Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

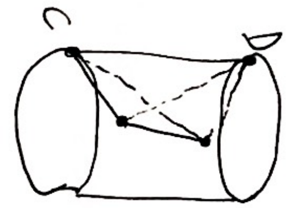
Шифр: **21103472**

ID профиля: **853411**

Вариант 22

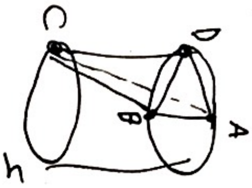
Черновик

(1)



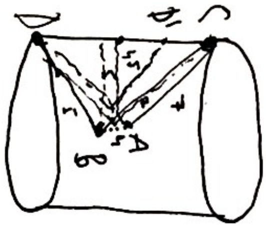
$$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot h$$

$$S = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot h$$



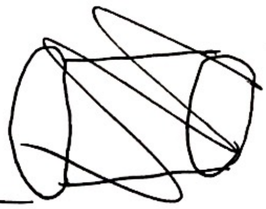
2 4 6 8

$$\frac{4+2\cdot 3}{2} \cdot 4$$



3 6 9 12

$$\frac{6+3\cdot 3}{2} \cdot 4 = 30$$

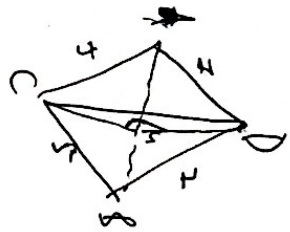


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

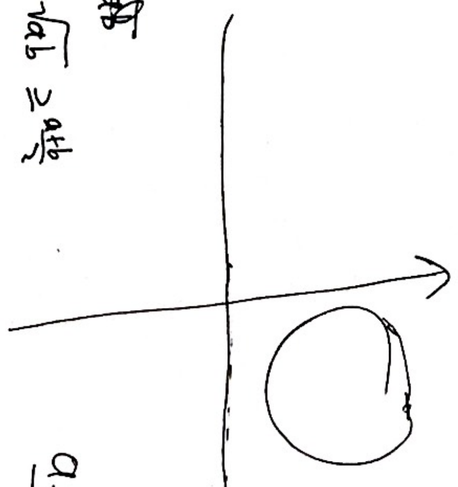
38
+38
108
+19
125

5 12 19 26 33

$$\frac{10+7\cdot 4}{2} \cdot 5 = 125$$



$\sqrt{ab} \ge \frac{a+b}{2}$



$$a_{16}^2 - a_{11}^2$$

$$\frac{a_{11}+a_{12}}{2} = \frac{S}{5} - a_1$$

$$\frac{a_{11}+a_{12}}{2} = \frac{\frac{S}{15}+\frac{2S}{15}-a_1}{2}$$

$$\frac{a_1+a_{15}}{2} = a_8 = \frac{S}{15}$$

$$\frac{a_1+a_{11}}{2} = a_6$$

$$\frac{a_1+a_{16}}{2}$$

$$\frac{a_2+a_{12}}{2} \qquad \frac{a_6+a_7}{2}$$

$$\frac{a_2+a_1}{2} = a_4$$

$$\frac{a_6+a_8}{2} = a_7$$

$$\frac{a_1+a_{11}+a_1+a_{15}}{4} = a_7$$

$$\frac{2a_1+a_{11}+a_{15}}{4} = a_7$$

$$\frac{a_{15}+a_{11}+6a_1}{8} = a_4$$

$$\frac{a_{12}+a_4}{2}$$

$$\frac{a_8+a_9}{2} + \frac{a_8+a_{15}}{2} = \frac{a_{11}+a_{11}}{2}$$

$$a_1 + \frac{a_{11}+a_{12}}{2}$$

$$\frac{a_{11}+a_{12}}{2} \le \sqrt{a_{11}a_{12}}$$

$a_{11}a_{12}$

$a_2 a_{16}$

$$\frac{a_2+a_{16}}{2} = \frac{a_{11}+a_{12}}{2}$$

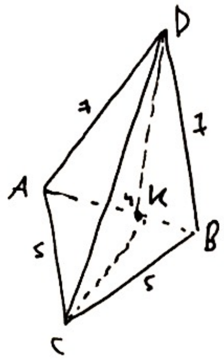
$$a_2+a_{16} = a_{11}+a_{12}$$

$$a_2^2 + a_{16}^2 + 2S - 48 < a_{11}^2 + a_{12}^2 + 2S + 8$$

$$a_2^2 + 2a_2 a_{16} + a_{16}^2 = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{12} + a_{12}^2$$

Черновик (1)

(2)



~~пров. медиан DK и CK~~
~~(они опуск. в одну т-у)~~

пров. DK и CK – мед.
т.к. $\triangle ADB$ и $\triangle ABC$ – р/б. $\Rightarrow$ DK и CK – высоты $\Rightarrow$

$$\begin{cases} AB \perp DK \\ AB \perp CK \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDK) \Rightarrow \underline{AB \perp DC}$$

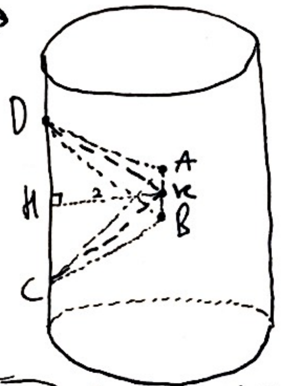
$\Rightarrow$ если CD параллельно оси, то AB ет перпендик. $\Rightarrow$
AB будет параллельна основанием цилиндра $\Rightarrow$ наименьший (*) радиус цилиндра возможен, если AB – диаметр окружн., (△) являющейся сечением цилиндра плоскостью, содерж. AB и параллельной основ. цилиндра (так как иначе AB будет хордой той же длины, $\Rightarrow$ диаметр будет больше AB)

(*)] она назов. ω_1

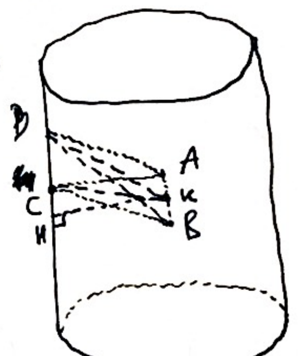
(△) тогда диаметр цилиндра будет равен AB

ω_1 = окр. основания

1-ый случай:



2-ой случай:



1-ый случай: (KH внутри тетраэдра)

пров. $KH \perp DC$; т.к. K – сер. AB $\Rightarrow$ это центр окр. ω_1

тогда $KH = R = \frac{AB}{2} = 2$

$DK = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$ $(\sqrt{DB^2 - BK^2})$ $\Rightarrow DH = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$ $(\sqrt{DK^2 - HK^2})$

$CK = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$ $(\sqrt{BC^2 - BK^2})$ $\Rightarrow HC = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$ $(\sqrt{CK^2 - HK^2})$

$\Rightarrow \boxed{DC = \sqrt{41} + \sqrt{17}}$ $(DC = DH + HC)$

2-ой случай: (KH ~~снаружи~~ вне тетраэдра)

аналогично проведем $KH \perp DC$, ...

$DK = \sqrt{49-4} = \sqrt{45}$ $\Rightarrow$

$CK = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$ $\Rightarrow$

$$\begin{rcases} DH = \sqrt{45-4} = \sqrt{41} \\ HC = \sqrt{21-4} = \sqrt{17} \end{rcases} \Rightarrow \boxed{DC = DH - HC = \sqrt{41} - \sqrt{17}}$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} DC = \sqrt{41} - \sqrt{17} \\ DC = \sqrt{41} + \sqrt{17} \end{array}\right.$

Чистовик (2)

(1)

$$\frac{a_{16}+a_7}{2}=\frac{a_{11}+a_{12}}{2} \quad (*)$$

$$\frac{a_1+a_{15}}{2}=a_8=\frac{S}{15} \leftarrow \left(S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\right)$$

$$\frac{a_{15}+a_8}{2}=\frac{a_{11}+a_{12}}{2}$$

$(*)$ $$a_7^2+2a_{16}a_7+a_{16}^2=a_{11}^2+2a_{11}a_{12}+a_{12}^2$$

$$a_7^2+a_{16}^2+\cancel{2S}-48<a_{11}^2+a_{12}^2+\cancel{2S}+8$$

$$(a_{16}^2-a_{12}^2)-(a_{11}^2-a_7^2)<56$$

$$\underbrace{(a_{16}-a_{12})}_{4d}(a_{16}+a_{12})-\underbrace{(a_{11}-a_7)}_{4d}(a_{11}+a_7)<56$$

$$4d(2\cdot a_{14}-2\cdot a_9)<56$$

$$8d\underbrace{(a_{14}-a_9)}_{5d}<56$$

$$40d^2<56$$

$$d^2<\frac{56}{40}$$

$d<\sqrt{\frac{56}{40}}$, но числа целые и послед. возр. $\Rightarrow \underline{d=1}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103472**

ID профиля: **853411**

Вариант 22

Черновик

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right);\ \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right);\ \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

1) $\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$$\frac{1}{\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{x}{2}+1\right)}=4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{\lg\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\lg\left(\frac{x}{2}+1\right)}=2\ \frac{\lg\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\lg\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}$$

$$\left(\lg\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\right)^2=4\lg\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot\lg\left(\frac{3x}{2}-6\right)$$

$4032 \cdot 5 = 20160$

$64 \cdot 63 = 192 + 384 = 4032$

$\cancel{25}$ 525

$1648 \cdot 127$: $1648 + 3296 = \cancel{125}$ 126

$\frac{1}{2}h\ \cancel{\cdot 12x = 5}$

$\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}h\cdot 12x=\frac{144}{5}}$

63

$S_{ABC}=\frac{144}{25}\cdot 5=\frac{144}{5}$

$34608 - 20160 = 14448$

$\frac{S_{ABC}}{S_{PKC}}=k^2=\frac{144}{25}$

$64 \cdot 7 = 448$

$1200 + 448 = 1648$

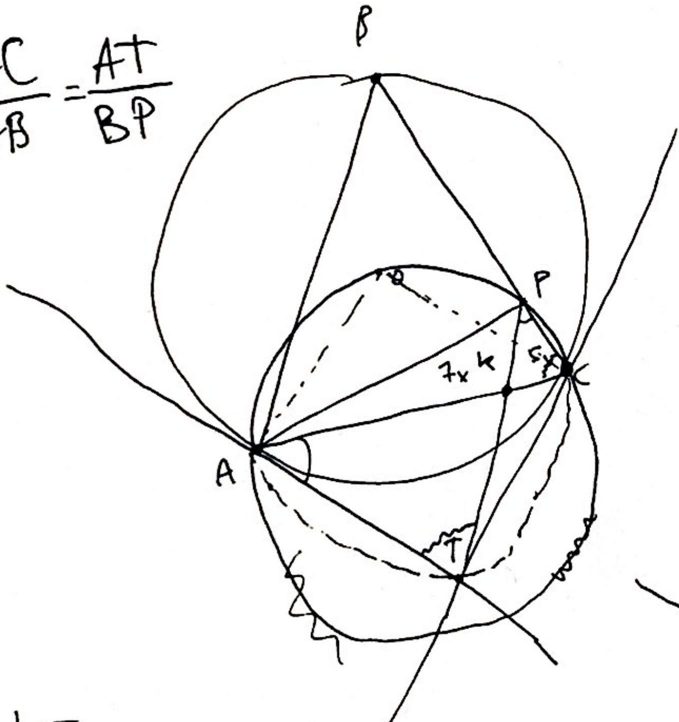
$84 \cdot 3 = 252$

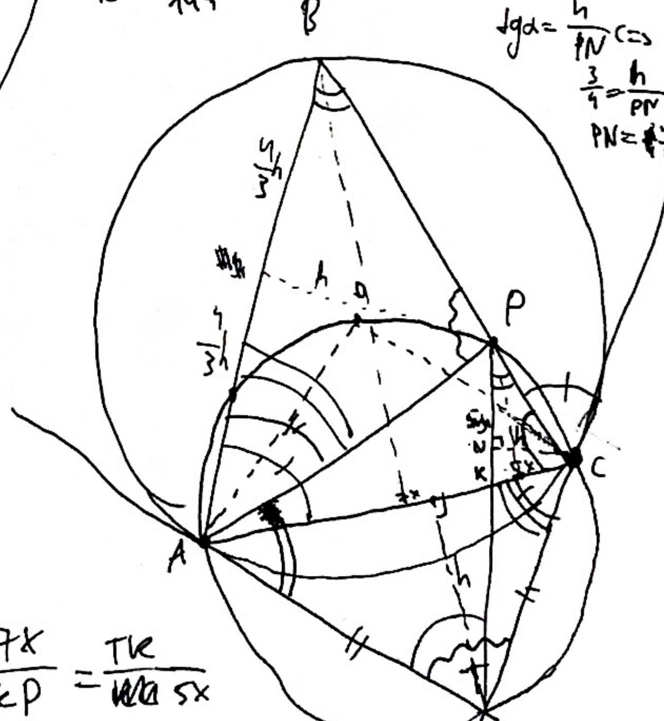
$k=\frac{5}{12}$

$k^2=\frac{25}{144}$

$\operatorname{tg} ABC=\frac{3}{4}$

$\frac{AC}{AB}=\frac{AT}{BP}$





$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{PN} \Leftrightarrow$

$\frac{3}{4}=\frac{h}{PN}$

$PN=\frac{4h}{3}$

$\frac{1}{2}h_1\cdot KT$

$$\frac{AK}{KP}=\frac{TK}{KC} \Leftrightarrow \frac{7x}{KP}=\frac{TK}{5x}$$

$\cancel{\dfrac{\frac{7}{5}S_{TKC}+7}{S_{TKC}+5}=\frac{7}{5}}$

$\frac{S_{AKT}}{S_{TKC}}=\frac{7}{5}$

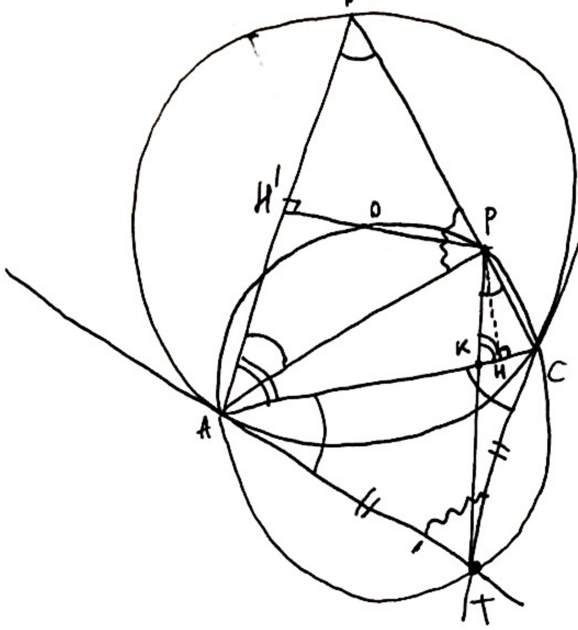
$\frac{S_{APT}}{S_{PCT}}=\frac{7}{5}$

$\cancel{\frac{7}{5}S_{TKC}\cdot 5+35=7S_{TKC}+35}$

$\frac{S_{AKT}+7}{S_{TKC}+5}=\frac{7}{5}$

Чистовик ①

⑥



а) $APCT$ – вп. чет. $\Rightarrow$

$\angle TAC = \angle TPC$

$\angle TAC$ – угол между касат. и хордой для большой окр. ω; $\Rightarrow$

$\angle TAC = \frac{1}{2} \smile AC$

$\angle ABC$ – впис. $\Rightarrow \angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC \Rightarrow$

$\angle TAC = \underbrace{\angle ABC}= \angle TPC \Rightarrow$

$PT \parallel BA$ по призн. о соотв. углах.

тогда $\angle BAC = \angle PKC$ как соотв. углы при пар. пр. $\Rightarrow$

$\triangle PKC \sim \triangle BAC$ (по 2-ум углам) $(*)$

$\exists$ PH – высота $\triangle APK$ и $\triangle KPC$

$$S_{APK} = \frac{1}{2} PH \cdot AK = 7$$
$$S_{KPC} = \frac{1}{2} PH \cdot KC = 5$$
$$\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}; \quad (*) \Rightarrow \frac{KC}{AC} = k = \frac{5}{12}$$

$$\frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{25}{144} \Leftrightarrow \boxed{S_{ABC} = \frac{144}{25} \cdot 5 = \frac{144}{5} = 28{,}8}$$

б) $AT = TC$ по теор. об отрезках касат., провед. из одной точки

$\Downarrow$

$\angle TAC = \angle ACT$

$$\left.\begin{aligned} APCT \text{ – впис.} \Rightarrow \angle APC &= 180^\circ - \angle ATC \\ \angle APC &= 180^\circ - \angle APB \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle ATC = \angle APB$$

$\Downarrow$

$\angle ABC = \angle TAC$ (по доказанному в а)) $\Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle CAT \Rightarrow$ (по 2-ум углам)

$\Rightarrow \angle BAP = \angle PBA$; проведем $PH' \perp AB$; тогда PH' – медиана и высота в $\triangle ABP$

$\exists$ $PH' = h$; тогда $\operatorname{tg} ABC = \frac{PH'}{BH'} = \frac{h}{BH'} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \underline{BH' = \frac{4}{3}h} \Rightarrow AH' = \frac{4}{3}h \Rightarrow$

$\underline{AB = \frac{8}{3}h}$; по теор. Пиф. $BP^2 = \sqrt{BH'^2 + PH'^2} = \sqrt{\frac{16}{9}h^2 + h^2} = \frac{5}{3}h$

$\frac{CK}{AK} = \frac{CP}{BP} = \frac{5}{7}$ (по т. Фалеса) $\Rightarrow CP = \frac{5}{7} BP = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{3} h = \frac{25}{21} h \Rightarrow \underline{BC = \frac{35}{21}h + \frac{25}{21}h = \frac{60}{21}h = \frac{20}{7}h}$

~~по т. cos для $\triangle ABC$~~: $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle APK} - S_{\triangle PKC} = 28{,}8 - 7 - 5 = 16{,}8 = \frac{84}{5}$

$S_{ABP} = \frac{1}{2} PH' \cdot AB = h \cdot \frac{4}{3} h = \frac{4}{3} h^2 = \frac{84}{5} \Leftrightarrow h^2 = \frac{252}{20} = \frac{63}{5}$

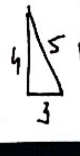
по теор. cos в $\triangle ABC$:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$;

$\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{3}{4}$

$\Downarrow$

$\underline{\cos ABC = \frac{4}{5}}$



$AB = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{63}{5}} \Leftarrow \underline{h = \sqrt{\frac{63}{5}}}$

$BC = \frac{20}{7} \cdot \sqrt{\frac{63}{5}}$

продолжение на чистовике ②

Чистовик 2

6 продолжение

$$AC^2 = \frac{64\cdot \cancel{21}^{7}}{\cancel{3}\cdot 25} + \frac{400\cdot 3}{25} - \cancel{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{\cancel{20}^{10^2}}{7}\cdot\frac{63}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{4}{5}$$

$$AC^2 = \frac{1648}{25} - \frac{64\cdot 63}{21\cdot 5}$$

$$AC^2 = \frac{1648^{(21}}{25} - \frac{4032^{(5}}{105}$$

$$AC^2 = \frac{34608 - 20160}{525}$$

$$AC^2 = \frac{14448}{525}$$

$$\boxed{AC = \sqrt{\frac{14448}{525}}}$$

Ответ: а) 28,8
б) $\sqrt{\frac{14448}{525}}$

2

$$\begin{cases} \log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right) = \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 \\ \log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right) = \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)+1 \end{cases}$$

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right) = \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

$$\log_{\sqrt{\frac{7}{x}}}$$