Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103457**

ID профиля: **887930**

Вариант 22

Задание 1. Вариант 22. Часть 1. Чистовик.

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

Перейдем к a_1 и d:

$(a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > S - 24$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < S + 4$

$$\begin{cases} -(a_1^2 + 21a_1d + 90d^2) < 24 - S \\ a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < S + 4 \end{cases}$$

Сложим неравенства одного знака:

$20d^2 < 28 \iff d < \frac{7}{5}$, но d - целое число

и прогрессия возрастает: $\Rightarrow \boxed{d = 1} \Rightarrow S (a_1 + 7) \cdot 15$

Итак; $(a_1 + 6)(a_1 + 15) > 15a_1 + 105 - 24$

$(a_1 + 10)(a_1 + 11) < 15a_1 + 105 + 4$

$a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24.$

$a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4.$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \iff (a_1 + 3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

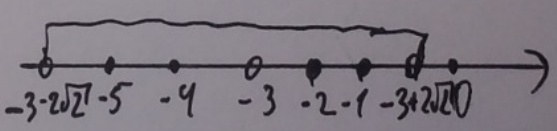
$-3 - 2\sqrt{2} < -5$

$-3 + 2\sqrt{2} > -1$

$D = 36 - 4 = 32 =$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

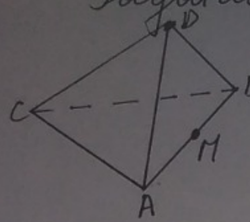
$$\begin{cases} a_1 \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}) \\ a \in R / \{-3\} \end{cases}$$



Ответ: $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

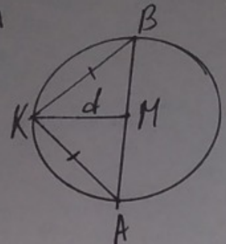
$\boxed{1}$

Задание № 2   Вариант 22   Часть 1. Чистовик.



Из условия следует, что $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ равнобедренные $\Rightarrow$ плоскость CDM, где M – середина AB, $\perp AB$ $\Rightarrow$ $CD \perp AB$

$AB=4$
$AC=CB=5$
$AD=DB=7$



K – проекция точек C и D

d – расстояние от CD до M

Радиус наименьший, когда хорда AB является диаметром, т.е. $R=2$

$d=2$, т.к. $R=\frac{AB}{2}$.

Итак, расстояние между CD и AB равно 2, найдем возможные значения CD

Пусть $KC=x$, $KD=y$

$R^2+d^2+x^2=AC^2$, $\quad R^2+d^2+y^2=AD^2$

$4+4+x^2=25$, $\quad 4+4+y^2=49$

$x^2=\sqrt{17}^2$, $\quad y^2=\sqrt{41}^2$

$x=\sqrt{17}$ $\quad y=\sqrt{41}$

Отсюда, $CD=x+y$ или $y-x$, тогда $CD=\sqrt{17}+\sqrt{41}$ или $CD=\sqrt{41}-\sqrt{17}$

Ответ: $CD=\sqrt{41}+\sqrt{17}$ или $CD=\sqrt{41}-\sqrt{17}$.

Задание 3. Вариант 22. Часть 1. Чистовик.

При каких x и y есть решения у системы неравенств.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le (5\sqrt{2})^2 \\ a^2+b^2 \le (5\sqrt{2})^2 \\ 7a+b \ge 25 \end{cases} \\ \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le (5\sqrt{2})^2 \\ a^2+b^2-14a-2b \le 0 \\ 7a+b < 25 \end{cases} \end{array}\right.$$

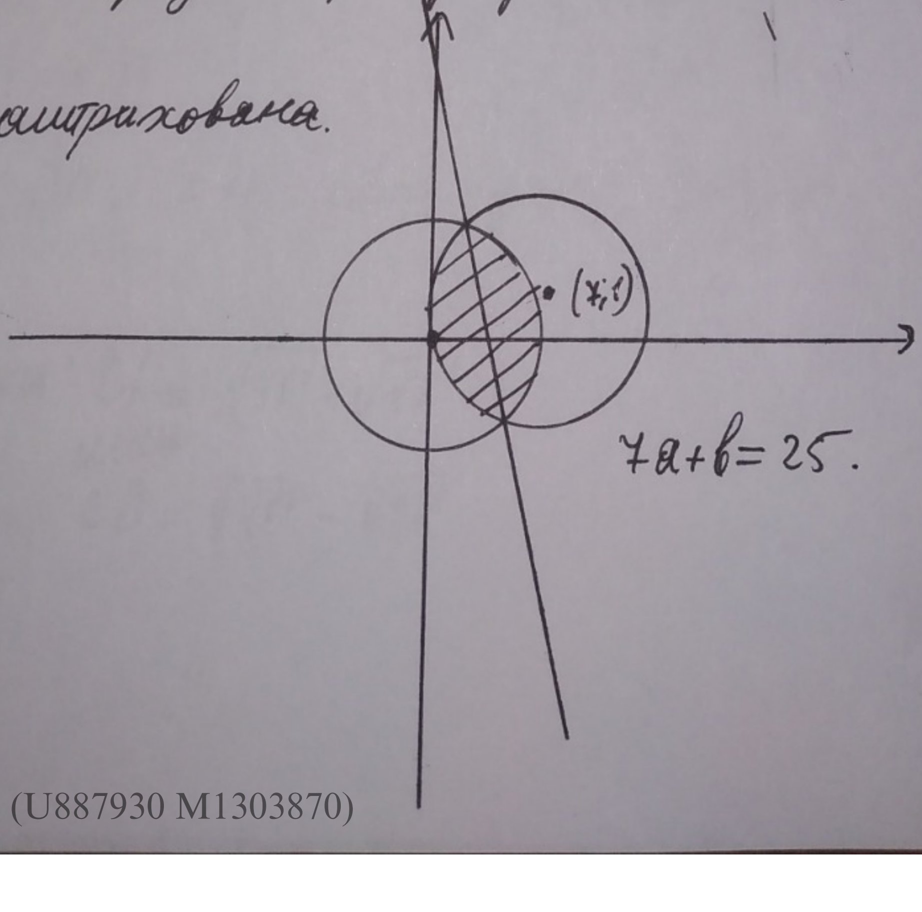
Изобразим на плоскости (a, b) фигуру, определяющую совокупностью систем:

$$\begin{cases} 7a+b \ge 25 \\ a^2+b^2 \le (5\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a+b < 25 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le (5\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

Это система определяет фигуру состоящую из двух кругов радиуса $5\sqrt{2}$ и общей хордой.

Фигура M заштрихована.



21103457 (U887930 M1303870)

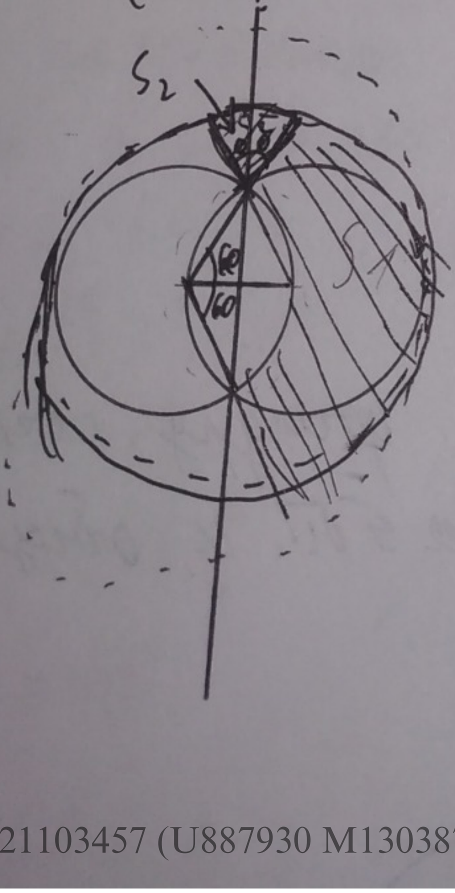
Достаточное условие: чтоб системы удовлетворя хоть одной паре $(a;b)$: центр окружности $(a-x)^2+(b-y)^2=(5\sqrt{2})^2$ находился на расстоянии не большем $5\sqrt{2}$.

Расстояние от точек $(0;0)$ и $(7;1)$ до $7a+1b=25$ равно $\frac{25}{\sqrt{50}}=5\sqrt{2}/2$ — половина радиуса.

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\left((10\sqrt{2})^2-(5\sqrt{2})^2\right)=\frac{\pi}{3}(200-50)=50\pi$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}(5\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{6}\cdot 50=\frac{25\pi}{3}.$$

$$S=2(S_1+S_2)=100\pi+\frac{50\pi}{3}=\frac{350\pi}{3},\ \text{т.к.}$$



Обе окружности лежат в большей окружности радиуса $10\sqrt{2}$

4

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103457**

ID профиля: **887930**

Вариант 22

Задание 4. Вариант 22. Часть 2 Чистовик.

Пусть $a = 14\alpha$, $b = 14\beta$; $c = 14\gamma$,

тогда $\begin{cases} НОД(\alpha, \beta, \gamma) = 1 \\ НОК(\alpha, \beta, \gamma) = 2^{16} \cdot 7^{17} \end{cases}$

Если $\alpha = 1$, то $НОД(\alpha, \beta, \gamma) = 1$, при этом $\beta = 2^n \cdot 7^m$ и $\gamma = 2^k \cdot 7^l$, где

$n = 16$ и $k = 0, \dots, 16$ или $k = 16$ и $n = 0, \dots, 16$ | $m = 17$, $l = 0, \dots, 17$; $l = 17$, $m = 0, \dots, 17$

Вариантов $2 \cdot 17 - 1 = 33$ | Вариантов $2 \cdot 18 - 1 = 35$

Любой сочетается с любым другим, поэтому получаем $33 \cdot 35$ вариантов с $\alpha = 1$

Аналогично, столько же вариантов с $\beta = 1$ и $\gamma = 1$.

Получаем. $3 \cdot 33 \cdot 35$ вариантов $= 3465$

Выбросим три варианта с двумя единицами, учтенными дважды.

$3465 - 3 = 3462$ варианта.

Вариантов без единиц быть не может, потому что простые множители 2 и 7; их всего два.

Ответ: 3462 варианта.

Задание 5. Вариант 22. Часть 2 Чистовик.

ОДЗ: $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0; \neq 1; \frac{x}{2}+1>0, x\neq 1, \frac{3x}{2}-6>0, \neq 1$, откуда

$\boxed{x>4 \text{ и } x\neq\frac{14}{3}}$

Пусть $A=\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$; $B=\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$ и

$C=\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$, тогда

$$ABC=\frac{\lg^2\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{2\lg\left(\frac{x}{2}+1\right)}\cdot\frac{2\lg\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\frac{1}{2}\lg\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\cdot\frac{\lg\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\frac{1}{2}\lg\left(\frac{3x}{2}-6\right)}=4$$

Если $A=B$ и $C=A-1$, то $A^2(A-1)=4$,

откуда $A^3-A^2-4=0$, $(A-2)(A^2+A+2)=0$

и $\boxed{A=2;\ B=2;\ C=1}$

Аналогично $\boxed{A=2;\ B=1;\ C=2}$

или

$\boxed{A=1;\ B=2;\ C=2}$

Провери каждый из этих случаев.

$\boxed{C=1}$ $\frac{x}{2}+1=\sqrt{\frac{3x}{2}-6}$ $\frac{x}{2}=t$

$(t+1)^2=3t-6$

$t^2+2t+1=3t-6$

$t^2-t+7=0$ – не имеет решений

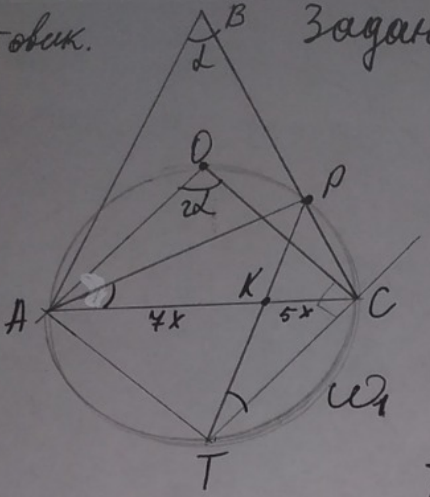
$\boxed{C=2}$ $t+1=3t-6$

$t=\frac{7}{2}=\frac{x}{2}$ $\Rightarrow x=7$

Проверим $B=\log_{\sqrt{\frac{81}{4}}}\left(\frac{9}{2}\right)^2=2$, $A=\log_{(\frac{9}{2})^2}\left(\frac{81}{4}\right)=1$ верно.

Ответ: $x=7$;

Чистовик.



Задание 6. Вариант 22. Часть 2.

Т.к. AT и TC касательные, то $\angle AOC + \angle ATC = \angle OAT + \angle OCT = 90+90 = 180$

Точка T на окружности ω_1, проходящей через точки A, O, C, $\angle PAC = \angle PTC$ как опирающиеся на одну дуги.

$\frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$ по условию.

Пусть $AK = 7x$; $KC = 5x$, тогда по теореме о двух хордах. $7x \cdot 5x = KT \cdot PK$, но

$$\frac{S_{\Delta KP}}{S_{PKC}} = \frac{7}{5} = \frac{AK \cdot KP}{PK \cdot KC} \Rightarrow 7PK \cdot KC = 5AK \cdot KP, \text{ но}$$

$$AK \cdot KC = PK \cdot KT \Rightarrow$$

$$\frac{7\cancel{PK} \cdot KC}{\cancel{PK} \cdot KT} = \frac{5\cancel{AK} \cdot KP}{\cancel{AK} \cdot KC}$$

$$7KC^2 = 5KP \cdot KT \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle APT = \angle TPC = \alpha$, т.к. T — середина дуги ATC и $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha$.

Потом, $\Delta KPC \sim \Delta ABC$ (по 2-м углам) и коэф. подобия

$$\frac{KC}{AC} = \frac{5}{12}$$

Но $S_{\Delta KPC} = 5 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 5\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{5}$

Ответ: ~~a)~~ $S_{\Delta ABC} = \frac{144}{5}$.