Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102957**

ID профиля: **321301**

Вариант 22

Задача 1. Чистовик.

Пусть: $d := a_{i+1} - a_i$.

$a_7 a_{16} + 24 \geqslant S \geqslant a_{11} \cdot a_{12} - 4$

$a_7 \cdot a_{16} + 24 \geqslant a_{11} \cdot a_{12} - 4$

$28 \geqslant a_{11} \cdot a_{12} - a_7 \cdot a_{16}$

$28 \geqslant \left(a_{11,5}^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) - \left(a_{11,5}^2 - \left(\frac{9d}{2}\right)^2\right) \quad a_{11,5} = \frac{a_{11}+a_{12}}{2}$

$28 \geqslant (4,5d)^2 - (0,5d)^2$

$28 \geqslant 20d^2$

$d = 1 \quad (d > 0)$

$a_7 \cdot a_{16} + 24 \geqslant S \geqslant a_{11} \cdot a_{12} - 4$

$a_7 \cdot a_{16} + 24 \geqslant 15a_8 \geqslant a_{11} \cdot a_{12} - 4$

$a_1^2 + 21a_1 + 114 \geqslant 15a_1 + 105 \geqslant a_1^2 + 21a_1 + 106$

$0 \geqslant -a_1^2 - 6a_1 - 9 \geqslant -8$

$0 \leqslant (a_1 + 3)^2 < 8$

$0 < |a_1 + 3| \leqslant 2$

$a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

Ответ: $-5; -4; -2; -1$.

Задача 2.

Построим точки C и D и цилиндр, по ним попытаемся достроить A и B.
A и B лежат в сферах (на поверх.) с центрами C и D и радиусами 5 и 7. Эти две сферы пересекаются в окружности с осью симметрии CD. Значит A и B лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Поскольку A и B лежат в сечении цилиндра плоскостью перпендикулярной его оси, хорда AB не превосходит диаметра цилиндра. Значит радиус не менее $\frac{AB}{2} = 2$.

Продолжение задачи 2. Чистовик.

Теперь построим цилиндр радиуса 2.

На нём можно построить A в любом месте.

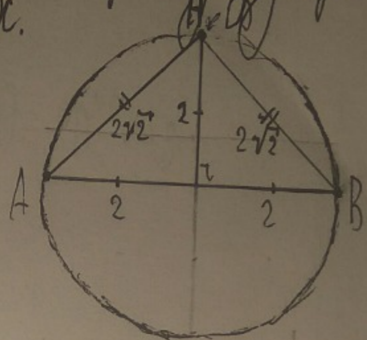
B должно быть отражением A относительно оси цилиндра.

~~Для точек C и D есть по два~~

Для точки C есть четыре симметричных варианта.

Для D остаётся два варианта, отличающихся тем, находятся C и D в одном полупространстве, разделённых плоскостью проходящей через A и B и перпендикулярной оси цилиндра, или в разных.

Пусть: H – пересечение CD и плоск. AB.



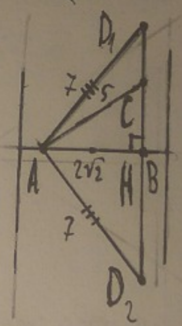
$AH = AB \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{17}$

$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{41}$ (теорема Пифагора)

$CD = DH \pm CH = \sqrt{41} \pm \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{41} \pm \sqrt{17}$.



Задача 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 14a+2b \end{cases}$$

$a^2 - 14a + b^2 - 2b \le 0$

$(a-7)^2 + (b-1)^2 \le 50$

Пусть: O – точка $(0,0)$, O_2 – точка $(7,1)$, C – (a,b), Z – (x,y), $r = \sqrt{50}$.

$$\begin{cases} CZ \le r \\ OC \le r \\ O_2C \le r \end{cases}$$

Пусть: ω_1 и ω_2 – окружности радиуса r с центрами O и O_2.

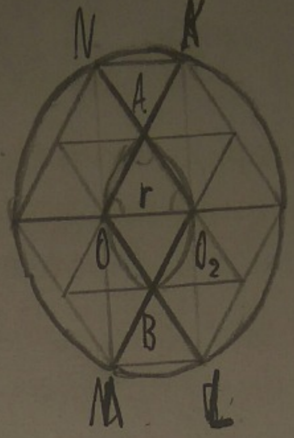
Заметим, что $OO_2 = \sqrt{7^2+1^2} = r$.

лист 2 из 3.

21102957 (U321301 M1296075)

Продолжение задачи 3. Чистовик.

$OC \le r$, $O_2C \le r$ равносильно тому, что C лежит на пересечении кругов ω_1 и ω_2.



Возможные положения Z проще всего определить с помощью правильной треугольной сетки.

C лежит в кривом двуугольнике образованном двумя дугами AB радиуса r с центрами O и O_2.

Z лежит в кривом четырёхугольнике KLMN.

Стороны KL и MN являются дугами радиуса 2r с центрами O и O_2, соответственно. Эти стороны вызваны ограничениями $OZ \le OC + CZ \le 2r$ и $O_2Z \le O_2C + CZ \le 2r$.

Стороны NK и LM являются дугами радиуса r с центрами A и B. Эти стороны вызваны крайними положениями C в A и B.

$$S_M = S_{\overset{\frown}{KL}} + S_{\overset{\frown}{NM}} + S_{\overset{\frown}{ML}} + S_{\overset{\frown}{NK}} - S_{OAO_2B} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(2r)^2 + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(2r)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\cdot\pi r^2 + \frac{1}{6}\cdot\pi r^2 - 2\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3}\cdot 4\pi r^2 + \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 =$$

$$= 3\pi r^2 - r^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = r^2\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 50\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ответ: $150\pi - 25\sqrt{3}$ (≈ 429).

лист 3 из 3

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102957**

ID профиля: **321301**

Вариант 22

$$CP = \frac{OC}{\sin(\angle OPC)} \cdot \sin(\angle COP)$$

$$CP = \frac{OC \cdot \sin(\pi - \angle OPC - \angle OCP)}{\sin(\angle OPT + \angle TPC)}$$

$$CP = \frac{OC}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)} \cdot \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) - \alpha\right)$$

$$CP = \frac{OC}{\cos\delta} \cdot \cos(\alpha + \gamma)$$

. $CB = 2CO \cdot \cos(\angle OCB)$

$CB = 2CO \cdot \cos\alpha$

. $S_{ABC} : S_{APC} = BC : PC$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{2CO \cdot \cos\alpha}{\left(\frac{OC}{\cos\delta} \cdot \cos(\alpha + \gamma)\right)}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{2\cos\alpha\cos\delta}{\cos(\alpha + \gamma)}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{2}{1 - tg\alpha \cdot tg\gamma}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{6}}$$

$$S_{ABC} = \frac{12}{5} \cdot (S_{APK} + S_{KPC})$$

$$S_{ABC} = \frac{12}{5} \cdot (5 + 7) = 28{,}8$$

Ответ: 28,8

~~$\cos 2\gamma = 1 - 2.$~~

7. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ чистовик

$\angle ABC = \angle TOC$

$tg(\angle ABC) = tg\delta$

$tg\delta = \frac{3}{4}$

8. $tg\delta \cdot tg\alpha = \frac{1}{6}$

$\frac{3}{4} tg\alpha = \frac{1}{6}$

$tg\alpha = \frac{2}{9}$

9. $\frac{AC}{\sin(\angle APC)} = \frac{CP}{\sin(\angle CAP)}$

$$CP = \frac{AC}{\sin(2\delta)} \cdot \sin(\angle CAO - \angle OAP)$$

$$AC \cdot CP = \frac{AC^2}{\sin(2\delta)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta - \alpha\right)$$

$$AC \cdot CP \cdot \sin(\angle ACP) = \frac{AC^2}{\sin(2\delta)} \cdot \cos(\alpha + \delta) \cdot \sin(\angle ACP)$$

$$2S_{ACP} = \frac{AC^2}{\sin(2\delta)} \cdot \cos(\delta + \alpha) \cdot \cos(\delta - \alpha)$$

$$AC = \left(\frac{2S_{ACP} \cdot \sin(2\delta)}{\cos(\delta + \alpha) \cdot \cos(\delta - \alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$AC = \left(\frac{24 \cdot \frac{2}{tg\delta + ctg\delta}}{\frac{(\cos(2\delta) + \cos(2\alpha))}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$AC = \left(\frac{96}{(tg\delta + ctg\delta)(\cos(2\delta) + \cos(2\alpha))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

лист 3 из 3

Продолжение задачи 5.

Значит числа равны 1; 2 и 2. Чистовик.

Если $\frac{2\ln c}{\ln b}=1$:

$\frac{2\ln c}{\ln b}=1 \Rightarrow c^2=b \Rightarrow \left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\left(\frac{3x}{2}-6\right) \Rightarrow (x+2)^2=6x-24 \Rightarrow x^2-2x+28=0$

Противоречие ($x^2-2x+28\geq 27$).

Значит $\frac{2\ln c}{\ln b}=2$.

$\frac{2\ln c}{\ln b}=2 \Rightarrow c=b \Rightarrow \frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6 \Rightarrow x=7$

Подставим $x=7$:

$a=\frac{81}{4}, b=\frac{9}{2}, c=\frac{9}{2}, \frac{\ln a}{2\ln c}=1, \frac{4\ln b}{\ln a}=2, \frac{2\ln c}{\ln b}=2.$

Ответ: 7.

Задача 6.

1. Так как $\angle OAT=\angle OCT=\frac{\pi}{2}$; O, A, T, C лежат на одной окружности.
O, A, T, C, P лежат на одной окружности.
Пусть: $\angle OTP=\alpha$, $\angle TOC=\delta$, M – сер. AC.

2. $CK:KA=5:7$, т.к. $\triangle CPK=5$, $\triangle APK=7$
$CK:(CK+KA)=5:(5+7)$
$CK:CM=5:\left(\frac{12}{2}\right)$
$(CM-CK):CM=(6-5):6$
$\frac{MK}{CM}=\frac{1}{6}$
$\cancel{tg\,\alpha=\frac{1}{6}}$

3. $\delta=\angle TOC=\angle TPA=\angle TCA$
$\frac{MK}{CM}=\frac{MK}{MT}\cdot\frac{MT}{MC}=tg\,\alpha\cdot tg\,\delta$
$tg\,\alpha\cdot tg\,\delta=\frac{1}{6}$

4.

Лист 2 из 3

Задача 4. Чистовик.

$НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \Rightarrow$ в a,b,c входят только два простых множителя — 2 и 7.

Пусть: $a = 2^{x_1}\cdot 7^{x_2}$; $b = 2^{y_1}\cdot 7^{y_2}$; $c = 2^{z_1}\cdot 7^{z_2}$.

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 14 \\ НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min(x_1,y_1,z_1) = 1 \\ \min(x_2,y_2,z_2) = 1 \\ \max(x_1,y_1,z_1) = 17 \\ \max(x_2,y_2,z_2) = 18 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \min(x,y,z) = 1 \\ \max(x,y,z) = n > 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x\ y\ z = 1\ 1\ n & (3 \text{ варианта}) \\ x\ y\ z = 1\ k\ n & (6(n-2) \text{ вар.}) \\ x\ y\ z = 1\ n\ n & (3 \text{ варианта}) \end{matrix} \quad (n > k > 1)$$

Есть $3+6(18-2)+3 = 102$ варианта x_2, y_2, z_2 и $3+6(17-2)+3 = 96$ вариантов x_1, y_1, z_1; эти варианты независимы друг от друга.

Значит всего есть: $96\cdot 102 = 9792$ вариантов $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, а значит столько вариантов a, b, c.

Ответ: 9792. ~~варианта~~

Задача 5.

Пусть: $a := \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$; $b := \frac{3x}{2} - 6$; $c := \frac{x}{2} + 1$

$\log_{c^2}(a), \log_{\sqrt{a}}(b^2), \log_{\sqrt{b}}(c) = \frac{\ln a}{2\ln c}, \frac{4\ln b}{\ln a}, \frac{2\ln c}{\ln b}$

Пусть: числа равны y, y и $y-1$ (без соответ.).

$y\cdot y\cdot(y-1) = \frac{\ln a}{2\ln c}\cdot\frac{4\ln b}{\ln a}\cdot\frac{2\ln c}{\ln b}$

$y^3 - y^2 = 4$

$y^3 - y^2 - 4 = 0$

$(y-2)(y^2+y+2) = 0$

$y = 2 \quad y^2+y+2 > 0$