# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103566**

ID профиля: **256648**

Вариант 22

№2 Черновик

AB=4, AC=CB=3, AD=DB=4

[illegible] угол CD-? R-min



$\angle ACB$-min

№1

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ (1) фиг. M сост. из $(x;y)$ $S_M$-?

$a^2+b^2 \le \min\ 14a+2b,\ 2$ (2)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) & (2)\end{cases}$$

из (2): $\begin{cases}a^2+b^2<14a+2b\\ a^2+b^2<50\end{cases}$

$a^2-14a+49-49+b^2-2b+1-1<0$

$(a-7)^2+(b-1)^2<50$

$$\begin{cases}a^2+b^2<50\\ (a-7)^2+(b-1)^2<50\end{cases}$$

21103566 (U256648 M1304614)

Черновик

№1.

S - сумма первых 15 членов

$a_7 a_{16} > S - 24$

$a_{11} a_{12} < S + 4$

$a_n \in Z$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$S_4 = 4a_1 + 6d$

найти все $a_1$

$S_4 =$

$\frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot a_n$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 105d + 15a_1$

$S = a_1 + d + 2d + 3d + 4d + 5d + 6d + 7d + 8d + 9d + 10d + 11d + 12d + 13d + 14d a_1$

$15d \cdot 7 = 105d$

$S = 105d + 15a_1$

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 105d + 15a_1 - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < 105d + 15a_1 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21da_1 + 90d^2 > 105d + 15a_1 - 24 \\ a_1^2 + 21da_1 + 110d^2 < 105d + 15a_1 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21da_1 + 90d^2 > 105d + 15a_1 - 24 \\ -a_1^2 - 21da_1 - 110d^2 > -105d - 15a_1 - 4 \end{cases} +$$

$-20d^2 > -28$

$20d^2 < 28$

$d^2 < \frac{7}{5}$

$d > 0$

$0 < d < \sqrt{\frac{7}{5}}$

d - ц.

$d = \{1,$

$d = 1$

① $\frac{5}{5}$ и $\sqrt{\frac{7}{5}}$

$\frac{25}{25} < \frac{7}{5}$

② $\frac{10}{5}$ и $\sqrt{\frac{7}{5}}$

$\frac{100}{25}$ и $\frac{7}{5}$

$\frac{20}{5} > \frac{7}{5}$

$a_1^2 + 21a_1 + 90 > 105 + 15a_1 - 24$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 > 105 - 24 - 90 + 15a_1 \\ a_1^2 + 21a_1 < 105 + 4 - 110 + 15a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 > -9 \\ a_1^2 + 6a_1 < -1 \end{cases}$$

ч

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ \end{cases}$$

$D = 36 - 4 = 32$

$(-3 \pm 2\sqrt{2})$

21103566 (U256848/M1304614)

Чистовик

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 50 \ (1) \\ a^2+b^2 \leqslant \min(14a+2b, 50) \ (2) \end{cases}$$

1) рассмотрим (2):

$$\begin{cases} a^2+b^2<14a+2b \\ a^2+b^2<50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-14a+49-49+b^2-2b+1-1<0 \\ a^2+b^2<50 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-7)^2+(b-1)^2<50 \ (3) \\ a^2+b^2<50 \ (4) \end{cases}$$ на плоскости $ab$ имеем 2 $\boxed{\text{круга}}$ равных по радиусу круга, где $r=5\sqrt{2}$. центр первого круга из (3) – $(7;1)$. центр второго из (4) – $(0;0)$. Площадь из (2) – это пересечение этих кругов.

2) из (1): имеем круг с центром в $(a;b)$.

чистовик

~~№1.~~
~~$a_7 a_{16} > S-24$~~
~~$a_{11} a_{12} < S+24$~~

№1.

$\begin{cases} a_7 a_{16} > S-24 \\ a_{11} a_{12} < S+4 \end{cases}$ $a_n \in Z$

1) Пусть разностью данной прогрессии будет число d. $a_1 \in Z$ (по условию). $a_n = a_1 + d(n-1)$. Т.к. $a_n, a_1 \in Z$, то $d \in Z$. $a_7 = a_1 + 6d$; $a_{16} = a_1 + 15d$; $a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{12} = a_1 + 11d$. Тогда с-ма имеет вид:

$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > S-24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < S+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21da_1 + 90d^2 > S-24 \\ a_1^2 + 21da_1 + 110d^2 < S+4 \quad |\cdot(-1) \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 21da_1 + 90d^2 > S-24 \\ -a_1^2 - 21da_1 - 110d^2 > -S-4 \end{cases}$ + сложим неравенства

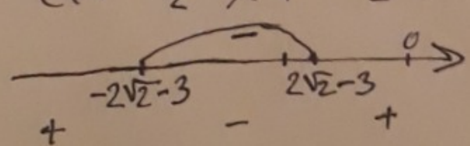
$90d^2 - 110d^2 > -24-4$

$-20d^2 > -28 \Rightarrow d^2 < \frac{7}{5}$; $d > 0$, т.к. прогрессия — возрастающая. $0 < d < \sqrt{\frac{7}{5}}$. $2 = \frac{10}{5}$. $\frac{100}{25}$ и $\frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{20}{5}$ и $\frac{7}{5}$. $2 > \sqrt{\frac{7}{5}}$. $\Rightarrow d \neq 2$, значит d, как целое число может равняться только 1, т.к. $1 < \frac{7}{5}$. Подставим в нашу систему d.

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 > 105 - 24 - 90 + 15a_1 \\ a_1^2 + 21a_1 < 105 + 4 - 110 + 15a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$ $D = 36 - 4 = 32$

$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ \left(a_1 - \frac{-6+4\sqrt{2}}{2}\right)\left(a_1 - \frac{-6-4\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \end{cases}$

3)




$\sqrt{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} - 3 < 0$

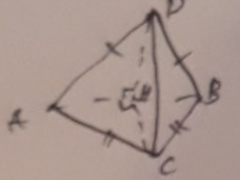
В промежутке $(-2\sqrt{2}-3; 2\sqrt{2}-3)$ берём целые числа: $-1, -2, -3, -4, -5$; $-5 > -2\sqrt{2}-3$, а $-6 < -2\sqrt{2}-3$, т.к. $2\sqrt{2} < 3$. Из $(a_1+3)^2 > 0$ следует, что $a_1 \neq -3$.

Ответ: $a_1 = \{-5; -4; -2; -1\}$.

Чистовик

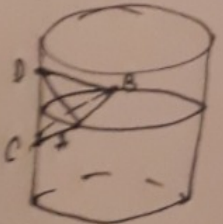
№2.

$AB=4 \quad AC=CB=5 \quad AD=DB=7$




1) $\Delta ADB$ и $\Delta ACB$ – равнобедренные. их высоты = их медианы. значит опущены они в одну точку H – середину AB. $AH=HB=\frac{AB}{2}=2$.

2) DC ~~так~~ параллельно оси цилиндра, а точка D и C лежат на его б. поверхности. Значит DC лежит на его образующей. $AB \perp DH, AB \perp HC \Rightarrow AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp CD$. через AB проведем плоскость $\perp$ основанию цилиндра. Тогда AB – хорда. Хорда меньше или равна его диаметру $\Rightarrow R \geq \frac{AB}{2} \Rightarrow R \geq 2$. Минимальный $R=2$.



# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103566**

ID профиля: **256648**

Вариант 22

№4.

1) $\begin{cases} НОД(a,b,c)=14 \\ НОК(a,b,c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$ из условия видно, что каждое из чисел a, b, c можно представить как $2^x \cdot 7^y$, $x,y \in N$. Тогда представим каждое из чисел таким образом, где t - степень двойки, s - степень семерки:

$a=2^{t_1}\cdot 7^{s_1}$; $b=2^{t_2}\cdot 7^{s_2}$; $c=2^{t_3}\cdot 7^{s_3}$.

2) Заметим, что т.к. НОД=14, то есть t=1 и есть s=1. ~~А~~ т.к. $НОК=2^{17}\cdot 7^{18}$, то есть t=17 и s=18.

3) Мы имеем 3 способа выбрать t=17. ~~Х~~ Выбрав его, имеем 2 способа выбрать t=1. Оставшееся t может иметь любое значение от 1 до 17. Имеем всего 3·2·17 способов

4) Аналогично пункту (3) находим, что s можно выбрать 3·2·18 способами.

5) Перемножаем полученные способы:

~~3·2·17~~ $3^2\cdot 2^2\cdot 17\cdot 18$

6) Заметим, что при таком учёте мы можем получать одинаковые тройки (a, b, c).

Рассмотрим следующие случаи:

— два числа s равны 1 и 18, третье число s равно любому из [2...17]. В этом случае мы имеем лишние числа с t=1, t=~~17~~.

имеем 3·2·16 · 3·2 таких чисел. 17-2+1=16.

— два числа t равны 1 и 17, третье $t\in[2..16]$. числа ~~t~~ s, все равные 1 или 16 встречаются дважды. ~~Убираем их~~ 16-2+1=15. Убираем их.

3·2·3·2·15.

— ~~все~~ тройки, где все t=1, t=17 и все s=1, s=18 учитываются четыре раза. Убираем

3·2·3·2·3

7) $3^2\cdot 2^2\cdot 17\cdot 18 - 3^2\cdot 2^2\cdot 16 - 3^2\cdot 2^2\cdot 15 - 3^2\cdot 2^2\cdot 3 = 3^2\cdot 2^2(306-15-16-3) =$
$= 36\cdot 272 = 8792$

Ответ: 8792

№5.

(1) $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, (2) $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$

(3) $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+1>0 \\ \frac{x}{2}+1\neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 0 \\ x>\frac{17}{14} \\ x\neq\frac{3}{2} \\ x>4 \\ x\neq\frac{14}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x>4 \\ x\neq 4\frac{2}{3} \end{cases}$$

Пусть $\frac{x}{2}+1=a$, $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$, $\frac{3x}{2}-6=c$

тогда (1): $\frac{1}{2}\log_a b$, (2): $4\log_b c$, (3): $\frac{1}{2}\log_c a$

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\log_a c\cdot\log_c a=1$

$(1)\cdot(2)\cdot(3)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=1.$

Дальше переберём следующие варианты и сравним их с ОДЗ