Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104041**

ID профиля: **202153**

Вариант 22

$S = 15 \cdot a + \frac{14 \cdot 15}{2} b$ Черновик

$a_7 = a + 6b$

$a_{18} = a + 15b$

$a^2 + 21ab + 90b^2 > 15a + 105b - 24$

$a^2 + 21ab + 110b^2 < 15a + 105b + 4$

$20b^2 < 28$

$b^2 < \cancel{\frac{14}{15}} \frac{7}{5}$

$a^2 + a(21b - 15) + 80b^2 - 105b + 24 > 0$

$a^2 + a(21b - 15) + 110b^2 - 105b - 4 < 0$

$b = \pm 1$

1) $b = 1$

$a^2 + 21a + 90 > 15a + 105 - 24$

$a^2 + 6a + 9 > 0$ $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ $a \neq -3$

$a^2 + 21a + 110 < 15a + 105 + 4$

$a^2 + 6a + 1 < 0$

$a \quad \frac{-6 - 4\sqrt{2}}{2} = -3 - 2\sqrt{2} \qquad -3 + 2\sqrt{2}$

$-5 \qquad -1$

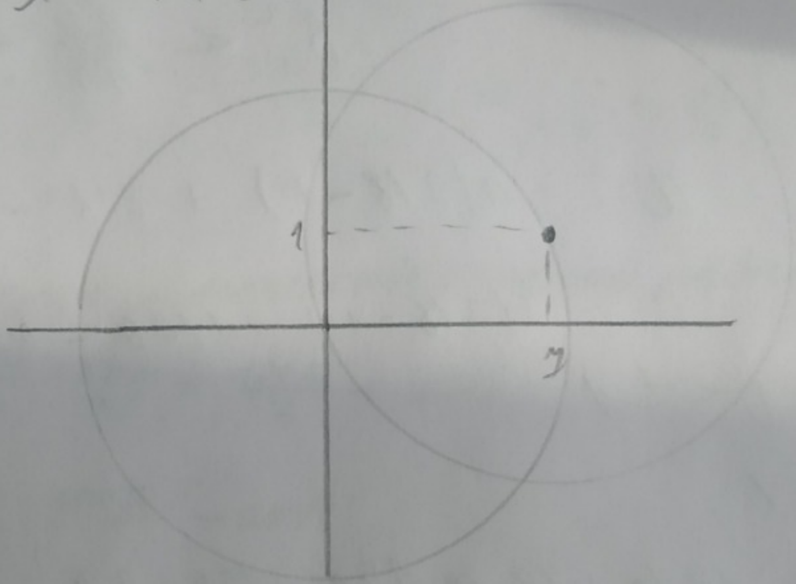
21104041 (U202153 M1304532)

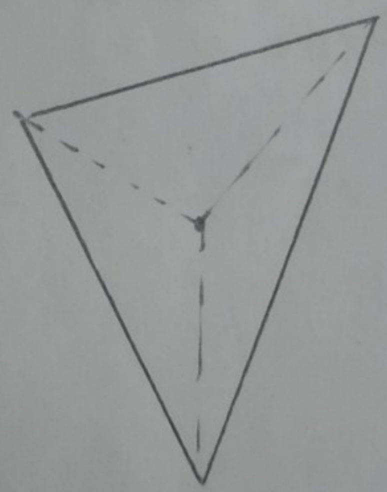
Черновик

$$\begin{cases} a^2-14a+b^2-2b\le 0 \to (a-7)^2+(b-1)^2\le 50 \\ a^2+b^2\le 50 = (5\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

$a -$

$$\begin{cases} a^2+b^2\le 50 \\ x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2\le 50 \end{cases}$$





21104041 (U202153 M1304532)

№1 Чистовик (1)

Пусть a – первый элемент прогрессии, b – число, на которое увеличивается каждый следующий элемент, тогда $S = a + a+b + a+2b + \ldots + a+14b = 15a + b(1+2+\ldots+14) =$

$= 15a + b\cdot\frac{14\cdot 15}{2} = 15a + 105b$

• $a_7 a_{16} = (a+6b)(a+15b) > S-24$

$a^2+21ab+90b^2 > S-24$

• $a_{11}\cdot a_{12} = (a+10b)(a+11b) = a^2+21ab+110b^2 < S+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow S+4 > a^2+21ab+110b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (S+4) + a^2+21ab+90b^2 > a^2+21ab+110b^2+(S-24)$

$28 > 20b^2 \Rightarrow b^2 < 1{,}4$

b – целое и $b>0$ (т.к. прогрессия возрастает) $\Rightarrow b=1$

• $a_7 a_{16} > S-24$

$a^2+21a+90 > 15a+105-24$

$a^2+6a+9>0$

$(a+3)^2>0 \Rightarrow a+3\neq 0 \Rightarrow a\neq -3$

• $a_{11}\cdot a_{12} < S+4$

$a^2+21a+110 < 15a+105+4$

$a^2+6a+1<0$

$(a+3)^2<8 \Rightarrow a+3 \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \Rightarrow -3-2\sqrt{2} < a < -3+2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -3-3 < -3-2\sqrt{2} < a < -3+2\sqrt{2} < -3+3 \Rightarrow -6 < a < 0 \Rightarrow a \in [-5; -1]$

Чистовик

②

$$\begin{cases} a \in [-5;-1] \\ a \neq -3 \\ a - \text{целое} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-5;-4;-2;-1\}$$

a и b целые, т.к. a_1 и a_2 целые $\Rightarrow$ $a_1 = a$ – целое

$a_2 - a_1 = a + b - a = b$ – целое

Ответ: $a \in \{-5;-4;-2;-1\}$

№ 3 Чистовик (3)

$$a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 14a+2b \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$$

Тогда вся система имеет вид $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases}$

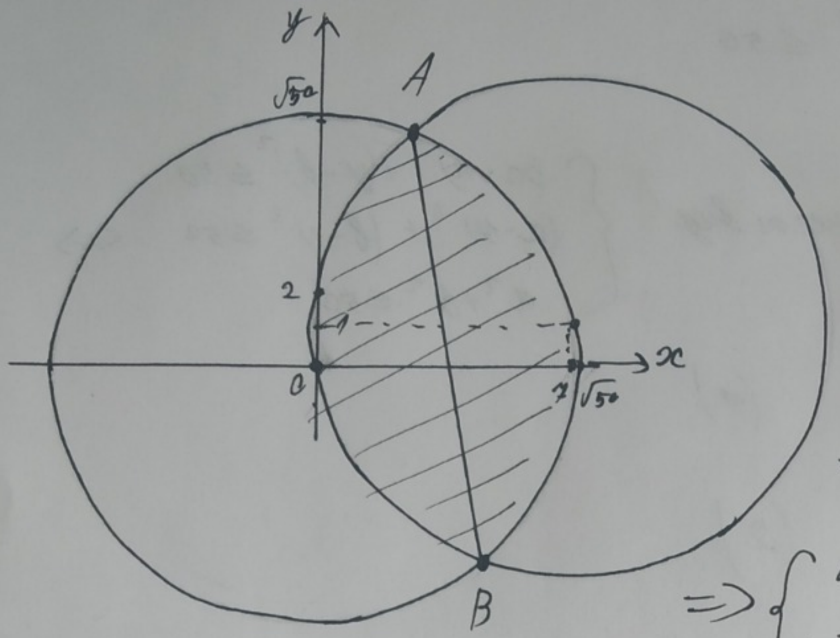
Множеством решений будет множество кругов радиуса $5\sqrt{2}$, центры которых расположены в круге с центром в точке $\begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases}$ и радиусом $5\sqrt{2}$. Тогда множество решений это круг с центром в $(7;1)$ и радиусом $5\sqrt{2}+5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

(2) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$

Аналогично предыдущему случаю определяем, что множество решений – круг с центром в $(0;0)$ и радиусом $(5\sqrt{2}+5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$

Чистовик ④

Тогда итоговое множество решений является пересечением этих двух кругов:



Координаты точек A и B найдём из системы

$$\begin{cases} a^2+b^2=50 \\ \cancel{a^2+b^2}=(a-7)^2+(b-1)^2=50 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=50 \\ -14a+49-2b+1=\cancel{50}0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=50 \\ \cancel{14a-2b=-50} \\ -14a-2b=-50 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=50 \\ b=25-7a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+625-350a+49a^2=50 \\ b=25-7a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10a^2-70a+115=0 \\ b=25-7a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-7a+11,5=0 \\ b=25-7a \end{cases}$$

$$a=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot 11,5}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{49-46}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$|a_1-a_2|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$$

$$|b_1-b_2|=7|a_1-a_2|+25-25=7\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB^2=3+49\cdot 3=150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB=5\sqrt{6}$$

21104041 (U202153 M1304532)

Чистовик 5

Введем формулу для введения площади такой фигуры:

$$l = 2r \cdot \sin\alpha \Rightarrow h = r\cos\alpha \Rightarrow S_{\triangle} = \frac{lh}{2} =$$

$$= r^2 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}$$

$$S_{\phi} = \pi r^2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} - \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{\pi} - \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} l = 5\sqrt{6} \\ r = 5\sqrt{2} \end{matrix}\right| \Rightarrow 2\sin\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\phi} = \pi \cdot 50 \cdot \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} - \frac{50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 50\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

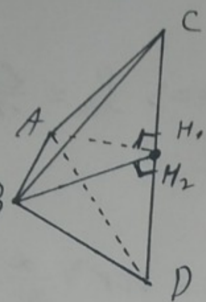
Тогда площадь множества решений равна

$$2 \cdot S_{\phi} = 100\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}$$

Ответ: $S = \frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}$

Чистовик (6)

№ 2



1) $BC = AC$
CD – общая
$AD = DB$
$\Rightarrow \triangle CBD = \triangle CAD$ (по 3-м сторонам) $\Rightarrow AH_1 = BH_2$ (соответственные высоты)

2) $AC = BC$
$AH_1 = BH_2$
$\Rightarrow \triangle CAH_1 = \triangle CBH_2$ (по катету и гипотенузе) $\Rightarrow CH_1 = CH_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow H_1 = H_2 = H$

3) $BH \perp CD$
$AH \perp CD$
$\Rightarrow (ABH) \perp CD$
$OO_1 \parallel CD$
$\Rightarrow (ABH) \perp OO_1 \Rightarrow$ окружность, которая описана вокруг ABH имеет радиус цилиндра. Этот радиус минимален, если AB – диаметр. $\Rightarrow \angle AHB = 90°$

4) $\angle AHB = 90°$
$AH = HB$
$\Rightarrow BH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

5) $BH \perp CD$
$BC = 5$
$BD = 7$
$BH = 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ $CH = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$
$DH = \sqrt{49 - 8} = \sqrt{41}$

Если C и D лежат по одну сторону от точки H, то $CD = DH - CH = \sqrt{41} - \sqrt{17}$, а если по разные стороны, то $CD = DH + CH = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Ответ: $CD = \sqrt{41} + \sqrt{17}$ или $CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

21104041 (U202153 M1304532)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

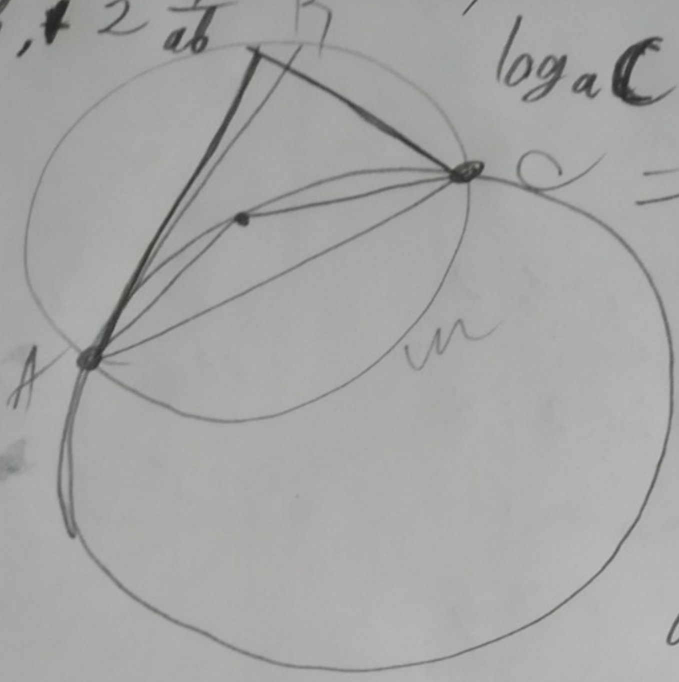
Шифр: **21104041**

ID профиля: **202153**

Вариант 22

Черновик

$\frac{1}{2}a,\ 4b,\ 2\frac{1}{ab}$



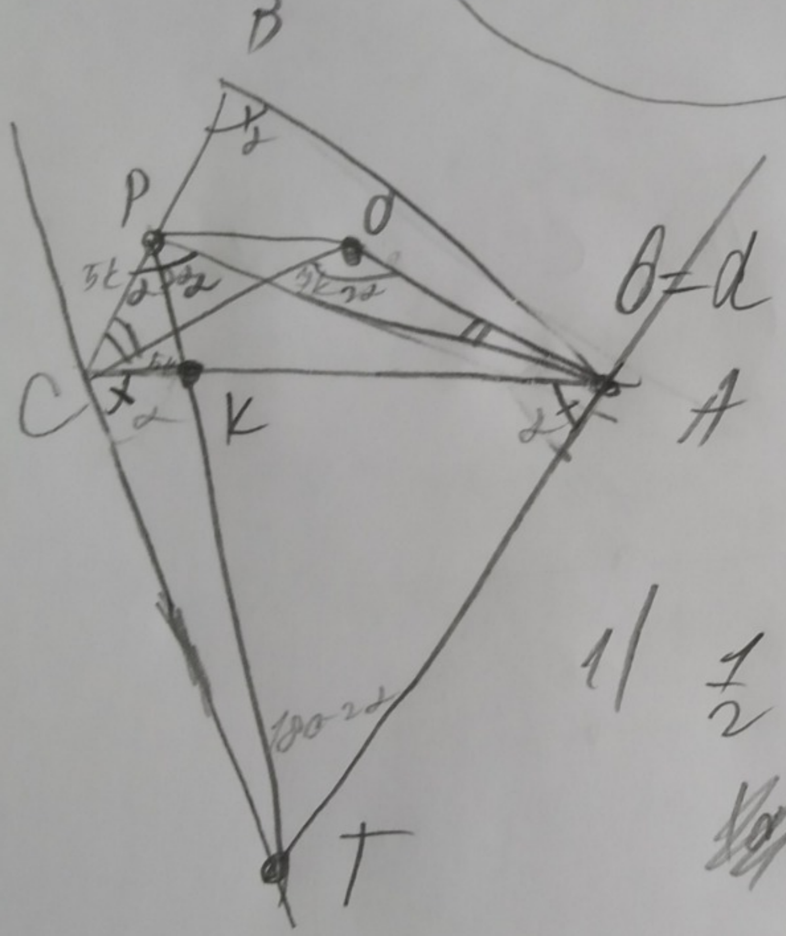
$\log_a c : \log_a b =$

$=$

$c = \frac{3x-12}{2}$

$a = \frac{x}{2}+1$

$b = \frac{11x-17}{2}$



$b = a^{\log_a b}$

$= b^{\log_b a \log_a b} =$

$= b^{\log_b a \cdot \log_a b} = 1$

1) $\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c$

$\frac{1}{8\log_b a} = \log_b c$

$4\log_b c = 2\log_c a + 1$

$a^{\log_a c} = c = b^{\log_b c} = a^{\log_a b \cdot \log_b c}$

21104041 (U202153 M1304533)

Черновик

№ 5

$\frac{x}{2}+1 \neq 0$ $\quad t \neq 1$

$\frac{x}{2} \neq -2, -1, 0$

$x \neq -4; -2; 0$

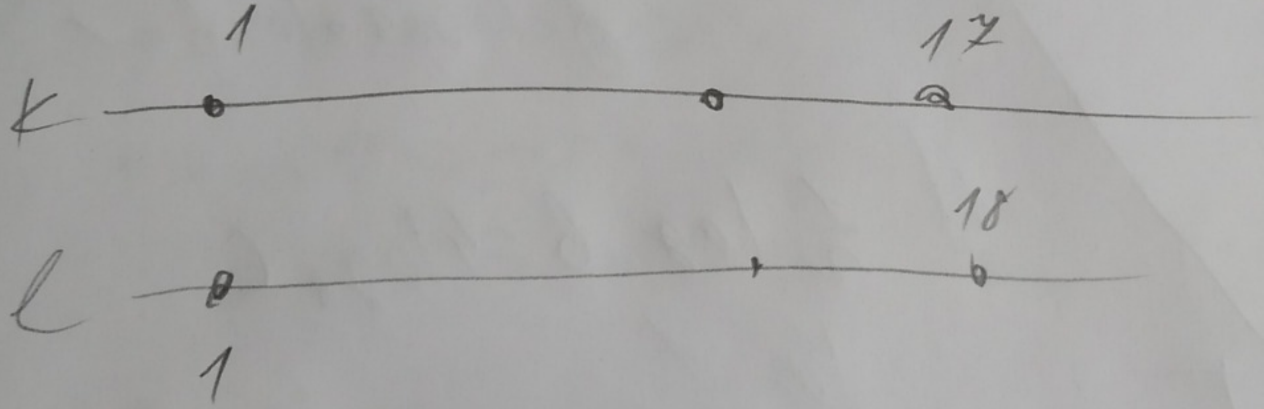
$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} \geq 0$

$14x \geq 17$

$x \geq \frac{17}{14}$

$x \neq \frac{17}{3}$ $\quad x > 4$

$\frac{1}{2} \log_a b, \; 4 \log_b c, \; 2 \log_c a$



$3 + 3 + 6 \cdot 15 = 96$

$3 + 3 + 6 \cdot 16 = 102$

21104041 (U202153 M1304533)

Черновик

1) $\begin{cases} \frac{1}{2}a = 4b \\ 4b = \frac{2}{ab} + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 8b \\ 4b = \frac{2}{8b^2} + 1 = \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 8b \\ 32b^3 - 8b^2 - 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 8b \\ 16b^3 - 4b^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 8b \\ (2b - 1)(8b^2 + 2b + 1) = 0 \end{cases}$

$b = \frac{1}{2}$ $\quad (b + \frac{1}{8})^2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = 0$

$\varnothing$

$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$

$\begin{cases} \left(\frac{x+2}{2}\right)^4 = \left(\frac{14x-17}{4}\right) \\ \sqrt{\frac{14x-17}{4}} = \frac{3x-12}{2} \end{cases}$

$14x - 17 = 9x^2 - 72x + 144$

$9x^2 - 86x + 161 = 0$

Черновик (1)

№4

НОК $= 2^{17} \cdot 7^{18}$, значит каждое из чисел имеет вид $2^k \cdot 7^l$. При этом НОД $= 14 = 2 \cdot 7$, значит любое из чисел делится на 14 => k и l – натуральные. НОД $= 2^1 \cdot 7^1$, значит есть число, у которого $k = 1$, а ~~есть~~ есть такое, у которого $l = 1$.

Из НОК $= 2^{17} \cdot 7^{18}$ следует, что $k \leq 17$, $l \leq 18$, а также у нас среди ~~чисел~~ есть с $k = 17$ и $l = 18$

~~1) Есть 2 числа с $k = 17$~~

~~• $n_1 = 2^{17} \cdot 7^l$, $n_2 = 2^{17} \cdot 7^{18}$, $n_3 = 2 \cdot 7$~~

~~• $n_1 = 7 \cdot 2^{17}$, $n_2 =$~~

~~Обозначи~~ Пусть $k_1 \leq k_2 \leq k_3$, $l_1 \leq l_2 \leq l_3$ => $l_1 = k_1 = 1$, $k_3 = 17$, $l_3 = 18$

Количество способов распределить k_1, k_2, k_3 между a, b и c равно 3 при $k_2 = 1$ и $k_2 = 17$ и равно 6 при остальных $k_2 \in [2; 16]$ => $n_k = 3 + 3 + 6 \cdot 15 = 96$

Количество способов распределить l_1, l_2, l_3 между a, b и c равно 3 при $l_2 = 1$ и $l_2 = 18$ и равно 6 при $l_2 \in [2; 17]$ => $n_l = 3 + 3 + 6 \cdot 16 = 102$

Тогда количество троек равно $n_k \cdot n_l =$

$= 96 \cdot 102 = 9792$

Ответ: 9792

№5 Чистовик (2)

~~log~~ $a = \log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $b = \log_{\sqrt{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}}\left(\frac{3x}{2}-6\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{1}{ab}$

Изначально даны числа $\frac{1}{2}a$, $4b$ и $\frac{2}{ab}$

1) $\frac{1}{2}a = 4b = \frac{2}{ab}+1$

$$\begin{cases} a = 8b \\ 4b = \frac{2}{ab}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8b \\ 4b = \frac{1}{4b^2}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8b \\ \frac{16b^3-4b^2-1}{4b^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 8b \\ (2b-1)(8b^2+2b+1) = 0 \end{cases}$$

Т.к. $8b^2+2b+1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{ab} = \frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2}a = \frac{2}{ab} = 4b+1$

$$\begin{cases} \frac{a^2b-4}{2ab} = 0 \\ \frac{1}{2}a = 4b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2b = 4 \\ \frac{1}{2}a = 4b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{a^2} \\ \frac{1}{2}a = \frac{16}{a^2}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{a^2} \\ a^3-2a^2-32 = \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{a^2} \\ (a-4)(a^2+2a+8) = 0 \end{cases}$$

$a^2+2a+8 \neq 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{ab} = 1$

3) $4b = \frac{2}{ab} = \frac{1}{2}a+1$

$$\begin{cases} \frac{4ab^2-2}{ab} = 0 \\ 8b-a-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ab^2 = 1 \\ 8b-a-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2b^2} \\ 8b-\frac{1}{\ldots}-2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Чистовик

③

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2b^2} \\ 16b^3 - 4b^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2b^2} \\ (2b-1)(8b^2+2b+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \frac{1}{ab} = 1$$

~~(1)~~ $\cancel{b = \frac{1}{2},\ a = 4}$

$$\cancel{a = 4 \Rightarrow \left(\frac{x+2}{2}\right)^4 = \frac{14x-17}{4}}$$

$$\cancel{\frac{x^4 + 4\cdot x^3\cdot 2 + 6\cdot x^2\cdot 4 + 4x\cdot 8 + 16}{4} = 14x - 17}$$

$$\cancel{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = 56x - 68}$$

$$\cancel{x^4 + 8x^3 + 24x^2 - 24x + 84 = 0}$$

(1) $\boxed{b = \frac{1}{2} \text{ и } a^2 b = \frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}} = \frac{3x}{2} - 6 \\ \sqrt{\frac{3x}{2} - 6} = \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14x - 17}{4} = \frac{9x^2 - 72x + 144}{4} \\ \frac{3x-12}{2} = \frac{x^2+4x+4}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 86x + 161 = 0 \\ x^2 - 2x - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{86 \pm \sqrt{86^2 - 4\cdot 161\cdot 9}}{18} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+80}}{2} \end{cases}$$

Эти уравнения не имеют общих корней

21104041 (U202153 M1304533)

(2) $\frac{1}{ab}=1$, $a=4$

$\frac{3x}{2}-6=\frac{x}{2}+1$

$x=7$

$a=4 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}+1\right)^4=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$

$\left(\frac{9}{2}\right)^4=\frac{81}{4}$

$\left(\frac{81}{4}\right)^2=\frac{81}{4}$

$\varnothing$

(3) $\frac{1}{ab}=1$, $a=2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x=7$ $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$

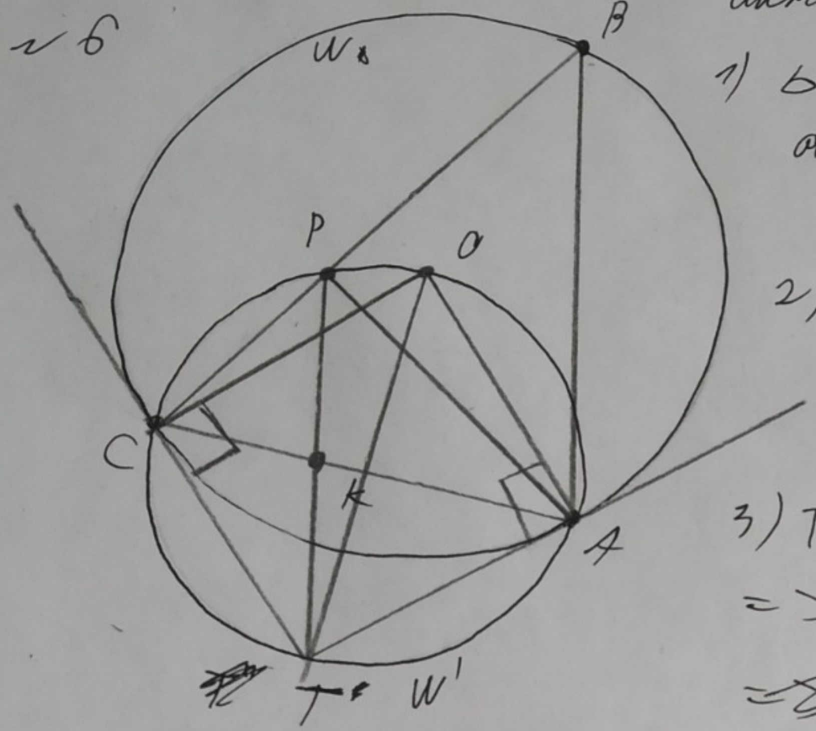
$\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$

$\frac{81}{4}=\frac{81}{4}$

Ответ: $x=7$

Чистовик 5

№6



1) $\triangle APK$ и CPK имеют общую высоту $\Rightarrow$

$\Rightarrow CK : KA = 5 : 7$

2) $C, P, O, A \in w' \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CPA = \angle COA =$

$= 2 \cdot \angle ABC \Rightarrow$

3) TA — касат к $w \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAT = \angle ABC \Rightarrow$

$\cancel{= 8 \angle ABC =}$

4) $OC \perp CT \Rightarrow \angle OCT = 90^\circ$

5) $\left.\begin{array}{l} \angle OCT = 90^\circ \\ \angle OAT = 90^\circ \end{array}\right| \Rightarrow$ O, C, A, T лежат на одной окружности

$\Rightarrow T \in w' \Rightarrow \angle CAT = \angle CPT \Rightarrow \angle ABC = \angle CPT \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CPT = \angle APT = \angle ABC$