Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103601**

ID профиля: **900633**

Вариант 22

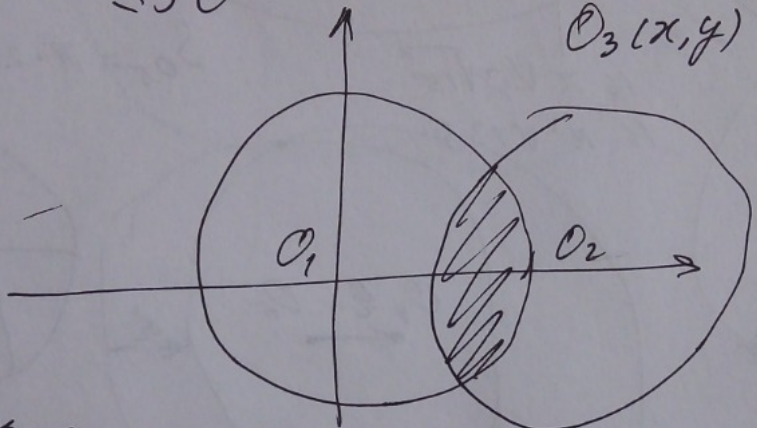
Черновик.

$\cancel{(x-a)^2+(b-a)^2}$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50 \quad (1)\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,\ 50)\end{cases}$$

$$a^2+b^2\le \min(14a+2b,50) \Longleftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2\le 14a+2b\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 49+1=50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$$

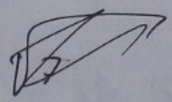


(1) ~~задаёт~~ задаёт окр. с центром (x,y)

Нужно, чтобы эта окружность имела общие точки с обеими окр. $\Longleftrightarrow \begin{cases}O_3O_1\le 2\cdot 5\sqrt{2}\\ O_3O_2\le 2\cdot 5\sqrt{2}\end{cases}$

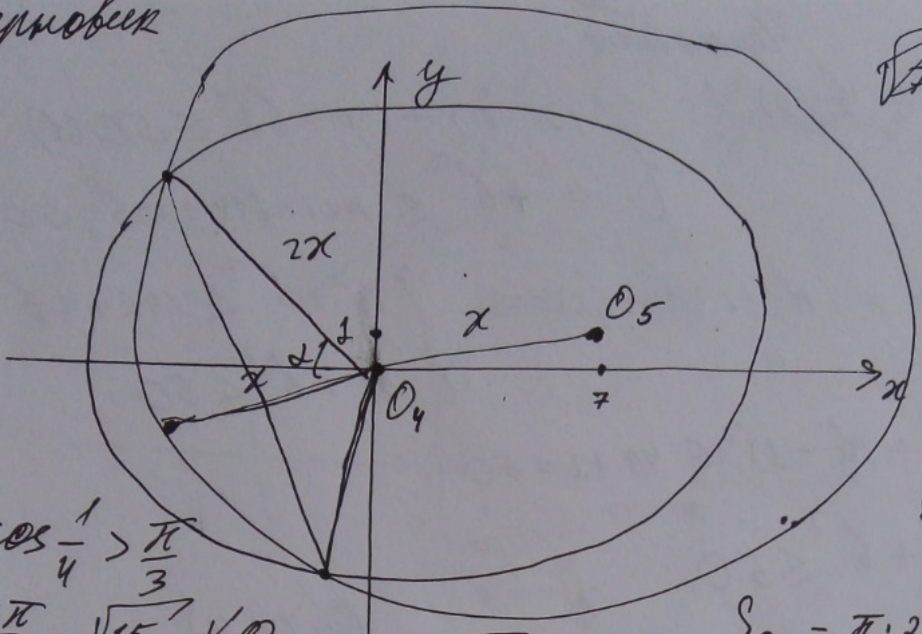
$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le 10\sqrt{2}\\ \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}\le 10\sqrt{2}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{matrix}x^2+y^2\le 200\\ (x-7)^2+(y-1)^2\le 200\end{matrix}$$

Черновик



$750 \,|\, \underline{25}$
$ 30$

$750 = 30 \cdot 25$



$9 \cdot 15 = 90 + 45 =$
$= 135$

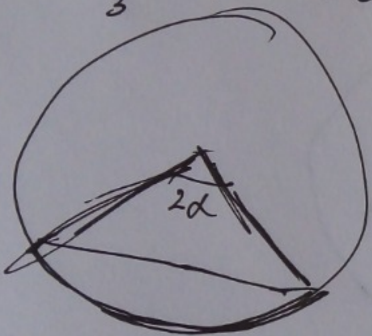
$\arccos\frac{1}{4} > \frac{\pi}{3}$

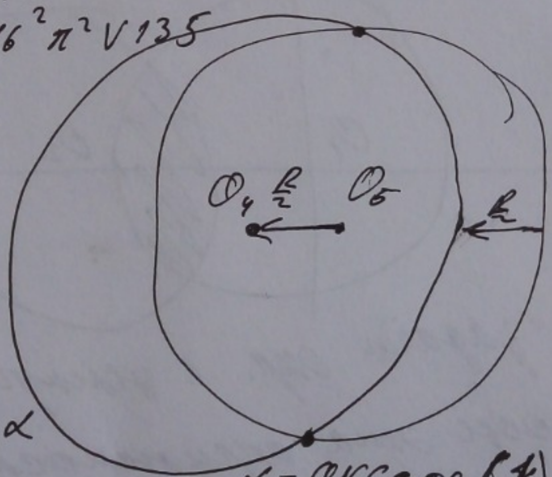
$\frac{16\pi}{3} - \sqrt{15} \vee 0$

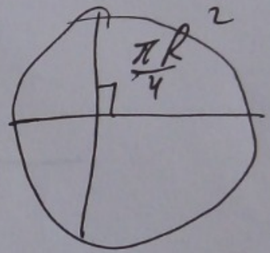
$16\pi \vee 3\sqrt{15}$

$16^2\pi^2 \vee 135$

$S_{O_5} = \pi \cdot 200 = 200\pi$







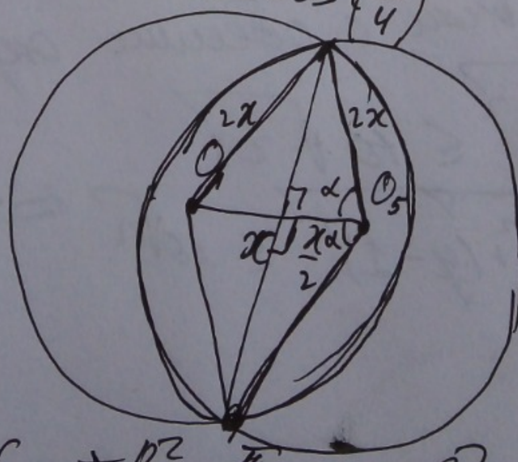
$\pi R^2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} = R^2 \alpha$

$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

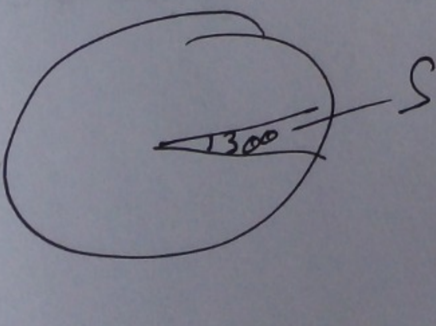
$\cos\alpha = \frac{\frac{x}{2}}{2x} = \frac{1}{4}$

$\frac{\pi R^2}{4} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi} R^2 =$

$= \frac{\pi R^2}{4}$

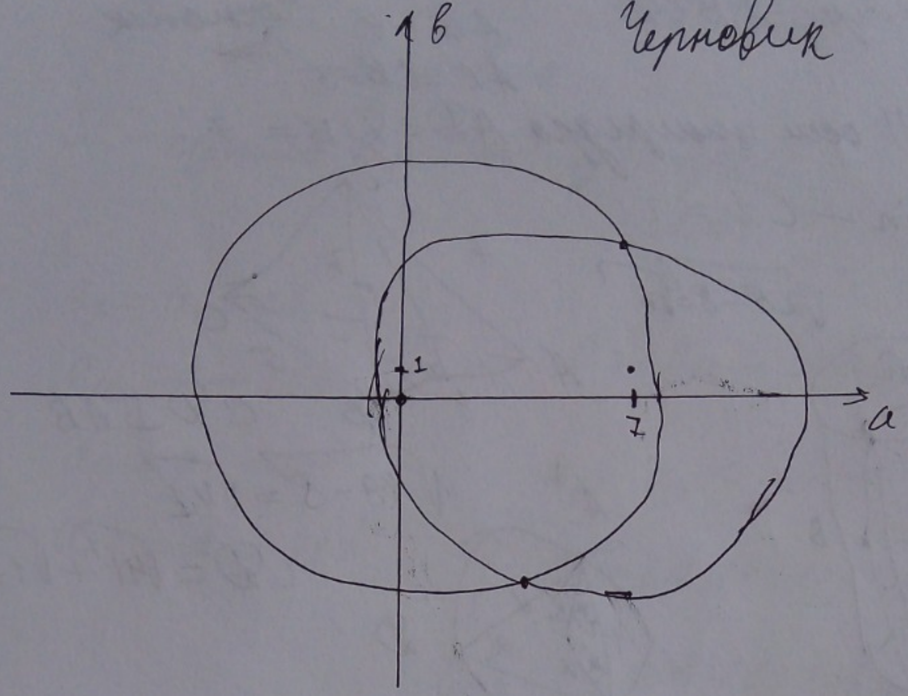


$S = \pi R^2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} =$
$= \frac{\pi R^2}{12}$



$S = \cancel{\pi} R^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{6}}{2\cancel{\pi}} = \frac{\pi R^2}{12}$

Черновик



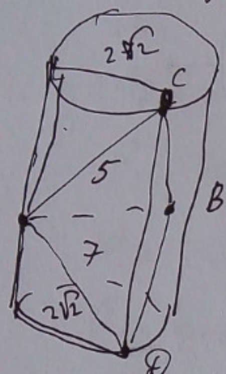
№2. тетр. $ABCD$ $AB=4$ Черновик

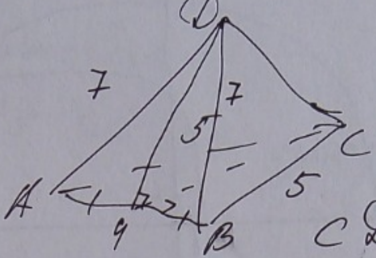
$AC=CB=5$

$CD \parallel$ оси цилиндра $AD=DB=7$

R – min – $CD=?$

$\sqrt{25-8}=\sqrt{17}$

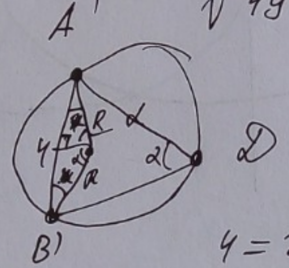




$CD \perp AB$

$\sqrt{49-8}=\sqrt{41}$

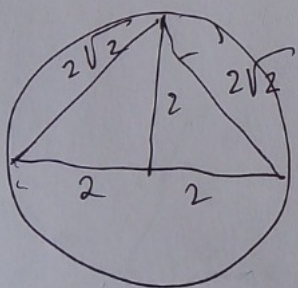
$CD=\sqrt{41}+\sqrt{17}$

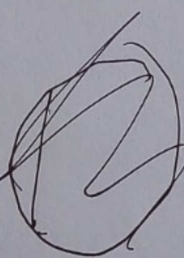


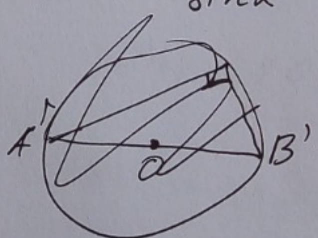
$4=2R\sin\alpha \quad \sin\alpha \le 1$

$R\sin\alpha=2$

$R=\dfrac{2}{\sin\alpha}\ge 2$







№3.

окр. (a,b) рад. $5\sqrt{2}$.

$(x,y) \to$ цел. (a,b) такие, что $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,50)\end{cases}$

$a^2+b^2\le 14a+2b$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 49+1=50$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

$\begin{cases}a^2+b^2\le 14a+2b\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$

21103601 (U900633 M1300941)

Черновик $a_i \in \mathbb{Z}$

S – сумма 15 чл. ар. прог.

$a_1 = ?$

$a_7 = a_1 + 6d$ $a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$a_{11} = a_1 + 10d$ $a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+15d) > \frac{2a_1+14d}{2} \cdot 15 - 24 \\ (a_1+10d)(a_1+12d) < \frac{2a_1+14d}{2} \cdot 15 + 4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2 + 21a_1 \cdot d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 22a_1 d + 120d^2 < 15a_1 + 105d + 4\end{cases}$$ (+)

$15a_1 + 105d + 4 > a_1^2 + 22a_1 d + 120d^2$

$\cancel{a_1^2} + 21a_1 \cdot d + 90d^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{105d} + 4 > \cancel{a_1^2} + 22a_1 d + 120d^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{105d} - 24$

$30d^2 + a_1 d - 28 < 0$

$\cancel{d \neq a_1^2 \# 1}$

$a_{16}(a_7 - 1)$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$S + 4 > a_{11} \cdot a_{12}$

$a_7 \cdot a_{16} + 4 > a_{11} \cdot a_{12} - 24$

$(a_{11} - 4d)(a_{12} + 4d) + 4 > a_{11} \cdot a_{12} - 24$

$\cancel{a_{11}a_{12}} - 4d(a_{12} - a_{11}) - 16d^2 + 4 > \cancel{a_{11}a_{12}} - 24$

$\cancel{-4} \cancel{12d^2} - 20d^2 > -28$ $20d^2 < 28$

21103601 (U900633 M1300941)

Черновик $a_i \in \mathbb{Z}$

S – сумма 15 чл. ар. прогр.

$a_1 = ?$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > \frac{2a_1+14d}{2} \cdot 15 - 24 \\ (a_1+10d)(a_1+12d) < \frac{2a_1+14d}{2} \cdot 15 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 22a_1 d + 120d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases} \quad (+)$$

$15a_1 + 105d + 4 > a_1^2 + 22a_1 d + 120d^2$

$\cancel{a_1^2} + 21a_1 d + 90d^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{105d} + 4 > \cancel{a_1^2} + 22a_1 d + 120d^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{105d} - 24$

$30d^2 + a_1 d - 28 < 0$

$a_{16}(a_7 - 1)$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$S + 4 > a_{11} \cdot a_{12}$

$a_7 \cdot a_{16} + 4 > a_{11} \cdot a_{12} - 24$

$(a_{11} - 4d)(a_{12} + 4d) + 4 > a_{11} \cdot a_{12} - 24$

$\cancel{a_{11}a_{12}} - 4d(a_{12} - a_{11}) - 16d^2 + 4 > \cancel{a_{11}a_{12}} - 24$

$-20d^2 > -28 \quad 20d^2 < 28$

Черновик

$d>0$

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+15)>(a_1+7)\cdot 15-24\\ (a_1+10)(a_1+11)<(a_1+7)\cdot 15+4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+21a_1+90>15a_1+105-24\\ a_1^2+21a_1+110<15a_1+105+4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+6a_1+9>0 \quad a\neq -3\\ a_1^2+6a_1+1<0\end{cases}$$

$20d^2<28$

$d^2<\frac{28}{20}$

$d=1$

$-3-2\sqrt{2}$

$\frac{D}{4}=9-1=8$

$a_1=-3\pm 2\sqrt{2}$

$a\in\{-5;-4;,\ldots-1\}$

-6 $\quad -3-2\sqrt{2} \quad -1 \quad -3+2\sqrt{2}$

$-3-2\sqrt{2} \overset{<}{\vee} -5$

$\cancel{2}\; 2 \vee 2\sqrt{2}$

$4 \vee 8$

$\quad <$

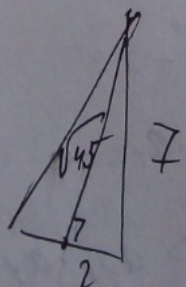
$-1 \overset{<}{\vee} -3+2\sqrt{2}$

$2 \vee 2\sqrt{2}$

$4 \underset{<}{\vee} 8$

$a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}$

$3\sqrt{5}+\sqrt{21}$



$CD<\sqrt{45}+\sqrt{21}$

Чистовик. 11 класс, вар. 22

№1

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases}$$

d – разность прогр.

$d \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ S + 4 > a_{11} \cdot a_{12} \end{cases} \oplus \rightarrow a_7 \cdot a_{16} + 4 > a_{11} \cdot a_{12} - 24$$

$$(a_{11} - 4d)(a_{12} + 4d) + 4 > a_{11} a_{12} - 24$$

$$\cancel{a_{11} \cdot a_{12}} - 4d(\underbrace{a_{12} - a_{11}}_{=d}) - 16d^2 + 4 > \cancel{a_{11} \cdot a_{12}} - 24$$

$a_{12} - a_{11} = d$

$$-20d^2 + 4 > -24$$

$$S = \frac{2a_1 + 14}{2} \cdot 15 = 15a_1 + 105$$

$$20d^2 < 28$$

$$d^2 < \frac{28}{20} \Rightarrow d = 1$$

$a_7 = a_1 + 6$, $a_{11} = a_1 + 10$,

$a_{12} = a_1 + 11$, $a_{16} = a_1 + 15$

$$\begin{cases} (a_1 + 6)(a_1 + 15) > 15a_1 + 105 - 24 \\ (a_1 + 10)(a_1 + 11) < 15a_1 + 109 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3 \\ (a_1 - (-3 + 2\sqrt{2}))(a_1 - (-3 - 2\sqrt{2})) < 0 \end{cases}$$

$$2 < 2\sqrt{2} < 3$$

$$-1 < -3 + 2\sqrt{2} < 0$$

$$-6 < -3 - 2\sqrt{2} < -5$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

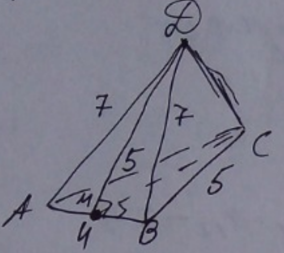
Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

1

21103601 (U900633 M1300941)

№2.

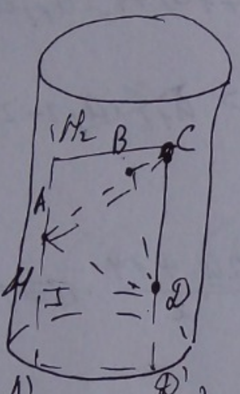


$\triangle DAB$, $\triangle CAB$ – равнобедренные

Пусть M – середина AB

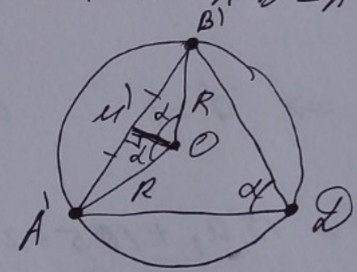
$DM \perp AB,\ CM \perp AB \Rightarrow (DMC) \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp CD$



Спроецируем точки D, A, B на пл. нижнего основания.

Пр. CD перпенд. этой плоскости. Тогда AB параллельна этой плоск. $\Rightarrow A'B' = AB$



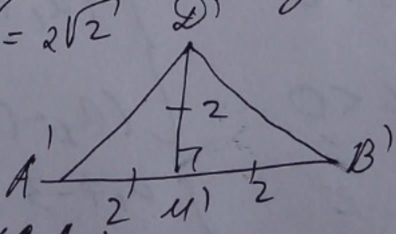
Пусть $\alpha = \angle B'OM'$

$A'B' = AB = 2R\sin\alpha$

$2R\sin\alpha = 4 \Rightarrow R = \dfrac{2}{\sin\alpha} \geq 2$

При $R = 2$, $O \equiv M'$, $A'B'$ – диаметр.

$D'A' = D'B' = \sqrt{2AM^2} = 2\sqrt{2}$



DH – перпенд. из D на AA'. по теор. Пифагора:

$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{AD^2 - D'A'^2} = \sqrt{49 - 8} = \sqrt{41}$

т.к. проекции точек C и D совпадают, аналогично получим $C'A' = C'B' = 2\sqrt{2}$

CH_2 – перпенд. из C на $A'A$.

$AH_2 = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$

Цветовик 11 класс, 22 вар.

№2 – продолж.

Если $A \in [HH_2]$, то $CD = AH + AH_2 = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

Если $A \notin [HH_2]$, то $CD = |AH - AH_2| = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

$DM = \sqrt{49 - 4} = 3\sqrt{5}$ По нер-ву треуг.:

$CM = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$ $CD < DM + CM = \sqrt{45} + \sqrt{21}$

$\sqrt{45} + \sqrt{21} > \sqrt{41} - \sqrt{17}$

$\sqrt{45} + \sqrt{21} > \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Оба случ. возможны

Ответ: $CD = \sqrt{41} \pm \sqrt{17}$.

3

Чистовик 11 класс, 22 вар.

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b; 50) \end{cases}$$

$$a^2+b^2 \le \min(14a+2b; 50) \iff \begin{cases} a^2+b^2 \le 14a+2b \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 50 \quad (1) \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \quad (2) \\ a^2+b^2 \le 50 \quad (3) \end{cases}$$

Все три ур-я задают ~~окр.~~ круги в пл. Oab с радиусами $5\sqrt{2}$.

Ур-е (1) – ~~окр.~~ круг с центром $O_1(x, y)$

Ур-е (2): ~~окр.~~ круг с центром $O_2(7, 1)$

Ур-е (3): круг с центром $O_3(0; 0)$

$$O_2O_3 = \sqrt{(7-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{50} < R_2+R_3 = 10\sqrt{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ круги (2) и (3) пересекаются. Пара (a, b) будет существовать, если круг (1) пересекает оба круга (2) и (3)

$$\begin{cases} O_1O_2 \le 10\sqrt{2} \\ O_1O_3 \le 10\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2} \le 10\sqrt{2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \le 10\sqrt{2} \end{cases} \iff$$

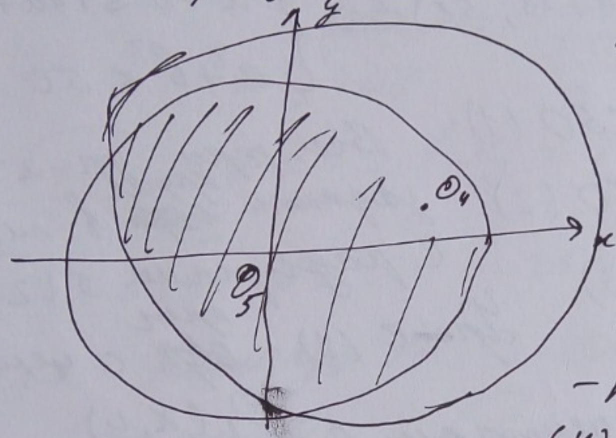
$$\iff \begin{cases} (x-7)^2+(y-1)^2 \le 200 \quad (4) \\ x^2+y^2 \le 200 \quad (5) \end{cases}$$

4

Чистовик 11 класс, 22 вариант

№3 - продолж. ~~#~~1

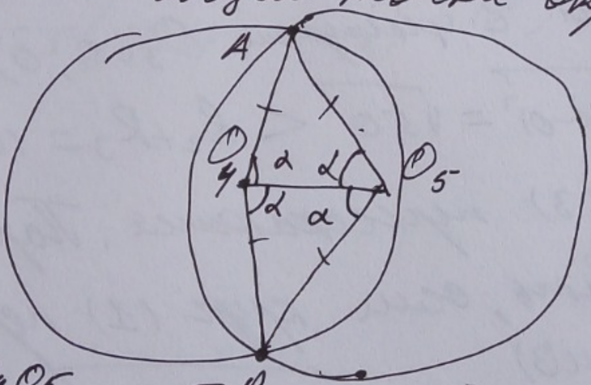
Ур-е (4) задаёт в пл. Oxy круг с центром $O_4(7,1)$ и рад. $10\sqrt{2}$, ур-е (5) - круг с центром $O_5(0,0)$ и рад. $10\sqrt{2}$



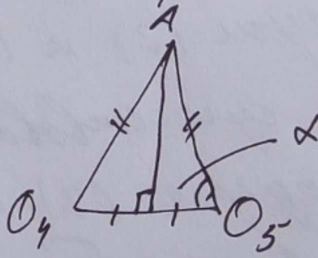
$O_4O_5 = 5\sqrt{2} < 20\sqrt{2} \Rightarrow$ круги пересекаются, при этом O_4 лежит внутри круга (5), а O_5 - внутри круга (4)

Тогда фигура M - пересечение кругов (4) и (5)

Пусть A и B общие точки окруж. (4) и (5)



$O_4A = O_5A = O_4B = O_5B = 10\sqrt{2}$



$$\cos\alpha = \frac{\frac{O_4O_5}{2}}{O_5A} = \frac{5\sqrt{2}}{2\cdot 10\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

Площадь фигуры M равна сумме площадей секторов O_5AB и O_4BA (S_1 и S_2) минус площадь ромба AO_4BO_5 (S_3) (общая часть этих секторов)

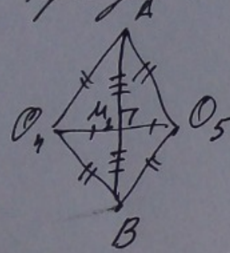
$$S_1 = S_2 = \pi R^2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} = \cancel{\pi} R^2 \cdot \frac{\alpha}{\cancel{\pi}} = 200\cdot\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot O_4O_5$$

5

Чистовик 11 класс, 22 вариант

№3 - продолж.



Пусть M_1 - середина O_4O_5

$AM_1 \perp O_4O_5$

$BM_1 = AM_1 = \sqrt{AO_5^2 - \frac{O_4O_5^2}{4}} =$

$= \sqrt{200 - \frac{50}{4}} = \sqrt{\frac{750}{4}} =$

$= \frac{5\sqrt{30}}{2}$ $\quad AB = 2 \cdot AM_1 = 5\sqrt{30}$

$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{30} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 2\sqrt{15} = 25\sqrt{15}$

Тогда площадь M: $2 \cdot 200 \cdot \arccos\left(\frac{1}{4}\right) - 25\sqrt{15} =$

$= 25\left(16 \arccos\frac{1}{4} - \sqrt{15}\right)$

Ответ: $25\left(16 \arccos\left(\frac{1}{4}\right) - \sqrt{15}\right)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103601**

ID профиля: **900633**

Вариант 22

Черновик

№54.

$a \vdots 14,\ b \vdots 14,\ c \vdots 14$

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 14 \\ НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases} \quad (2^{17} \cdot 7^{18}) \vdots a, b, c$$

$a = 2^{n} \cdot 7^{m}$

$b = 2^{k} \cdot 7^{l}$ $\quad n, m, k, l, p, q \in \mathbb{N}$

$c = 2^{p} \cdot 7^{q}$

$\frac{a}{14} = 2^{n-1} \cdot 7^{m-1}$

$\frac{b}{14} = 2^{k-1} \cdot 7^{l-1}$ взаимно простые числа

$\frac{c}{14} = 2^{p-1} \cdot 7^{q-1}$ $\quad \min(m, l, q) = 1$

Без огр. общ.:

$n - 1 = 0 \quad n = 1$

$a = 2 \cdot 7^{m}$

$\min(n, k, p) = 1$

~~$\min(n-1, k-1, p-1) = 0$~~

~~$\min(m-1, l-1, q-1) \neq 0$~~

1. $m - 1 = 0 \quad a = 14$

$17, \ldots \overset{17}{\ldots}, 1$

$\max(m, l, q) = 18$

$\max(n, k, p) = 17$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right)$ $\quad \log_{\sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2} - 6\right)^2$

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2} - 6}}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 0 \\ x \neq -4 \\ \frac{7x}{2} > \frac{17}{4} \\ \frac{7x}{2} - \frac{17}{4} \neq 1 \\ \frac{3x}{2} - 6 > 0 \\ \frac{3x}{2} - 6 \neq 1 \end{cases}$$

$\frac{x}{2} + 1 > 0$

$\frac{7x}{2} \neq \frac{21}{4}$

$x \neq \frac{21 \cdot 2}{7 \cdot 4 \cdot 2} \neq \frac{3}{2}$

$\frac{3x}{2} > 6$

$x > 4$

$\frac{3x}{2} \neq 7$

~~З~~

Анаборов Г.

21103601 (U900633 M1300942)

Черновик.

~~4~~ 6 ~~слова~~ способов выбрать n, k и так

17 способов выбрать ~~первое~~ третье число

102 способа выбрать набор (n, k, p)

~~18~~ способов выбрать набор (m, l, q)

$18 \cdot 3 \cdot 2 = 108$ Числа (a, b, c) однознач. определяются наборами (n, k, p) и (m, l, q). При этом разным наборам соотв. разные тройки (a, b, c)

$102 \cdot 108 = 10800 + 216 = 11016$ $t, y, z > 0, \neq 1$

ОДЗ:

$\left(\frac{x}{2}+1\right) = t$

$\sqrt{\frac{3x}{2}-6} = y$

$\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}} = z$

$$\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 0, -4 \\ x > \frac{17}{7} \\ x \neq \frac{3}{2} \\ x > 4 \\ x \neq \frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \neq \frac{14}{3} \end{cases}$$

$\log_{t^2} z^2$, $\log_y \log_z y^4$, $\log_y t$

$\log_t z$ $\quad 4\log_z y$ $\quad \log_y t$

$\log_t z = 4\log_z y$

$\frac{1}{\log_z t} = \cancel{4}\log_z y^4$

$\log_z t \cdot \log_z y^4 = 1$

$\log_z t^{\log_z y^4} = 1$ $\quad \cancel{t^{\log_z y^4}} \neq z$

21103601 (U900633 M1300942)

$\log_t z,\ \log_z y^4,\ \log_y t$ Черновик

$\log_t z = \log_z y^4 = \dfrac{\log_t y^4}{\log_t z}$

$\log_t^2 z = \log_t y^4 = 4\log_t y = \dfrac{4}{\log_y t}$

$\dfrac{4}{\log_y t} - 1 = \log_y t = m$

$\dfrac{4}{m} - 1 = m$

$4 - m = m^2 \quad m^2 + m - 4 = 0,$

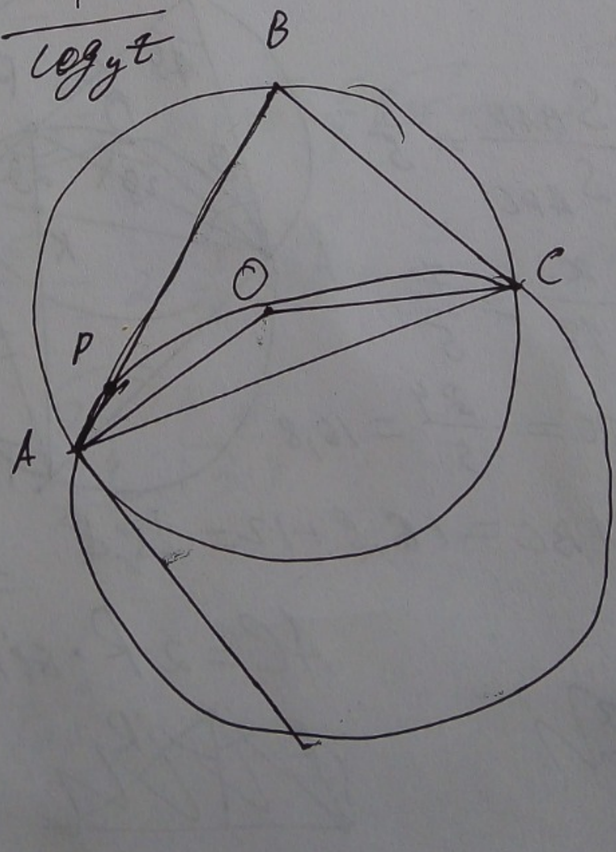
$m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$t = \dfrac{x}{2} + 1 > 2 + 1 = 3 > 1$

$z = \sqrt{\dfrac{7x}{2} - \dfrac{17}{4}} > \sqrt{14 - \dfrac{17}{4}} = \sqrt{\dfrac{56-17}{4}} = \dfrac{\sqrt{39}}{2} > 1$

$\log_t^2 z = \log_y t + 1$

$\dfrac{1}{\log_y t}$



21103601 (U900633 M1300942)

Черновик

$S_{APK}=7$

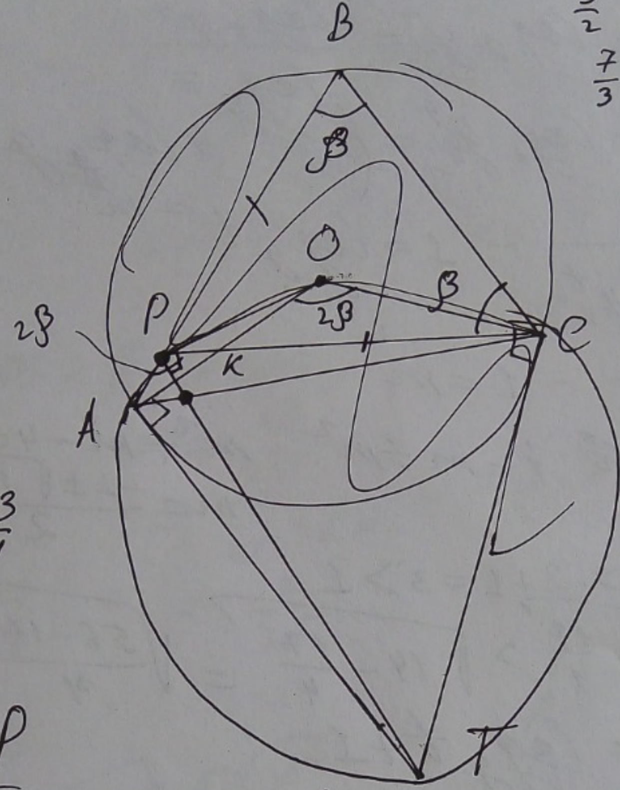
$S_{CPK}=5$

$S_{ABC}=?$

$\frac{AK}{CK}=\frac{7}{5}$

$\frac{7/2}{3/2} \vee \frac{6}{17/4}$

$\frac{7}{3} \quad \frac{24}{17}$



$S_{APC}=12$

$\frac{BP}{}$

$\beta=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

$AC=?$

$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{3}{4}$

$\sin\beta=\frac{3}{4}\cdot\cos\beta$

$\cos^2\beta+\frac{9}{16}\cos^2\beta=1$

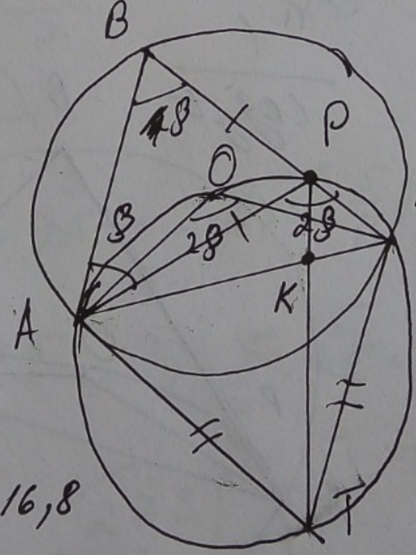
$\frac{25}{16}\cos^2\beta=1$

T – середина дуги AC

$\frac{BP}{AP}$

PT – биссектр.

$\frac{BP}{PC}=\frac{AP}{PC}=\frac{AK}{KC}=\frac{7}{5}$



$\frac{BP}{PC}=\frac{S_{BAP}}{S_{APC}}=\frac{7}{5}$

$\frac{x}{12}=\frac{7}{5}$

$x=\frac{84}{5}=16{,}8$

$S_{ABC}=16{,}8+12=28{,}8$

$\cos^2\beta=\frac{16}{25}$

$\cos\beta=\frac{4}{5}$

$\sin\beta=\frac{3}{4}$

$AC=2R\cdot\sin\beta$

~~$AC^2=2R^2-$~~

21103601 (U900633 M1300942)

Черновик

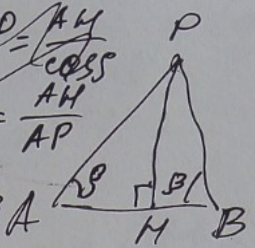
$BP = AP = \frac{4\sqrt{35}}{5}\cdot\frac{5}{4} = \sqrt{35}$

$AP = BP = \frac{AH}{\cos\beta}$

~~C8~~

$\cos\beta = \frac{AH}{AP}$

$AP = \frac{AH}{\cos\beta}$



$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 =$

$= 2\cdot\frac{16}{25} - 1 =$

$= \frac{32}{25} - 1 =$

$= \frac{7}{25}$

$PH = AH\cdot tg\beta =$

$= \frac{AB}{2}\cdot tg\beta$

$S = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot PH = \frac{AB^2}{4}\cdot tg\beta =$

$= \frac{84}{5}$

$\frac{BP}{PC} = \frac{7}{5}$

$PC = BP\cdot\frac{5}{7} =$

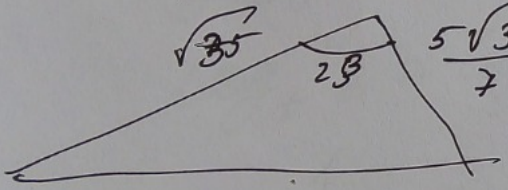
$= \frac{5\sqrt{35}}{7}$

$\frac{AB^2}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{84}{5}$

$AB^2 = \frac{84\cdot 16}{15} = \frac{(4\cdot 2\sqrt{21})^2}{15}$

$AB = \frac{8\sqrt{21}}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{7}}{\sqrt{5}} =$

$= \frac{8\sqrt{35}}{5}$



$AC^2 = 35 + \frac{25}{\cancel{49}_{7}}\cdot\cancel{35}^{5} - 2\cdot\sqrt{35}\cdot\frac{5}{7}\sqrt{35}\cdot\cos 2\beta$

$AC^2 = 35 + \frac{125}{7} - 2\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\cdot\cancel{35}^{5}\cdot\frac{7}{\cancel{25}} = 35 + \frac{125}{7} - 14 =$

$= 21 + \frac{125}{7} =$

$= \frac{147+125}{7} =$

$= \frac{272}{7} =$

$= \left(\frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{7}}\right)^2$

$272 : 8 = 34$
-24
$\overline{32}$
-32
$\overline{0}$

$2\cdot\frac{\cancel{35}^{7}\cdot\cancel{5}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{25}} =$

$272 : 16 = 17$
-16
$\overline{112}$

Черновик

$\log_t z = \log_y t$

$\log_t z = \cancel{\log_y} \frac{1}{\log_t y} = \log_z y^4 + 1$

$\cancel{\log_{\frac{t}{1}} z = \log_z (y^4 \cdot z)}$

$y > z \Rightarrow \log_y z < 1$

$\frac{3x}{2} - 6 > \frac{x}{2} + 1$

$\frac{3x}{2} - 6 > \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$

$x > 7$

$\log_t z = \log_y t = \frac{\log_z t}{\log_z y}$

$\log_z y = \log_z t \cdot \frac{1}{\log_t z} = \log_z^2 t$.

$\log_t^2 z = \log_y z = \frac{1}{\log_z y}$

$\frac{1}{\sqrt{\log_z y}} = 4\log_z y + 1$

$\log_z y = p$

$\frac{1}{p} = 4p^2 + 1$

$4p^3 + p - 1 = 0$

$4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = 0$

$(m - \frac{1}{2})(4m^2 + 2m + 2) = 4m^3 + 2m^2 + 2m - 2m^2 - m - 1 =$

$= 4m^3$

Черновик.

$\log_t z,\ \log_z y^4,\ \log_y t$

$\log_t z = \log_z y^4 = \frac{\log_t y^4}{\log_t z}$

$\log_t^2 z = \log_t y^4 = \frac{4}{\log_y t}$

$y = \sqrt{\frac{3x}{2} - 6}$

$t = \frac{x}{2} + 1$

$t > 1 => y > 1$

$\log_y t > 0$

$\frac{3x}{2} - 6 > 1$

$\frac{3x}{2} > 7$

$x > \frac{14}{3}$

$\sqrt{\frac{4}{\log_y t}} = \underbrace{\log_y t}_{=m} + 1$

$(m - \frac{1}{2})(4m^2 + 2m + 2) = 0$

$\cancel{4m^3 + 2m^2 + 1 - 2m^2 - 2m}$

$\frac{2}{\sqrt{m}} = m + 1 \quad |\cdot \sqrt{m}$

$2 = m\sqrt{m} + \underbrace{\sqrt{m}}_{=p}$

$p^3 + p - 2 = 0$

	1	0	1	−2
1	1	1	2	0

$(p-1)(p^2 + p + 2) = 0$

$p^3 + \cancel{p^2} + 2p - \cancel{p^2} - p - 2 = p^3 + p - 2$

$p = 1$

$\log_y t = 1$

$y = t$

$\sqrt{\frac{3x}{2} - 6} = \frac{x}{2} + 1 \quad |\cdot 4$

$\sqrt{3x - 12} = 2x + 4$

$3x - 12 = 4x^2 + 16x + 16$

$4x^2 + 13x + 28 = 0 \quad x > 0$ — нет реш.

21103601 (U900633 M1300942)

Чистовик. 11 класс, 22 вариант.

№4.

$$\begin{cases} НОД(a, в, c) = 14 = 2\cdot 7 \\ НОК(a, в, c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

Т.к. $2^{17}\cdot 7^{18} \vdots a, в, c$, то множество простых делителей a, в и c состоит только из 2 и 7,

Пусть $a = 2^n\cdot 7^m$, $в = 2^k\cdot 7^l$, $c = 2^p\cdot 7^q$

$n, m, k, l, p, q \in \mathbb{N}$

$$НОД(a, в, c) = 2\cdot 7 \iff \begin{cases} \min(n, k, p) = 1 \\ \min(m, l, q) = 1 \end{cases}$$

$$НОК(a, в, c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \iff \begin{cases} \max(\cancel{m}\, n, k, p) = 17 \\ \max(m, l, q) = 18 \end{cases}$$

Кол-во способов выбрать набор (n, k, p):

$3\cdot 2 = 6$ способов выбрать min и max

Оставшееся число ≥ 1, но $\leq 17 \Rightarrow$ его можно выбрать 17-ю способами

Всего способов для (n, k, p): $17\cdot 6 = 102$

Для (m, l, q) — min и max — $3\cdot 2 = 6$ способов

Оставшееся число — 18 способов

Всего для (m, l, q) — $6\cdot 18 = 108$

Способов выбрать набор (n, m, k, l, p, q):

$102\cdot 108 = 10800 + 216 = 11016$ способов

Т.к. $(a, в, c)$ однозначно находятся по (n, m, k, l, p, q) и каждому набору (n, m, k, l, p, q) соотв. единственный набор $(a, в, c)$, то наборов $(a, в, c)$ — 11016.

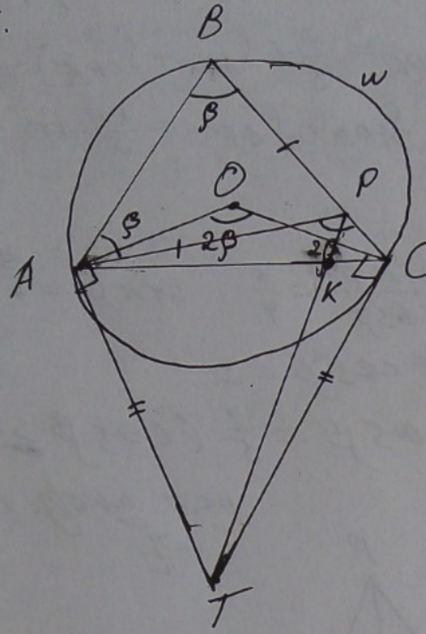
Ответ: 11016

1

21103601 (U900633 M1300942)

Чистовик 11 класс, 22 вариант

№6.



Дано: $\triangle ABC$ - остроуг.
w - опис. окр. $\triangle ABC$
точки A, O, P, C лежат на одной окр.
$K = [TP] \cap [AC]$
$S_{APK} = 7$
$S_{CPK} = 5$
а) $S_{ABC} = ?$
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$
$AC = ?$

Решение.

а) Пусть $\beta = \angle ABC$, $\triangle ABC$ - остроуг. $\Rightarrow$ O лежит внутри $\triangle ABC$. $\angle AOC = 2\beta$. $TA \perp OA$, $TC \perp OC$. Тогда в четырехуг. AOCT противоположные углы по $90°$ $\Rightarrow$ точка T лежит на окр. $\triangle AOC$. $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$. $\angle APC$ - внешний угол для $\triangle ABP \Rightarrow \angle APC = \angle ABC + \angle BAP \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAP = 2\beta - \beta = \beta \Rightarrow \triangle BAP$ - равнобедренный, $AP = BP$. $TA = TC$ (как отр. касательных из одной точки). Тогда T - середина дуги AC. Тогда $\angle APT = \angle CPT \Rightarrow PK$ - биссектр. $\angle APC$. По св-ву биссектр.:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{ACK}} = \frac{7}{5}$$

(2)

№6 - продолж. 1 Чистовик 11 класс, 22 вар.

$\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{7}{5} \Rightarrow S_{APB} = \frac{7}{5} S_{ADC} = \frac{7}{5}(S_{ABK} + S_{CPK}) =$

$= \frac{7}{5} \cdot 12 = \frac{84}{5}$. Тогда $S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} = \frac{84}{5} + 12 =$

$= \frac{144}{5} = 28{,}8$

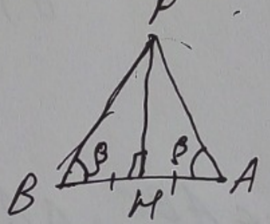
б) $\beta = arctg\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow tg\beta = \frac{3}{4}$ $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{3}{4}$ $\sin\beta = \frac{3}{4}\cos\beta$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ $\frac{9}{16}\cos^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$\frac{25}{16}\cos^2\beta = 1$ $\cos^2\beta = \frac{16}{25}$ $\cos\beta = \frac{4}{5}$ ($\cos\beta \geq 0$, т.к. $-\frac{\pi}{2} < arctg\, x < \frac{\pi}{2}$)

$\sin\beta = \frac{3}{5}$

Рассмотрим $\triangle BAP$:



PM – высота и медиана

$PM = BM \cdot tg\beta = \frac{AB}{2} \cdot tg\beta$

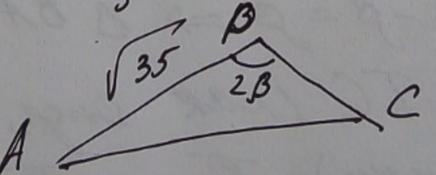
$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PM = \frac{AB^2}{4} \cdot tg\beta = \frac{84}{5}$

$AB^2 = \frac{\cancel{84}^{28}}{5} \cdot 4 \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = \left(\frac{8\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\right)^2$

$AB = \frac{8\sqrt{35}}{5}$

~~Рассм. $\triangle$~~ $AP = \frac{AM}{\cos\beta} = \frac{4\sqrt{35}}{5} \cdot \frac{5}{4} = \sqrt{35}$

Рассм. $\triangle APC$:



$\frac{AP}{PC} = \frac{7}{5}$

$PC = AP \cdot \frac{5}{7} = \frac{5\sqrt{35}}{7}$ $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 =$

$= \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$

По теор. косинусов:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos 2\beta$

3

21103601 (U900633 M1300942)

Чистовик. 11 класс, 22 вар.

№6 - продолж.2

$$AC^2 = 35 + \frac{25 \cdot \cancel{35}^{5}}{\cancel{49}_{7}} - 2 \cdot \sqrt{35} \cdot \frac{5\sqrt{35}}{7} \cdot \frac{7}{25}$$

$$AC^2 = 35 + \frac{125}{7} - 2 \cdot \frac{\cancel{35}^{7} \cdot 5}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{25}}$$

$$AC^2 = 35 + \frac{125}{7} - 14 = 21 + \frac{125}{7} = \frac{147+125}{7} = \frac{272}{7}$$

$$AC = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{7}}$$

Ответ: а) 28,8; б) $\frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{7}}$

4

21103601 (U900633 M1300942)

№5. Чистовик 11 класс, 22 вар.

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$,

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

ОДЗ:

$\begin{cases}(\frac{x}{2}+1)^2>0, \neq 1\\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0, \neq 1\\ \frac{3x}{2}-6>0, \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$

$t, z, y > 0, \neq 1$

$t=\frac{x}{2}+1$

$z=\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}$

$y=\sqrt{\frac{3x}{2}-6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x>4\\ x\neq \frac{14}{3}\end{cases}$

$\log_{t^2} z^2, \log_z y^4, \log_y t$

1 случ. $\log_{t^2} z^2=\log_t z=\log_z y^4=\log_y t+1$

$\log_t z=\log_z y^4=\frac{\log_t y^4}{\log_t z}$

$\log_t^2 z=\log_t y^4=\frac{4}{\log_y t}-\log_y t>0$

$\log_y t+1=\frac{2}{\sqrt{\log_y t}}$ $\quad p=\sqrt{\log_y t}>0$

$p^2+1=\frac{2}{p}$

$p^3+p-2=0 \quad (p-1)(p^2+p+2)=0$

$p^2+p+2>0$

$p=1$

$\log_y t=1 \Rightarrow y=t$

$\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=\frac{x}{2}+1 \mid \cdot 4$

$\sqrt{3x-12}=2x+4$

5

21103601 (U900633 M1300942)

Чистовик

11 класс, 22 вар.

№5 - продолж.

$3x-12 = 4x^2+16x+16$

$4x^2+13x+28=0$ — $D<0 \Rightarrow$ решений нет

$\cancel{2. \log_t z = \log_y t = \log_z y^4+1}$

$\cancel{\log_t z = \frac{\log_z t}{\log_z y}}$

$\cancel{\log_t^2 z = \frac{1}{\log_z y}}$.

$\cancel{2 \text{ случ. } \log_y t + 1 = \ldots^2}$

2. $\log_t z = \log_y t$

$$\log_t z = \frac{\log_z t}{\log_z y}$$

$$\log_t^2 z = \frac{1}{\log_z y} \quad — \quad \log_z y > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log_z y}} = 4\overbrace{\log_z y}^{=m^2}+1$$

$$\frac{1}{m} = 4m^2+1$$

$$1 = 4m^3+m$$

$$4m^3+m-1=0$$

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)(\overbrace{4m^2+2m+2}^{>0})=0$$

$$m=\frac{1}{2}$$

№5 – прод. Чистовик 11 кл., 22 вар.

$\log_z y = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_z y^4 = 1$

$y = \cancel{z^{\frac{1}{4}}}$

$\sqrt{\frac{27x}{2} - \frac{17}{4}} = \left(\frac{3x}{2} - 6\right)^2$

(7)

21103601 (U900633 M1300942)