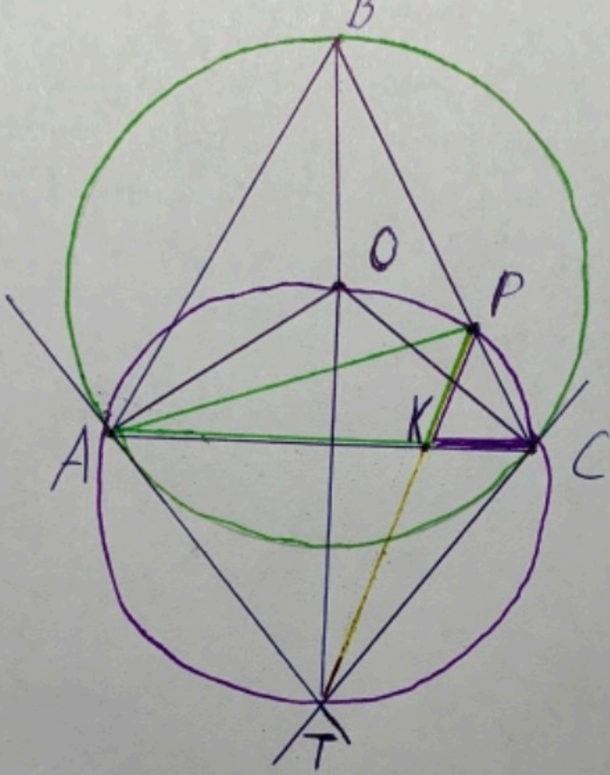
$$\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2$$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=4\log$$

4

Чистовик

№6




5

21104088 (U834440 M1304477)