Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

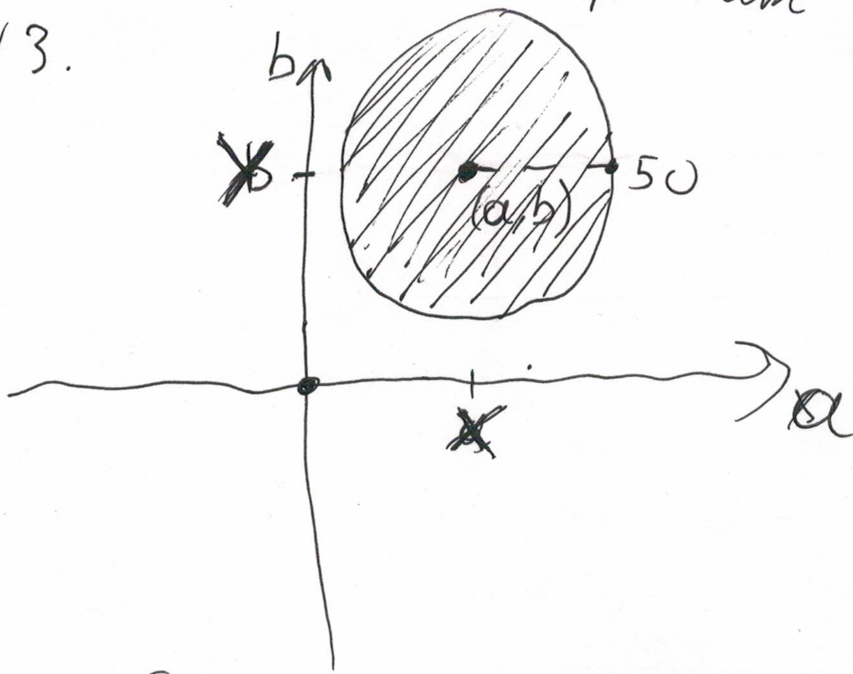
Шифр: **21103328**

ID профиля: **819039**

Вариант 22

Черновик

N 3.



$\cancel{a > b}$ ... (crossed out)

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b; 50) \end{cases}$$

$(0;0)$

$a^2+b^2 \le 50$

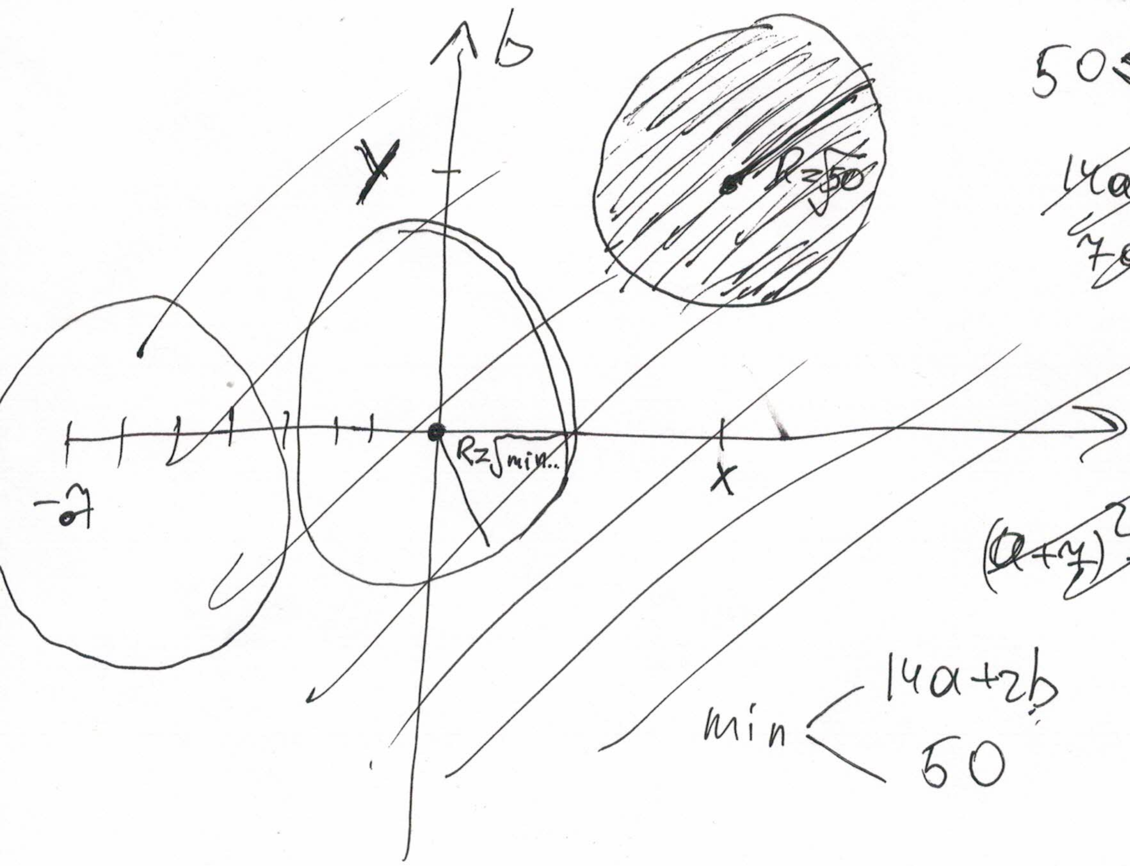
$a^2+b^2 \le \min(14a+2b; 50)$

$7^2+1^2=50$

$50 \le 50$

$\cancel{14a+2b \le 50}$

$\cancel{7a+b \le 25}$



$\cancel{(a+7)^2+(b+1)^2 \le 50+\min(\ldots}$

$$\min \begin{cases} 14a+2b \\ 50 \end{cases}$$

№1. Черновик. Вариант 22.

1 3 5 7

~~a_1~~ a_1

$S_4 = \frac{1+7}{2} \cdot 4 = 16$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > \frac{2a_1+14d}{2} 15 - 24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < \frac{2a_1+14d}{2} 15 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ +14 \\ \hline 196 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21 a_1 d + 90 d^2 > 15 a_1 + 105 d - 24 \\ a_1^2 + 21 a_1 d + 110 d^2 < 15 a_1 + 105 d + 4 \end{cases}$$

$\sqrt{2}$

$-20d^2 > -28$

$d^2 < \frac{28}{20}$

$d^2 < 1{,}4$

$d = 1$

$$\begin{array}{r} 1{,}4 \\ \times 2 \\ \hline -2{,}8 \end{array}$$

$a > b$ $\quad$ $a > b$

$c < d$ $\quad$ $c > d$

$a - c > b - d$ $\quad$ $a + c > b + d$

$a_1^2 + 21 a_1 + 90 > 15 a_1 + 105 - 24$

$$\begin{array}{r} 105 \\ -24 \\ \hline 81 \end{array}$$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 >$

$(a+3)^2 > 0$

$a \neq -3$

$a_1^2 + 21 a_1 + 110 < 15 a_1 + 105 + 4$

$a_1^2 + 6 a_1 + 1 < 0$

$a_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{2}}{2} = -3 - 2\sqrt{2}$ $\quad$ $D = 36 - 4 = 32$

$a_2 = -3 + 2\sqrt{2}$ $\quad$ $\sqrt{D} = 4\sqrt{2}$

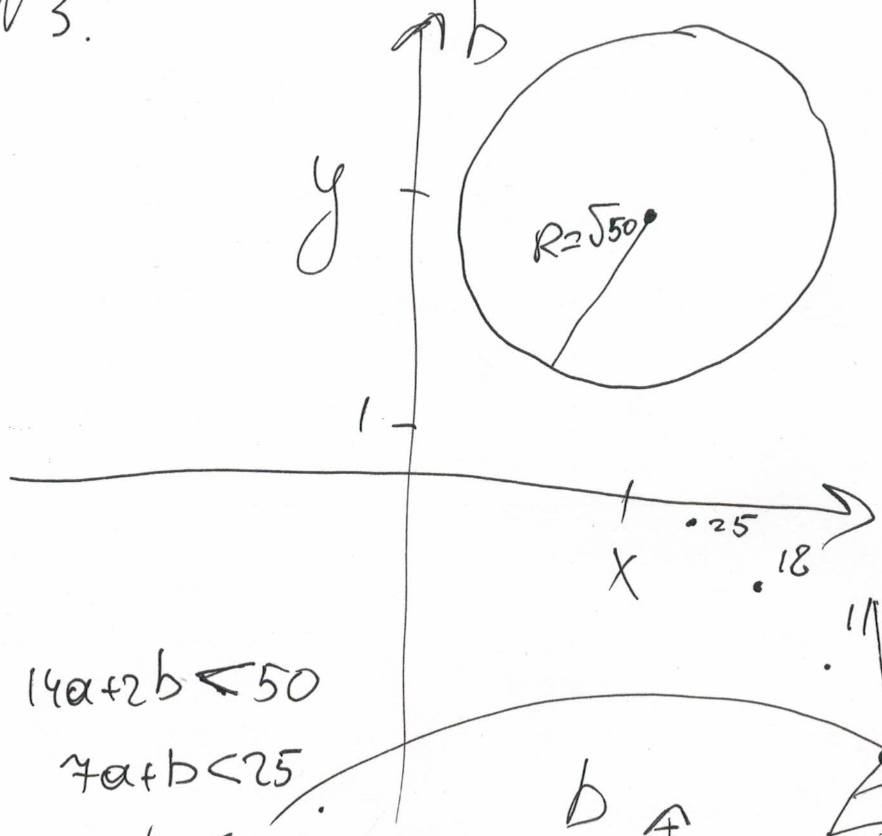
$-5{,}8$ $\quad$ $-0{,}2$

$-3-2\sqrt{2}$ $\quad$ 3 $\quad$ $-3+2\sqrt{2}$ $\quad$ a

$-5; -4; -2; -1$

Черновик.

№3.



$a^2+b^2\le 14a+2b$

$a^2-14a+49+b-2b+1\le 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

$a^2+b^2\le 50$

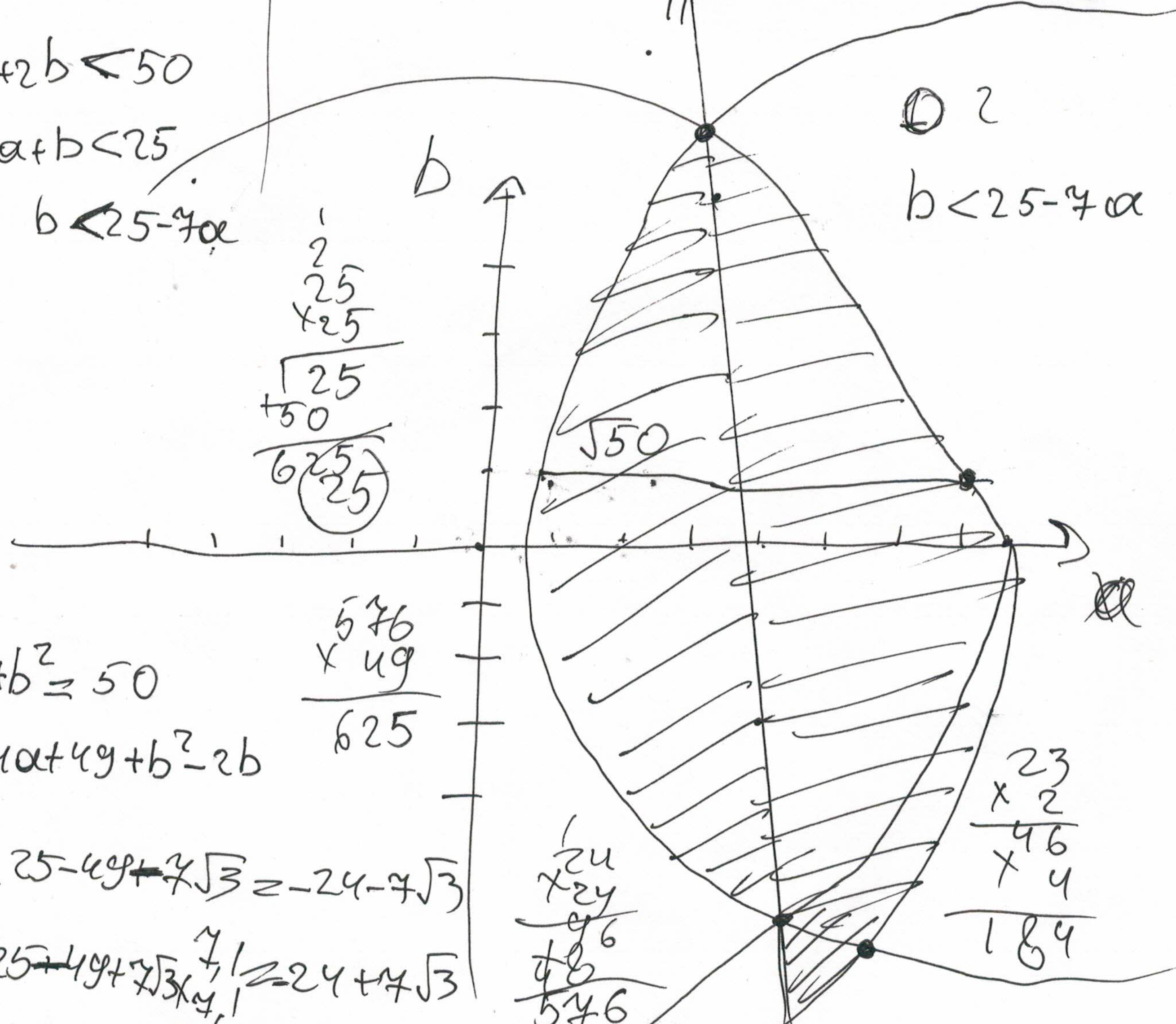
$14a+2b<50$

$7a+b<25$

$b<25-7a$

D 2

$b<25-7a$



25 × 25 = 125 + 50 = 625

576 × 49 = 625

$a^2+b^2=50$

$a^2-14a+49+b^2-2b$

23 × 2 = 46 × 4 = 184

24 × 24 = 96 + 48 = 576

$b_1=25-49\cancel{+}7\sqrt{3}=-24-7\sqrt{3}$

$b_2=25\cancel{+}49+7\sqrt{3}=-24+7\sqrt{3}$

7,1 × 7,1 = 71 + 497 = 50,41

$2a^2-14a+23=0$

$a^2+b^2\ge 50$

$b=25-7a$

$D=196-184=12$

$r=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}=\sqrt{49+576}$

$\sqrt{D}=2\sqrt{3}$

$a_1=\frac{14+2\sqrt{3}}{2}=7+\sqrt{3}$

$a_2=7-\sqrt{3}$

Черновик

$a^2-14a+49+b^2-2b+1=50$

$a^2+b^2=50$

$-14a-2b+50=0$

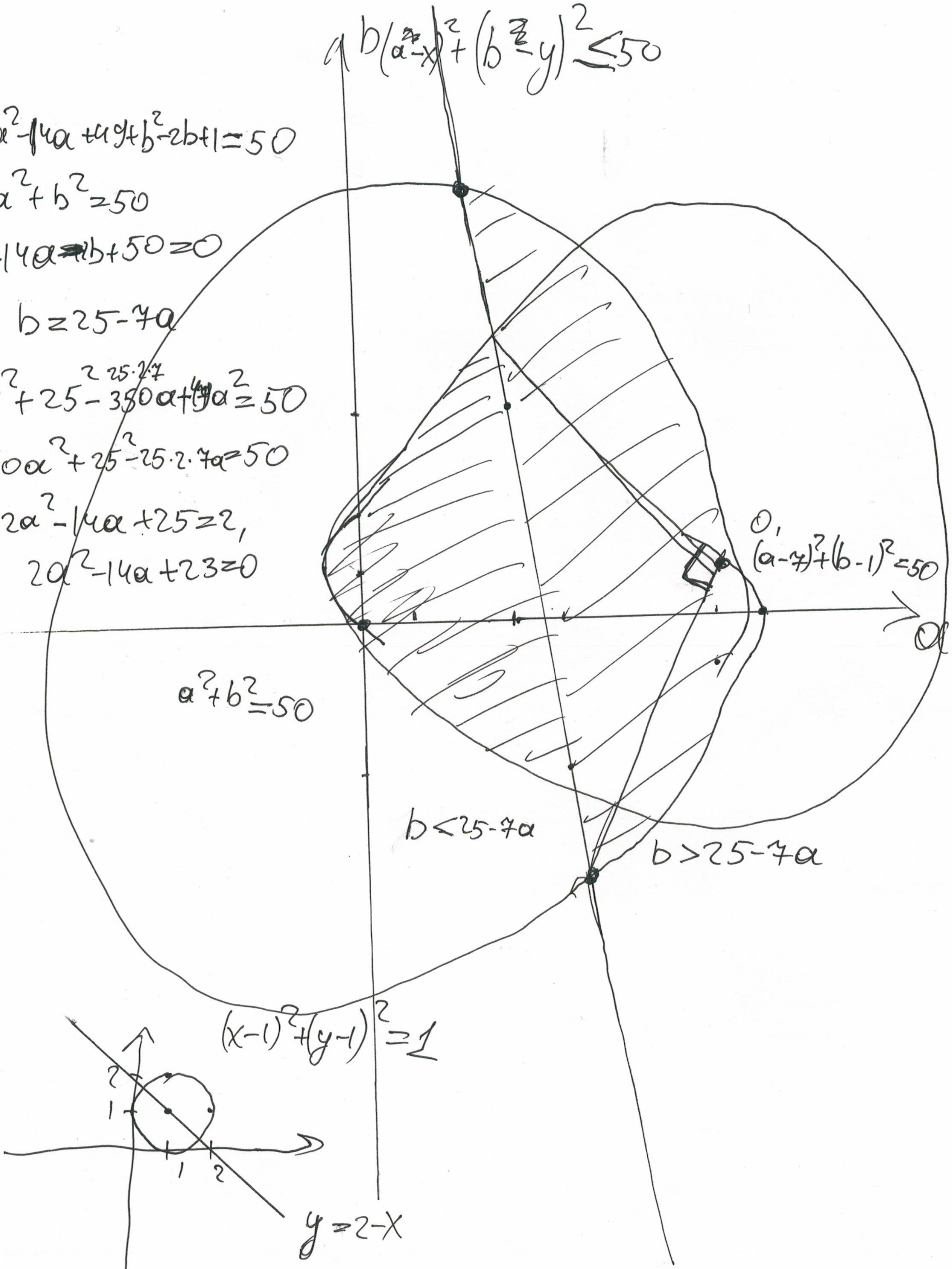
$b=25-7a$

$a^2+25^2-\overset{25\cdot2\cdot7}{350}a+49a^2=50$

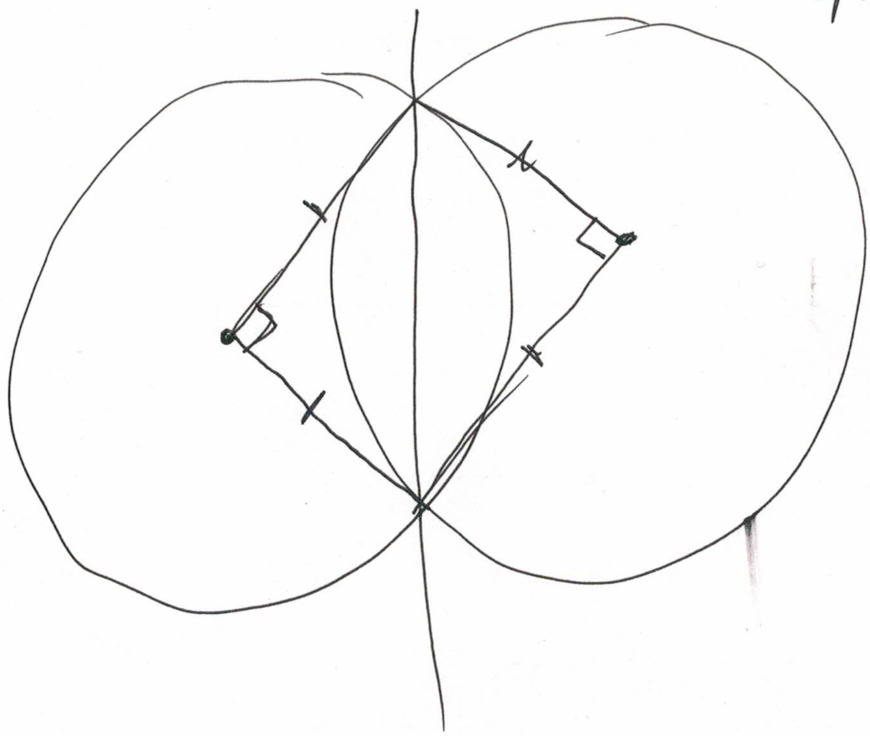
$50a^2+25^2-25\cdot2\cdot7a=50$

$2a^2-14a+25=2,$

$2a^2-14a+23=0$



Черновик.



Чистовик. Вариант 22

№1.

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > \frac{2a_1+14d}{2} 15 - 24, & (1) \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < \frac{2a_1+14d}{2} 15 + 4; & (2) \end{cases}$$

Умножим (2) ~~ур-нение~~ неравенство на -1 и прибавим к (1) по

св-ву: $a > b$, $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

$a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 - a_1^2 - 21a_1d - 110d^2 > 15a_1 + 105d - 24 - 15a_1 - 105d - 4,$

$-20d^2 > -28$

$d^2 < \frac{28}{20}$

$d^2 < 1\frac{2}{5}.$

Т.К. все члены прогрессии целые числа d тоже целое. Значит $d = 1$.

Из (1) неравенства:

$a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24,$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0,$

$(a_1+3)^2 > 0,$

$a_1 \neq 3.$

Из (2) неравенства:

$a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

корни ур-ния $a_1^2 + 6a_1 + 1 = 0$:

$a_1 = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2})$

оценка: $-6 < -3-2\sqrt{2} < -5$

$-1 < -3+2\sqrt{2} < 0$

Т.К. $a_1 \in Z$ $a_1 = -5; -4; -2; -1$

Ответ: $-5; -4; -2; -1$

1

Чистовик.

Задача №3.

Рассмотрим 2 случая:

1) $14a+2b<50$

Тогда 2 ~~у~~ неравенство системы примет вид:

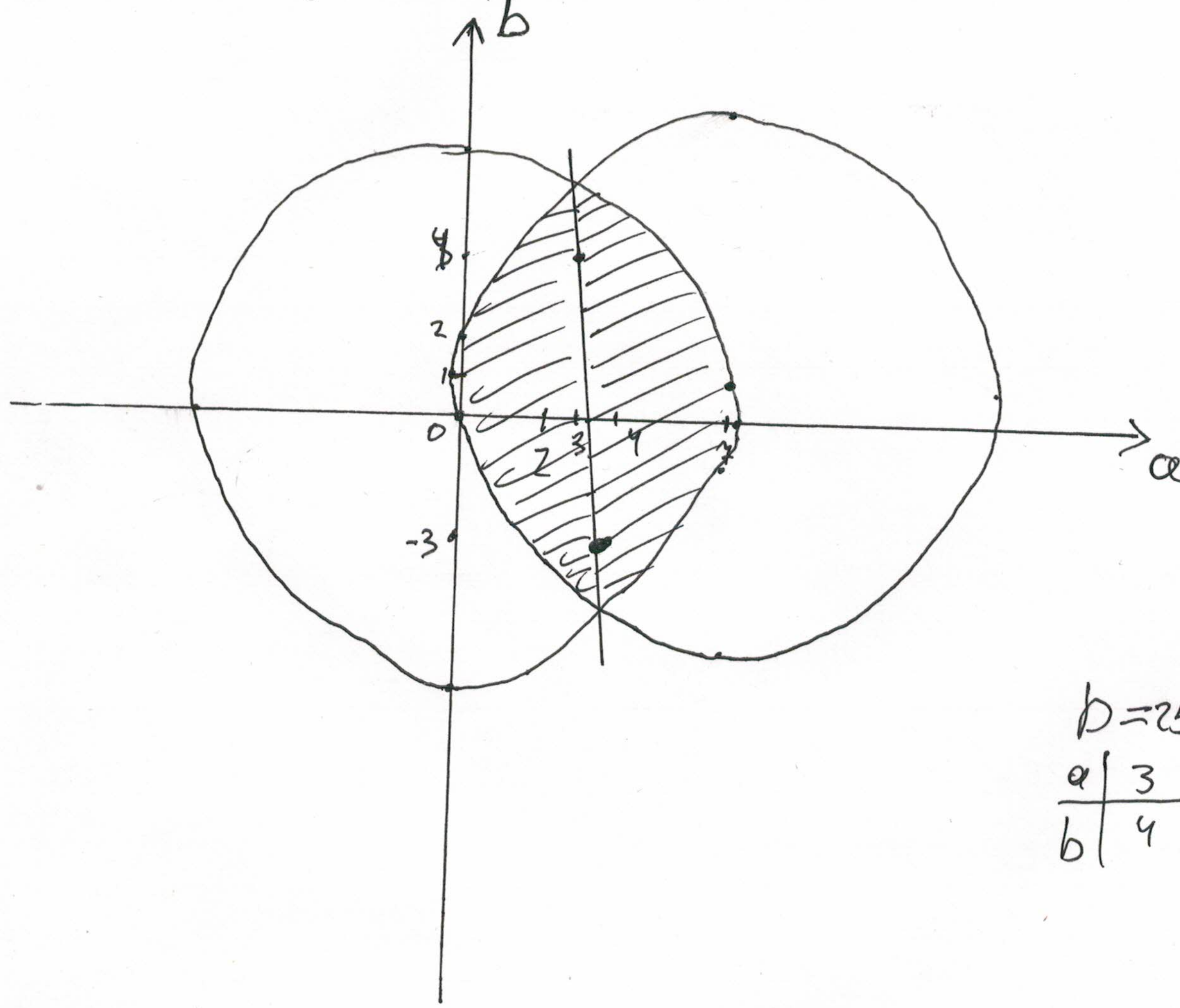
$a^2-14a+b^2-2b\leq 0, \ /+50$

$(a-7)^2+(b-1)^2\leq 50.$

2) $14a+2b>50$

$a^2+b^2\leq 50$

Решим задачу графически:



$b=25-7a$

a	3	4
b	4	-3

Наши неравенства есть круги, ~~ограниченные~~ с центрами в точках $(7;1)$ и $(0;0)$ соответственно и радиусами $\sqrt{50}$. Причем по условию 1 окружность подходит, когда она лежит выше $b=25-7a$, а вторая - когда ниже.

Чистовик.

Решив систему уравнений можно понять, что окружности пересекаются на прямой $b=25-7a$

$$\begin{cases} a^2+b^2=50, \\ (a-7)^2+(b-1)^2=50. \end{cases}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leq 50,$$

$$(a-x)^2+(b-y)^2\leq 50.$$

Это круг с центром в точке $(x;y)$ и радиусом $\sqrt{50}$.

Система из условия имеет решения, когда этот круг хотябы касается выделенной области (заштрихована). Она является элепсом с диаметрами $\sqrt{50}$ и 25 (из системы $\begin{cases} a^2+b^2=50 \\ b=25-7a \end{cases}$ находим точки пересечения и расстояние между ними и есть r диаметр $d_2=25$).

Следовательно фигура M тоже элепс с диаметрами $3\sqrt{50}$ и $25+2\sqrt{50}$, т.к. максимальное р-е от закрашенной области до центра окружности есть $\sqrt{50}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103328**

ID профиля: **819039**

Вариант 22

Чистовик. Вариант 27.

№1.

Пусть $a=14x$ $b=14y$ $c=14z$. Тогда:

$НОД(x,y,z)=1$.

$НОК(x,y,z)=2^{16}\cdot 7^{17}$.

Т.к. 3 числа взаимнопросты, мы можем разбирать следующие случаи:

$\begin{cases} \cancel{x=2^{16}} \\ \cancel{y=7^{17}} \\ z=1 \end{cases}$ ~~или другие варианты~~ $\cancel{x,y,z}$

$\begin{cases} x=2^{16}, \\ y=7^{n_1}, \\ z=7^{n_2}. \end{cases}$ $n_1+n_2=17$ $n_1\neq n_2\neq 0$

Кол-во решений тут равно $17\cdot 6=102$, т.к. мы случайно выбираем n_1 $(n_2=17-n_1)$, а потом помещаем их в x, y или z

$\begin{cases} x=7^{17}, \\ y=2^{k_1}, \\ z=2^{k_2}. \end{cases}$ $k_1+k_2=16$ $k_1\neq k_2\neq 0$

Кол-во решений — 102 (аналогично предыдущему), но 3 случая, когда $k_1=k_2=8$ повторяются.

$\begin{cases} x=2^{16}\cdot 7^{17}, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$

Кол-во решений — 3.

$\begin{cases} x=2^{n_1\cdot k_1}, \\ y=2^{n_2\cdot k_2}, \\ z=1. \end{cases}$ $k_1\neq k_2\neq 0$, $n_1\neq n_2\neq 0$, $n_1+n_2=17$, $k_1+k_2=16$.

Кол-во решений:
- сначала выбираем k_1 и k_2 102 случая
- выбираем n_1 и n_2 $102-3=99$ случаев.
- случайное распределение между x, y и z.

$102\cdot 99\cdot 6$ — случаев.

$\begin{cases} x=2^{16}, \\ y=7^{17}, \\ z=1. \end{cases}$ Здесь всего 6 случаев.

Итого: $102+99+3+6+102\cdot 99\cdot 6=10308$

Ответ: 10308

1

Чистовик.

№2.

Пусть $a = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$, $b = \frac{x}{2} + 1$, $c = \frac{3x}{2} - 6$. Тогда наши числа:

$$\log_{b^2} a,\ \log_{a^{\frac{1}{2}}} c^2,\ \log_{c^{\frac{1}{2}}} b \qquad a>0,\ b>0,\ c>0,$$

или $\qquad a \neq 1.\ b \neq 1\ c \neq 1.$

$$\frac{1}{2}\log_b a,\ 4\log_a c,\ 2\log_c b$$

Пусть 1 из логарифмов равен z, тогда второй тоже z, а $3-z-1$. Их произведение:

$$4\underbrace{\log_b a \cdot \log_a c \cdot \log_c b}_{\text{по св-ву } = 1} = z^3 - z^2$$

$$z^3 - z^2 - 4 = 0$$

Один из корней $z=2$. Разделив $z^3 - z^2 - 4$ на $z-2$ получим:

$z=2$. $\quad z^2 + z + 2 = 0$

корней нет

Один из логарифмов равен 2. Пусть $4\log_a c$:

$$\log_a c = \frac{1}{2},$$

$$c = \sqrt{a},$$

$$\frac{3x}{2} - 6 = \sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}}$$

$$9x^2 - 86x + 161 = 0$$

$x = 7$. $\quad x = \frac{23}{9}$ — не подходит по условию.

Или $4\log_a c = 1$

$$c^4 = a$$

$$\left(\frac{3x}{2} - 6\right)^4 = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$$

2

Чистовик.

$$\frac{81x^4}{4}-168x^2+648x+1296=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}.$$

$x=7.$

Ответ: $x=7.$

~~Задача~~

3

N1. Черновик.

НОД

$a = 14x$

$b = 14y$

$\log_2 3 \cdot \log_3 5 = c = 14z$

$= \frac{\log_2 3 \cdot \log_2 5}{\log_2 3} = \log_2 5$

x, y, z – взаимнопросты

НОД$(x, y, z) = 1$

НОК$(x, y, z) = 2^{14} \cdot 7^{15}$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$

$2^k \cdot 7^n$ — x, y, z

$2^k - y_1$, $7^n - y_2$, $1 - 3$ } 6

$2^k - 1$, $7^{n_1} - 2$, $7^{n_2} - 3$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$

$7^n - 1$, $2^{k_1} - 2$, $2^{k_2} - 3$

$7^{n_1} \cdot 2^{k_1} - 1$, $7^{n_2} \cdot 2^{k_2} - 2$, $1 - 3$ } 15·14·6

$2^k \cdot 7^n - 1$, $1 - 2$, $1 - 3$ } – 3

15·6

~~15·14·6~~

$2^8, 2^8; 7^{17}$

$2^8\ 7^{17}\ 2^8$

$7^{17}\ 2^8\ 2^8$

НОК = 84

14 28 42

2 2 2

N5.

$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = a$

$\frac{x}{2} + 1 = b$

$\frac{3x}{2} - 6 = c$

$\log_{\sqrt{b}} a \quad \log_{\sqrt{a}} c^2 \quad \log_{\sqrt{c}} b$

$2\log_b a \quad 4\log_a c \quad 2\log_c b$

I. $2\log_b a = 4\log_a c$

$\log_b a - 2\log_a c = 0$

$\frac{1}{\log_a b} = 2\log_a c,$

$b = c^2$

$\log_a b = 1 - 2\log_b a \log_a c$

$1 - 2\log_a c = 0$

$\log_a c = \frac{1}{2}$

$c = \sqrt{a}$

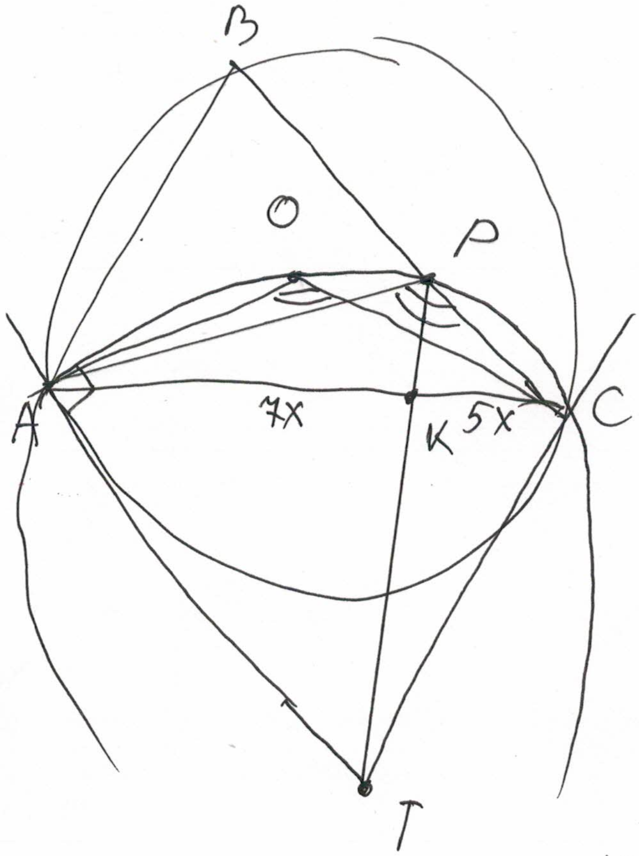
$\frac{3x - 12}{2}$

$\frac{3x}{2} - 6 = \sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}}$

$\Rightarrow \frac{9x^2}{4} - 18x + 36 = \frac{14x - 17}{4} \Rightarrow 9x^2 - 72x + 36 = 14x - 17$

$9x^2 - 86x + 53 = 0$

Чистовик



$\angle APC = \angle AOC$ – как вписанные

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{\frac{1}{2} h \cdot AK}{\frac{1}{2} h \cdot CK} = \frac{AK}{CK} = \frac{7}{5}$$

$AO = OC = R$

$AT = TC$ – отрезки касательных.

$\angle TAC = \angle TCA$ (в р/б треуг. $\triangle ACT$)

$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$

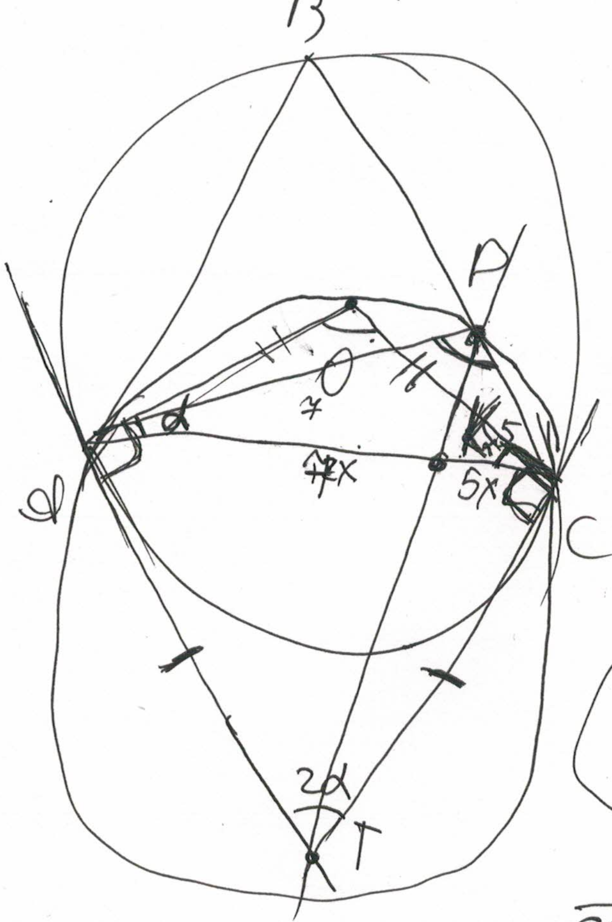
R_1 – радиус ω

R_2 – радиус ω_2 (окр. $AOPC$)

$169x^2 = 2R_1^2 + 2R_1^2 \cdot \cos\alpha \quad \alpha = \angle AOC$

$$\frac{13x}{\sin\alpha} = 2R_2$$

Черновик.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

$\angle OAT = \angle OCT = \alpha$

$\angle AOC = 180 - 2\alpha$

$S = \frac{1}{2}ah$

$\angle OAT = OCT = 90^\circ$

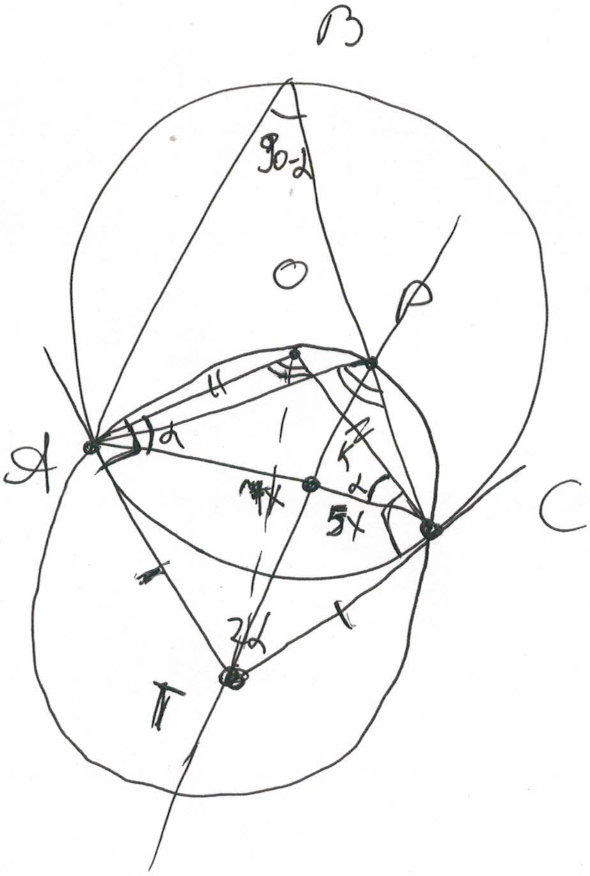
$AT = CT$

$$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$$

$AO = OC$

$$\frac{13x}{\sin(180-2\alpha)} = 2R$$

$169x^2 = 2R^2 + 2R^2\cos(180-2\alpha)$



$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

~~sin180~~

$\sin180\cos\beta - \cancel{\sin(-\beta)\cos180}$

$\sin(180-\beta)\cos 2\alpha$

$\cos(180-2\alpha) = -\sin2\alpha$

Черновик.

$\frac{3x}{2}-6=\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}$

$3x-12=\sqrt{14x-17}$

$9x^2-72x+144=14x-17$

$9x^2-86x+161=0$

$\boxed{x=7.}$

$9x-23=0$

$x=\frac{23}{9}$

$\frac{69}{18}-6<0$

$24 \times 3 = 72$

$144 + 17 = 161$

$9x^2-86x+161 \mid x-7$

$-\ 9x^2-63x \quad \mid 9x-23$

$-23x+161$

$-23x+161$

0

$23 \times 7 = 161$

$23 \times 3 = 69$

$\frac{1}{2}\log_b a=2$

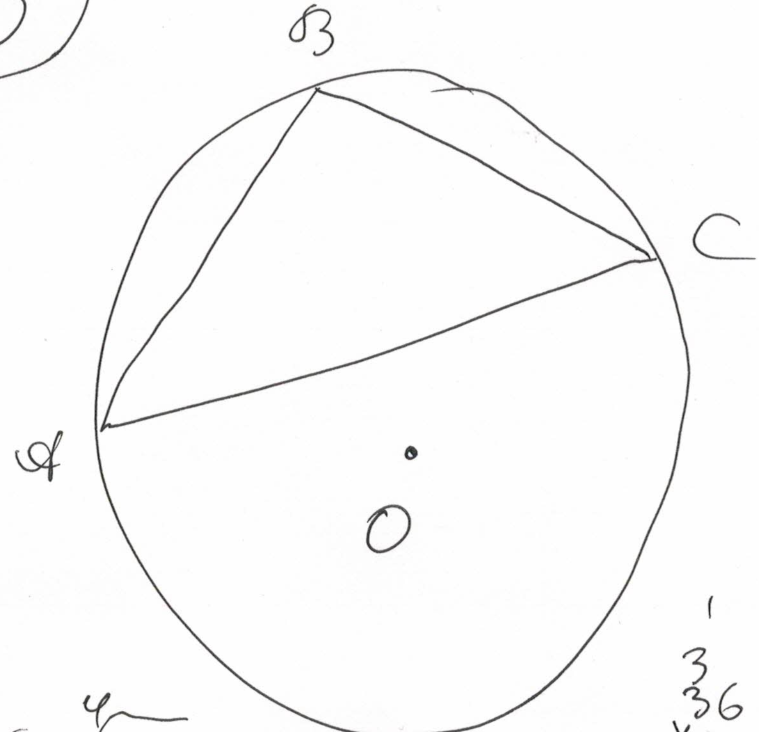
$\log_b a=4$

$a=b^4$

$2\log_c b=1$

$\log_c b=\frac{1}{2}$

$c=\sqrt{b}$



$c=\sqrt[4]{a}$

$c^4=a$

$4{,}5^4$

$\frac{21}{2}=10{,}5$

$\frac{49}{2}=24{,}5-4{,}25=20{,}25$

36×36: $216 + 108 = 1296$

$\left(\frac{3x}{2}-6\right)^4=\left(\frac{9x^2}{2}-18x+36\right)\left(\frac{9x^2}{2}-18x+36\right)=$

$=\frac{81x^4}{4}$ $+1296$

$81+81=168$

18×18: 144, 18

18×9: 162, 162, 324

$9x \times 18$

Черновик.

$4\log_a c = 2\log_c b + 1$

$\log_c b = 1$

$b = c$

$\frac{3x}{2} - 6 = \frac{x}{2} + 1,$

$3x - 12 = x + 2,$

$2x = 14$

$x = 7$

$\frac{21}{2} - 6 = \frac{49}{2} - \frac{17}{4}$

$\frac{9}{2} = \frac{81}{4}$

$x = 7$

II. $4\log_a c = 2\log_c b$

$\frac{1}{2\log_c a} = \log_c b$

$\log_c b = 1$

$1 - 2\log_c a \log_c b = 0$

$\log_c a \log_c b = \frac{1}{2}$

I. $2\log_b a = 4\log_a c$

$\log_b a = 2\log_a c$

$\frac{\log_2 a}{\log_2 b} = 2$

$\frac{1}{\log_a b} = 2\log_a c$

$1 - 2\log_a c \log_b c = 0$

$4\log_a c = 2\log_c b + 1$

102×99; 918; 918; 10098

$102 + 9 = 111$; $111 + 99 = 210$

10308

I. $\log_b a = 2\log_a c$

$\log_b a - 2\log_a c = 0$

$\log_b a - \frac{2}{\log_c a} = 0$

$\frac{\log_b a \log_c a - 2}{\log_c a} = 0$

$\log$

$\log_b a = 2$

$4\log_a c = 2$

$\log_a c = \frac{1}{2}$

$c = \sqrt{a}$

$x \cdot x \cdot (x-1) = x^3 - x^2$

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \log_b a \cdot \log_a c \cdot \log_c b = x^3 - x^2$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

$x = 2$

$x^2 + x + 2 = 0$

$D = 1 -$

$x^3 - x^2 - 4 \mid x - 2$

$x^3 - 2x^2 \quad\mid x^2 + x + 2$

$x^2 - 4$

$x^2 - 2x$

$2x - 4$

$2x - 4$

0