Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103163**

ID профиля: **172044**

Вариант 22

Чистовик

№1

$a_7 \cdot a_{16} = (a_1+6d)(a_1+15d) = a_1^2 + 21a_1d + 90d^2$

$a_{11} \cdot a_{12} = (a_1+10d)(a_1+11d) = a_1^2 + 21a_1d + 110d^2$

$S = \frac{2a_1+14d}{2} \cdot 15 = 15a_1 + 105d$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24, \\ a_1^2 + 21 \cdot a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4; \ | \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ -a_1^2 - 21a_1d - 110d^2 > -15a_1 - 105d - 4 \end{cases}$$

Сложим:

$-20d^2 > -28$

$d^2 < \frac{7}{5}$

по условию $d>0$:

$0 < d < \sqrt{\frac{7}{5}}$

$1 < \sqrt{1\frac{2}{5}} < 2$

по условию прогрессия состоит из целых чисел, это означает, что разность d тоже целое число. Единственное целое число в промежутке от 0 до $\sqrt{\frac{7}{5}}$ это 1, т.е. $d=1$. Тогда уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 - 15a_1 - 105 + 24 > 0, \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 - 15a_1 - 105 - 4 < 0; \end{cases} \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0, \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0; \end{cases} \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0, \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0; \end{cases} \begin{cases} a_1 \neq -3 \ (1) \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \ (2) \end{cases}$$

(2): $a_1 + 6a_1 + 1 < 0$

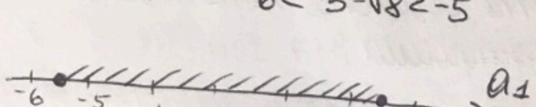
$\mathfrak{D} = 36 - 4 = 32 = 2^5$

$a_{1.1} = \frac{-6+4\sqrt{2}}{2} = -3 + 2\sqrt{2} = -3 + \sqrt{8}$

$a_{2.2} = -3 - 2\sqrt{2} = -3 - \sqrt{8}$

$2 < \sqrt{8} < 3$ $\qquad -3 < -\sqrt{8} < -2$

$-1 < -3 + \sqrt{8} < 0$ $\qquad -6 < -3 - \sqrt{8} < -5$



По условию $a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$ при этом $a_1 \neq -3$, т.е. все возможные значения a это $-5, -4, -2, -1$

Ответ: $-5; -4; -2; -1$.

21103163 (U172044 M1301305)

Чистовик

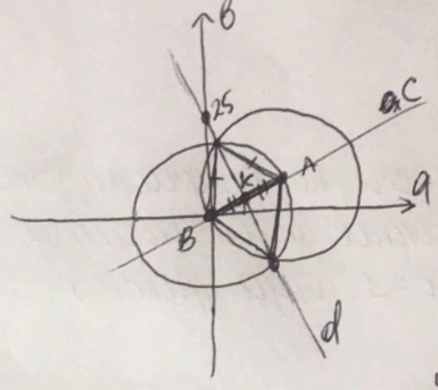
№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50,\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,50)\end{cases}$$

Заметим, что если $a^2+b^2\le \min(14a+2b,50)$ то верно и $a^2+b^2\le \max(14a+2b, 50)$. Тогда 2-е ~~ур~~ неравенство можно записать, как:

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 14a+2b,\\ a^2+b^2\le 50;\end{cases}\quad \begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$$

Эти нер-ва задают окружности с центрами $A(7;1)$ и $B(0;0)$ и радиусами $5\sqrt{2}$. $AB=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, т.е. B лежит на окружности с центром A, а A лежит на окружности с центром B.

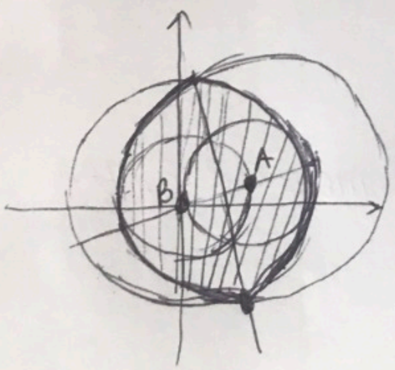


Прямая c задается уравнением $b=\frac{1}{7}a$, тогда d задается ур-ем $b=-7a+m$ и проходит через $K(\frac{7}{2};\frac{1}{2})$, т.е. $\frac{1}{2}=-\frac{49}{2}+m$, $m=25 \Rightarrow$ c задается $b=-7a+25$

Заметим, что решением 2-го уравнения является область пересечения данных двух окружностей.

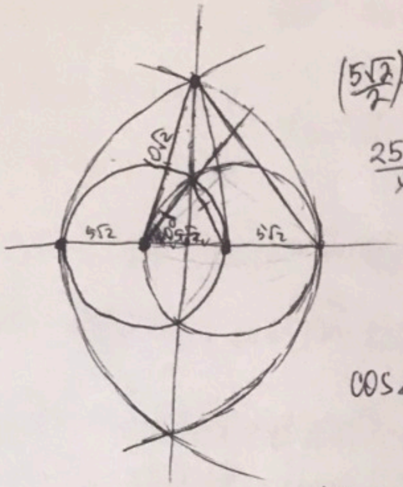
$(x-a)^2+(y-b)^2=(a-x)^2+(b-y)^2 \Rightarrow$ 1-е уравнение задает окружность такого же радиуса $5\sqrt{2}$ и его центр имеет координаты $(x;y)$.

Чтобы для $(x;y)$ существовали a и b, при котором выполняется сис-ма, третья ок-ть должна иметь общие точки с областью пересечения первых двух окружностей. Для этого центр третьей ок-ти должен лежать в данной области:



она составляет область пересечения окружностей с центрами $A(7;1)$ и $B(0;0)$ и радиусами $10\sqrt{2}$. Т.к. центр третьей ок-ти имеет координаты $(x;y)$, то данная область и будет являться искомой фигурой.

Черновик



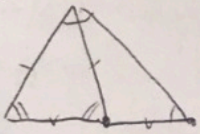
$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2 = (10\sqrt{2})^2$$

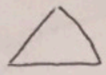
$$\frac{25\cdot 2}{4\cdot 2} + x^2 = 100\cdot 2$$

$$x^2 = \frac{400-25}{2} = \frac{375}{2} = 5\sqrt{\frac{15}{2}}$$

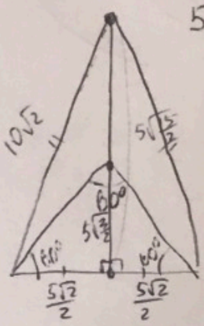
$$2 < \dots < 3$$

$$\cos = \frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$





$$\begin{array}{r|l} -375 & 25 \\ 25 & 15 \\ \hline 125 & \end{array}$$



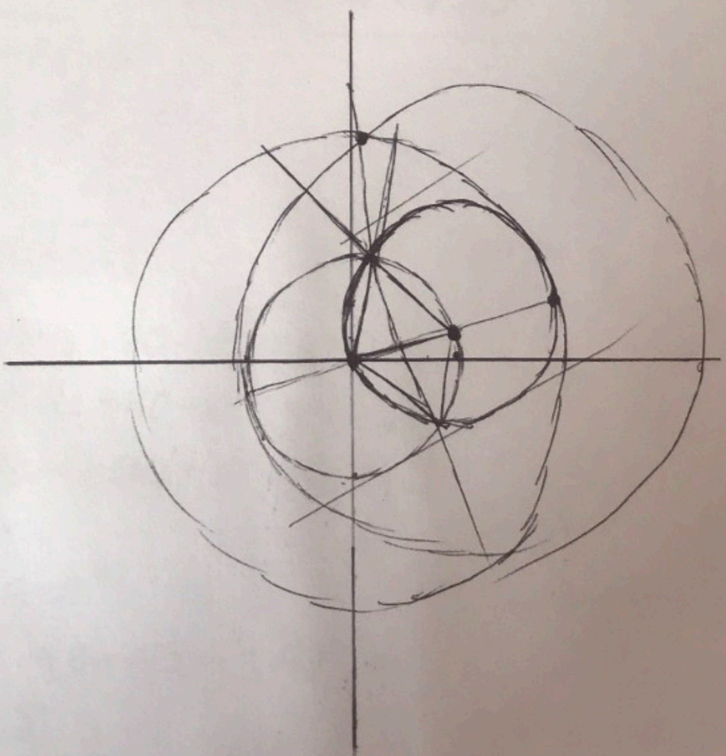
$2,5 - 1$

$2\sqrt{2}$

$$5\left(\sqrt{7,5} - \sqrt{1,5}\right)$$

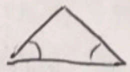
$$\sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \vee 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{15} - \sqrt{3} \vee 4$$



Черновик

№



Черновик

№1.

$S_{15} = S$

$a_1 \in Z, d \in Z.$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{12} = a_1 + 11d.$

$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 =$

$= \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 =$

$= (a_1 + 7d) \cdot 15$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > (a_1+7d)\cdot 15 - 24 \ (1) \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < 15a_1 + 15\cdot 7d + 4 \ (2) \end{cases}$$

$6 \cdot 15 = 60 + 30 = 90$

$15 \cdot 7 = 90 + 15 = 105$

$$(1)\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 6\cdot 15d^2 > 15a_1 + 15\cdot 7d - 24 \\ a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 15\cdot 7d \end{cases}$$

$-a_1^2 - 21a_1d - 110d^2 > -15a_1 - 15\cdot 7d$

$\cancel{-20d^2 > 0}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d - 15a_1 + 90d^2 - 105d + 24 > 0 \\ a_1^2 + 21a_1d - 15a_1 + 110d^2 - 105d - 4 < 0 \end{cases}$$

$-a_1^2 - 21a_1d + 15a_1 - 110d^2 + 105d + 4 > 0$

$-20d^2 + 28 > 0$

$d^2 < \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$

$0 < d < \sqrt{\frac{7}{5}}$

$1 < \sqrt{\frac{7}{5}} < 2 \Rightarrow \boxed{d = 1}$

$90 + 24 = 114$, $114 - 105 = 9$

$90+24 = 114$, -105, 09

$110 - 109$

$1{,}5 \cdot 1{,}5$

$1 < \sqrt{2} < 1{,}5$

$2 < 2\sqrt{2} < 3$

$-1 < -3 + 2\sqrt{2} < 0$

$-3 < -2\sqrt{2} < -2$

$-6 < -3 - 2\sqrt{2} < -5$

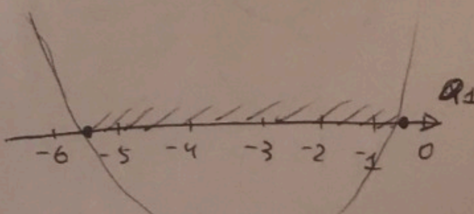
$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 - 15a_1 + 90 - 105 + 24 > 0 \\ a_1^2 + 21a_1 - 15a_1 + 110 - 105 - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0, (a_1+3)^2 > 0, a \in R \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0. \end{cases}$$

$D = 36 - 4 = 32 = 2^5$

$a_{11} = \frac{-6 + 4\sqrt{2}}{2} = -3 + 2\sqrt{2} = -3 + \sqrt{8}$

$a_{12} = -3 - 2\sqrt{2}$



$a_1 = -5$; $a_1 = -4$; $a_1 = -3$; -2; -1

21103163 (U172044 M1301305)

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b;50)\end{cases}$$

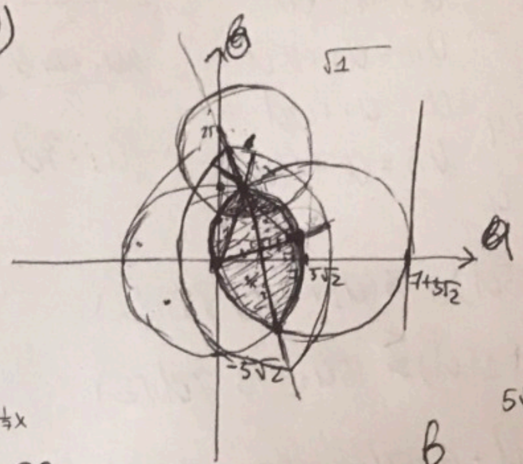
$\sqrt{25\cdot 2}=5$

$50=5^2\cdot 2=(5\sqrt{2})^2$

$a^2+b^2\le 14a+2b$

$$\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$$

49 $+1$



$24 \times 24 = 96$, 48, 576, $+49$, $625=25^2$

$(a-x)^2+(b-y)^2\le 50$

$14a+2b\le 50$

$\boxed{b\le 25-7a}$

$b=25-7a$

$25-7a=0$

$a=\frac{25}{7}=3\frac{4}{7}$

$y=\frac{1}{7}x$

$b=-7a+m$

$\frac{1}{2}=-\frac{7\cdot 7}{2}+m$

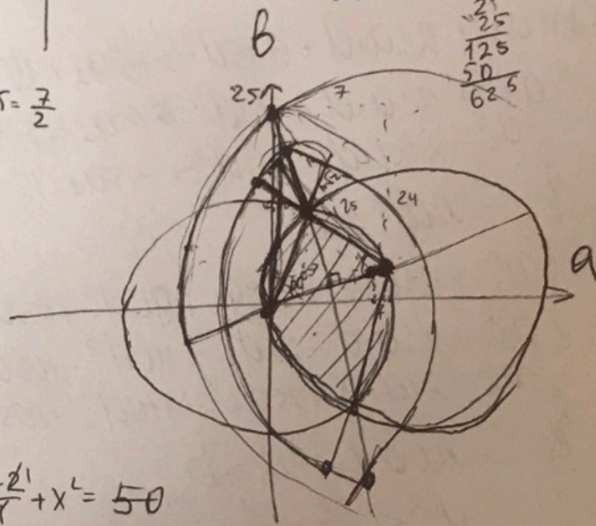
$1=-49+2m$

$m=25$

$3{,}5=\frac{7}{2}$

$5\sqrt{2}\approx\sqrt{50}$

$25 \times 25 = 125$, 50, 625

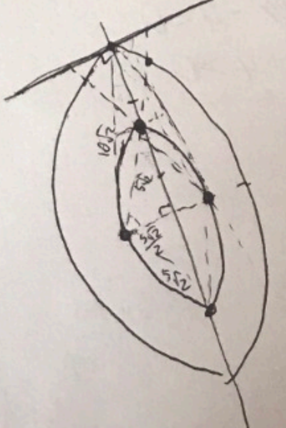


$10\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}\cdot 2=$

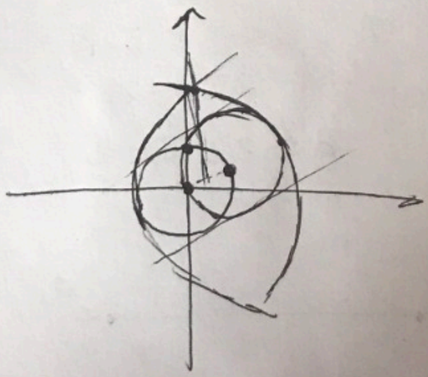
$10\sqrt{2}=\sqrt{200}$

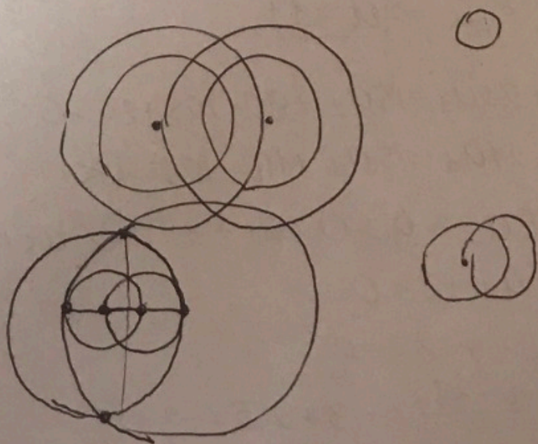
$14<$ <15



$\frac{25\cdot 2}{4}+x^2=50$

$x^2=\frac{100-25}{2}=\frac{75}{2}\Rightarrow x=5\sqrt{\frac{3}{2}}$





21103163 (U172044 M1301305)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103163**

ID профиля: **172044**

Вариант 22

Чистовик

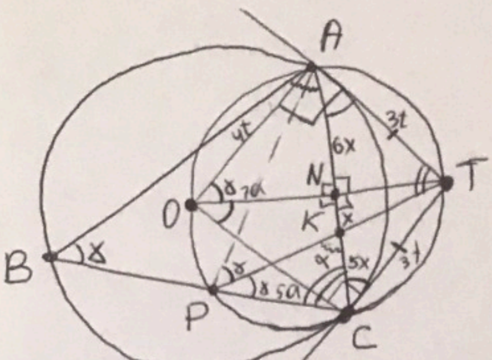
№1.

~~Пусть a~~ Из того, что $НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18}$ ясно, что a, b и c это произведение степеней 2 и 7, т.е. имеют вид:
$a=2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$, $b=2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$, $c=2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$, где $\alpha_i, \beta_i \in N$ или равны 0.
Тогда поймём, что $НОД(a,b,c)=2^{\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\cdot 7^{\min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}$, а $НОК(a;b;c)=2^{\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\cdot 7^{\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}$, тогда из первого выражения понимаем, что α_1, α_2 или α_3 равно 1, и β_1, β_2 или β_3 равно 1, а из второго выражения, что α_1, α_2 или α_3 равно 17, и β_1, β_2 или β_3 равно 18. Тогда для каждого набора α или β два числа уже определены, а третье может принимать любое значение от 1 до 17 для α, и от 1 до 18 для β. Отсюда количество перестановок α: $C_3^2\cdot 17=\frac{3!}{2!\,1!}\cdot 17=3\cdot 17=51$; количество перестановок β: $C_3^2\cdot 18=3\cdot 18=54$; всего вариаций перестановок α и β и соответственно решений (a,b,c): $51\cdot 54=\cancel{3078}=2754$

Ответ: ~~3078~~ 2754.

Чистовик

№6.



А. 1) $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ (OA и OC - радиусы к точкам касания)

ATCO - вписанный четырёхугольник, т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ T лежит на окружности, описанной вокруг A, O, C.

2) $\dfrac{[APK]}{[CPK]} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot AK \cdot PK \cdot \overset{\sin\alpha}{\overset{\parallel}{\sin(180^\circ - \alpha)}}}{\frac{1}{2}\cdot KC \cdot PK \cdot \sin\alpha} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{7}{5}$

тогда $AC = 12x$, $KC = 5x$

3) $\angle ABC = \angle TAC$ (опир. на одну дугу); $\angle TAC = \angle TPC \Rightarrow \angle TPC = \angle ABC \Rightarrow TP \parallel AB \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle PKC = \angle BAC$

$\triangle PKC \sim \triangle BAC$ - по двум углам

$\dfrac{[ABC]}{[CPK]} = \left(\dfrac{12x}{5x}\right)^2 = \dfrac{144}{25}$; $[ABC] = \dfrac{144 \cdot 5}{25} = \dfrac{144}{5} = \boxed{28{,}8}$

Б. 4) $\triangle ATC$ - равнобедр. ($AT = TC$ - отрезки касательных)

$\angle CAT = \angle ACT = \angle ABC$

~~$\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle CAT + \angle ACT) = \angle ABC$~~

$\angle AOT = \angle ACT = \angle ABC$

5) $\triangle ATO$ ($\angle A = 90^\circ$):

$tg(\angle O) = tg(arctg\,\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} \Rightarrow AT = 3t$, $AO = 4t$

$OT = 5t$ ($\triangle ATO$ подобен египетскому) (OT - диаметр меньшей окружности, т.е. её радиус равен 2,5 t)

6) $\angle TOC = \angle TAC = \angle ABC$

$\triangle ATC = \triangle CTO$ (по гипотенузе и острому углу)

$\Downarrow$

$\triangle ATO$ симметричен $\triangle CTO$ относительно $OT \Rightarrow$ ~~AN~~ $AC \perp OT$, $AN = NC =$
$= \frac{1}{2} \cdot 12x = 6x$

$[ATO] = \frac{1}{2} \cdot 3t \cdot 4t = \frac{1}{2} \cdot 5t \cdot 6x \Rightarrow 5x = 2t$, $x = 0{,}4t = \frac{2}{5}t$

7) ~~$\angle APB = \angle ACP$~~

~~$\triangle ATK \sim \triangle BCA$ (по двум углам)~~

$\angle APK = \angle ACT = \angle ABC \Rightarrow PK$ - бис-са $\triangle APC$

$\dfrac{5x}{7x} = \dfrac{PC}{AP} \Rightarrow PC : AP = 5 : 7 \Rightarrow PC = 5a$, $AP = 7$

Пусть $\angle ABC = \gamma$, тогда из $\triangle OAT$ $\sin\gamma = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2\gamma = \frac{24}{25}$

$[APC] = \frac{1}{2} \cdot 7a \cdot 5a \cdot \sin 2\gamma = 7 + 5$

$\dfrac{7 \cdot 5 \cdot 24 \cdot a^2}{2 \cdot 25} = 12 \Rightarrow a^2 = \frac{5}{7} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{5}{7}}$

(см. на след. странице)

Чистовик

$PC = 5\sqrt{\frac{5}{7}}$; $PA = 7\sqrt{\frac{5}{7}}$, $AP = 12 \cdot x = \cancel{12}$

$\cos 2\gamma = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

По т. косинусов для $\triangle APC$:

$144x^2 = 25 \cdot \frac{5}{7} + 49 \cdot \frac{5}{7} - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{25}$

$144x^2 = \frac{125}{7} + 35 - 14$

$144x^2 = 17\frac{6}{7} + 21$

$144x^2 = 38\frac{6}{7}$

$x^2 = \frac{\cancel{272}\ \cancel{136}\ 68\ 34\ 17}{\cancel{7 \cdot 144}\ 72\ 36\ 18\ 9}$

$x^2 = \frac{17}{63}$

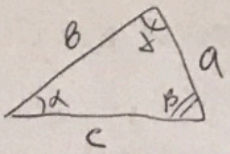
$x = \sqrt{\frac{17}{63}}$

$AC = 12x = 12\sqrt{\frac{17}{63}}$

Ответ: а) 28,8; б) $12\sqrt{\frac{17}{63}}$

Черновик

—



$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

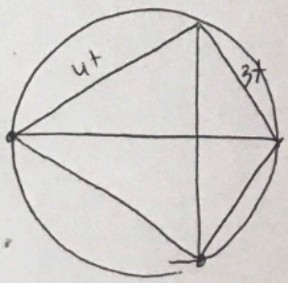
$S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\gamma =$ $\quad \sin\gamma = \frac{c}{2R}$

$= \frac{abc}{4R}$

$\frac{[APK]}{[PKC]} = \frac{AP}{PC} = \frac{7}{5}$

$\frac{2t}{\sin\alpha} = 5t$ $\quad AC = \frac{12 \cdot 2}{5} t = \frac{24}{5} t$

$\sin\alpha = \frac{2}{5}$ $\quad 1$



$AC = 12x = \frac{24}{5} t$

$\frac{24}{5} \cdot \frac{25}{24} \cdot t = 5t$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{24}{25} \cdot 5a \cdot 7a = 12$

$\frac{7a^2}{5} = 1$

$a^2 = \frac{5}{7}$

$\frac{3t}{7a} = -$

$125 \mid 7$; -7; 17; 55; -49; 6

-35; 14; 21; $+17$; 38

$38 \times 7 = 266$; $+6$; 272

21103163 (U172044 M1301306)

Черновик

№1

$НОД(a;b;c)=14=2\cdot7$

$НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot7^{18}$

~~$a\le b\le c$~~

$a=2^{\alpha_1}\cdot7^{\beta_1}$ α_1,α_2 или $\alpha_3=1$

$b=2^{\alpha_2}\cdot7^{\beta_2}$ β_1,β_2 или $\beta_3=1$

$c=2^{\alpha_3}\cdot7^{\beta_3}$ α_1,α_2 или $\alpha_3=17$

β_1,β_2 или $\beta_3=18$

$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
1	17	1-17 17вар.	1	18	1-18 18вар.
1	1				

$57\cdot54$: 228, 285, 3078

$54\cdot51$: 54, 270, 2754

$19\cdot3=57$

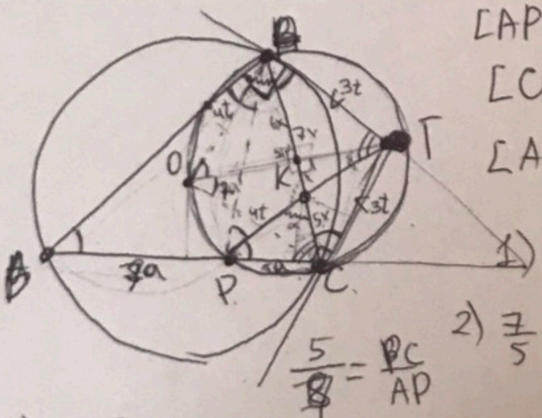
кол-во перестановок α: $C_3^2\cdot17=\frac{3!}{2!\cdot1!}\cdot17=3\cdot17=30+21=51$

кол-во перестановок β: $C_3^2\cdot18=3\cdot18=30+24=54$

кол-во всего вариаций значений $\alpha_i;\beta_j$: $51\cdot54=2754$

Ответ: 2754.

№3.



$[APK]=7=\frac{1}{2}\cdot AK\cdot KP\cdot\sin\alpha$

$[CPK]=5=\frac{1}{2}\cdot PK\cdot KC\cdot\sin\alpha$

$[ABC]-?$

1) ~~T лежит на~~ ATCO - впис. чет-к

2) $\frac{7}{5}=\frac{AK}{KC}\Rightarrow AC=12x,\ KC=5x$

$\frac{5}{8}=\frac{PC}{AP}$

$6\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$

3) $\triangle CKP\sim\triangle CAB$

$\frac{[CPK]}{[ABC]}=\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{25}{144}$ $\frac{5}{[ABC]}=\frac{25}{144}\Rightarrow[ABC]=\frac{144}{5}=\frac{288}{10}=28{,}8$

$\frac{ABC}{2R}$ $\frac{4}{2{,}5}=$ $2{,}5\cdot\frac{5}{2}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{4}{2{,}5}=\frac{8}{5}$

$\frac{BC}{3t}=\frac{AC}{KT}=\frac{AB}{7x}=\frac{8}{5}\Rightarrow BC=\frac{24t}{5};\ AB=\frac{56x}{5}$

$\frac{1}{2}\cdot5t\cdot8x=\frac{1}{2}\cdot8t\cdot4t$

$5x=2t$

$\boxed{x=0{,}4t}=\frac{2}{5}t$

$PK\sin\alpha=2$

$\frac{AP}{PC}=\frac{7}{5}$ $\frac{1}{2}\cdot5x\cdot PK\sin\alpha=5$ $\frac{1}{2}\cdot7x\cdot PK\sin\alpha=7$