Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102879**

ID профиля: **294648**

Вариант 22

Чистовик

Задача 1. $a_n = a_1 + b(n-1)$, $a_1 \in \mathbb{Z}$, $\forall k\ a_k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in \mathbb{Z}$ и $b>0$ (по усл.)

$S = a_1 + \ldots + a_{15} = 15a_1 + b\,\frac{1+14}{2}\cdot 14 = 15a_1 + 105b$

$a_7 a_{16} = (a_1+6b)(a_1+15b) > S-24$

$a_1^2 + 21ba_1 + 90b^2 > S-24$

$S+4 > a_{11}\cdot a_{12} = (a_1+10b)(a_1+11b)$

$\begin{cases} S+4 > a_1^2+21ba_1+110b^2 \\ a_1^2+21ba_1+90b^2 > S-24 \end{cases}$

$90b^2+4 > 110b^2-24$

$\begin{cases} 20b^2 < 28 \\ b>0 \end{cases} \Rightarrow 0<b<\sqrt{\frac{7}{5}}$, по усл. $b\in\mathbb{Z} \Rightarrow b=1$

(т.к. $1<\sqrt{\frac{7}{5}}<2$

$\begin{cases} a_1^2+21a_1+110 < 15a_1+105+4 \\ a_1^2+21a_1+90 > 15a_1+105-24 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+6a_1+1<0 \\ a_1^2+6a_1+9>0 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{D}{4} = 9-1 = 8$

$\begin{cases} (a_1+3-\sqrt{8})(a_1+3+\sqrt{8}) < 0 \\ (a_1+3)^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3-\sqrt{8}; -3+\sqrt{8}) \end{cases}$

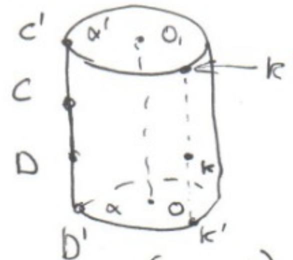
$-6 < -3-\sqrt{8} < -5$; $-1 < -3+\sqrt{8} < 0 \Rightarrow a_1\in\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \in \{-5;-4;-3;-2;-1\} \\ a_1 \neq -3 \end{cases}$

Ответ: $a_1 \in \{-5;-4;-2;-1\}$

21102879 (U294648 M1305126)

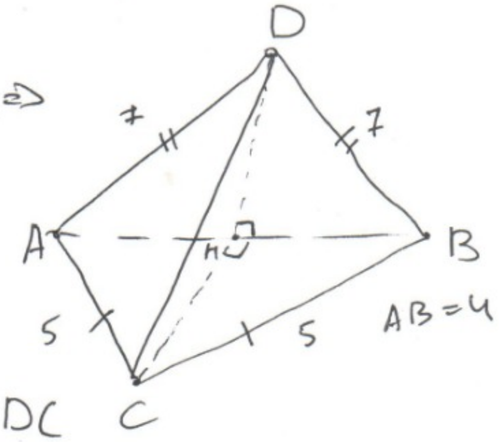
Чистовик

Задача 2



По усл. $C, D \in$ бок стороне
$CD \parallel OO_1$
$OO_1 \perp \alpha, \alpha'$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $CD \perp \alpha$, $CD \perp \alpha'$ $\Rightarrow$

проекции точ~~ек~~ек C и D на плоскости α (и α') совпадают $\Rightarrow$ при проецировании т. K (на бок. стороне) на основания цилиндра $C'K'' = D'K'$

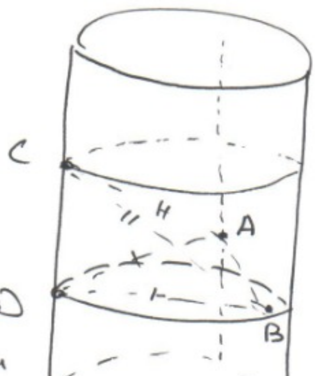


• Пусть $CH \perp AB$, $\triangle ABC$ - равнобедр. $\Rightarrow$

$AH = HB$
$\triangle ADB$ - ранобедр. $\Big\}$ $\Rightarrow DH \perp AH$.

$AB \perp DH$
$AB \perp HC$ $\Big\}$ $\Rightarrow AB \perp (DHC)$
$DC \subset (DHC)$ $\Big\}$ $\Rightarrow AB \perp DC$

$AB \perp DC$
$DC \perp \alpha$
$DC \perp \alpha'$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $AB \parallel \alpha$, $AB \parallel \alpha'$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ проекции отрезка AB на основание равны этому отрезку (и равны 4)



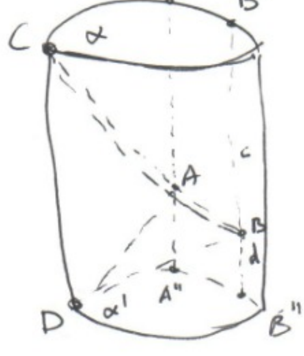
• Впишем тетраэдр в цилиндр и спроецируем его ~~грани~~ ребра на ~~основания~~ плоскости α, α': $C \in \alpha$, $D \in \alpha'$, α, α ॥ плоскости основания цилиндра

(I сл.) все точки лежат на новом цилиндре

Пусть $B'B = c$, $BB'' = d$ $\Rightarrow CD = c + d$ (т.к. это высота цилиндра)

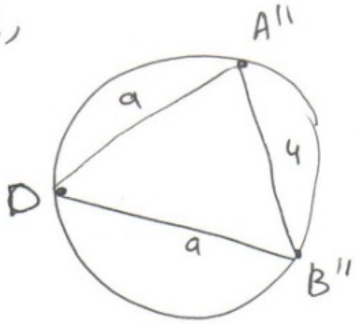
Т.к. $A'A'' \perp \alpha, \alpha'$, $B'B'' \perp \alpha, \alpha'$ $\Rightarrow$ по т. Пифагора

$B'C^2 = CB^2 - c^2$; $AB \parallel \alpha, \alpha'$, $\Rightarrow CA = CB \Rightarrow CA' = CB'$,
$DB''^2 = DB^2 - d^2$; $DA = DB \Rightarrow DA'' = DB''$



$\Rightarrow \triangle A'B'C = \triangle DA''B''$ по 3-ем сторонам

Чистовик



$A'B' = const \Rightarrow$ радиус минимальный, когда известная хорда – диаметр (диаметр – самая длинная хорда) $\Rightarrow$

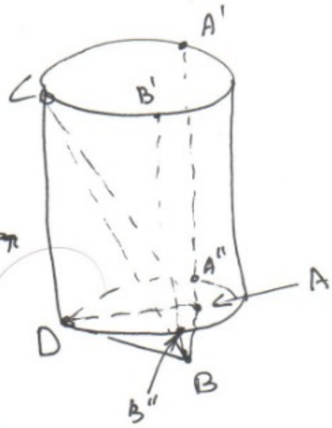
$R_{min} = 2 \Rightarrow$ раз $A'B'$ – диаметр, то

$\angle C = 90^\circ \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

мы знаем, что $DB''^2 = DB^2 - d^2 \Rightarrow d^2 = 49 - 8 = 41 \Rightarrow d = \sqrt{41}$

$CB' = DB'' \Rightarrow DB''^2 = CB^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 8 = 17 \Rightarrow c = \sqrt{17}$

Тогда $CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$



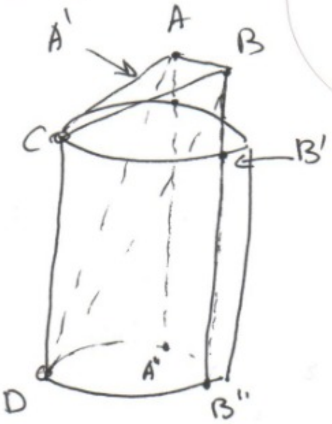
II сл) Пусть AB ниже α', $BB'' = c$, $BB' = d \Rightarrow$
$CD = d - c$

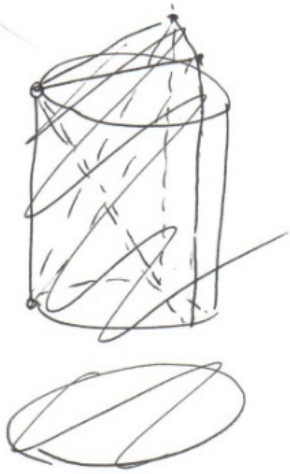
Тогда радиус тот же ($R = 2$) $\Rightarrow$

$DB'' = 2\sqrt{2} \Rightarrow c^2 = DB^2 - DB''^2 = \cancel{25}\ 49 - 8 = \cancel{\sqrt{17}}\ \sqrt{41}$

$CB' = 2\sqrt{2} \Rightarrow d^2 = CB^2 - CB'^2 = \cancel{49 - 8 = \sqrt{41}}\ 25 - 8 = \sqrt{17}$

$CD = -\sqrt{41} + \sqrt{17}$, но $CD > 0$ – прот-ие





III сл) Пусть AB выше α,
$BB' = c$, $BB'' = d$
$CD = d - c$

Радиус $R = 2 \Rightarrow$

$DB'' = 2\sqrt{2} \Rightarrow d^2 = DB^2 - DB''^2 = 49 - 8 = \sqrt{41}$

$CB' = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = CB^2 - CB'^2 = 25 - 8 = 17$

$CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

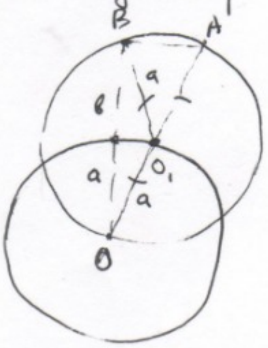
Ответ: $(\sqrt{41} + \sqrt{17})$; $(\sqrt{41} - \sqrt{17})$

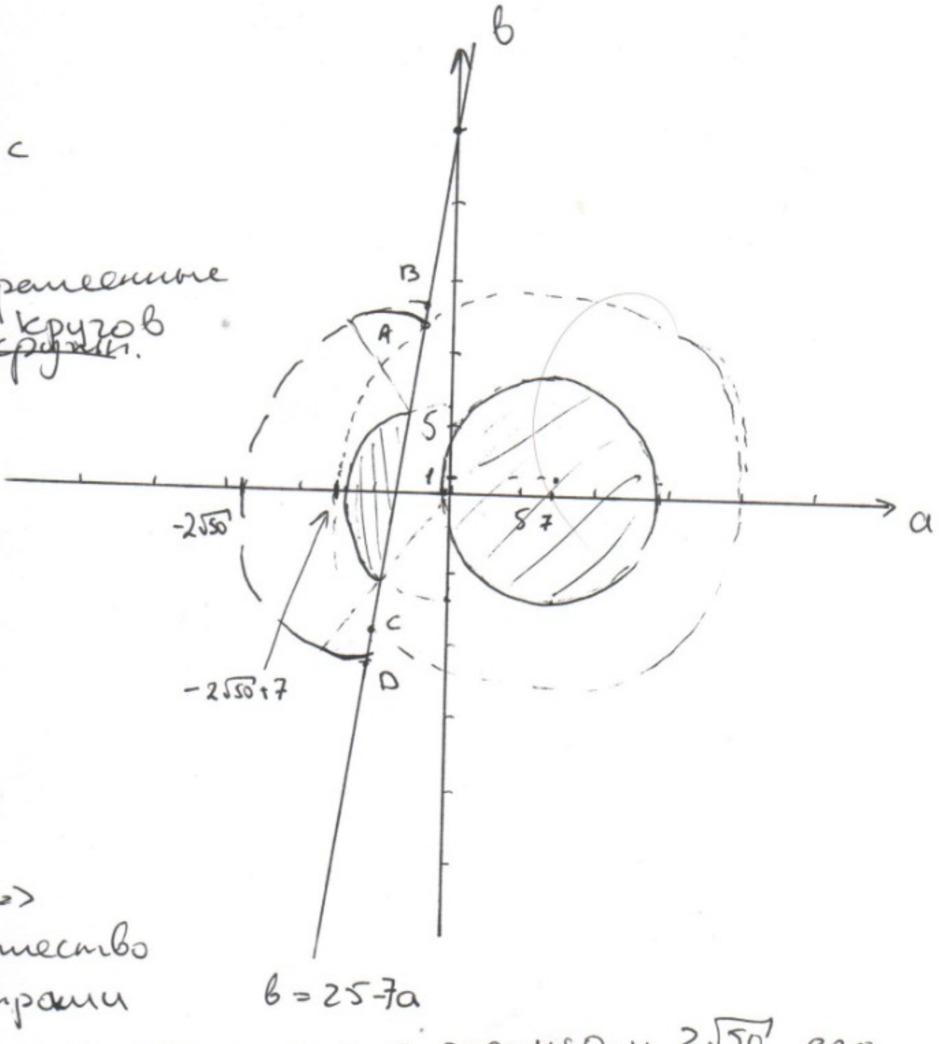
Чистовик

Задача 3

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 50\\ 14a+2b\ge 50\end{cases}\\ \begin{cases}a+b^2\le 14a+2b\\ 14a+2b<50\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}a^2+b^2\le 50\\ b\ge 25-7a\end{cases} \quad \begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50\\ b<25-7a\end{cases}$$

$(x-a)^2+(x-b)^2\le 50$ – ~~окружность~~ круг $r=\sqrt{50}$ с центром $(a;b)$ $\Rightarrow$ на графике все закрашенные точки – центры ~~окружн.~~ кругов.





$OA=2a$

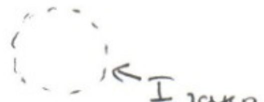
$OB=b+a$

по нер-ву $\triangle BO_1O$

$a+a>a+b \Rightarrow a>b \Rightarrow$

$OA>OB \Rightarrow$ множество ~~окружн-ей~~ кругов с центрами в кругу $\omega(O;\sqrt{50})$ и $R=\sqrt{50}$ – круг с радиусом $2\sqrt{50}$, его площадь $S=\pi r^2=\pi\cdot 200\approx 628$

~~$D(a_1;b_1)$~~ $\Rightarrow$



Ответ: 628

21102879 (U294648 M1305126)

$$S = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \cancel{\frac{a_1 + b \cdot \frac{1+14}{2} \cdot 14}{2}} \cdot \cancel{15} = 15a_1 + \frac{b \cdot 15}{2} \cdot 14 =$$

$$= 15a_1 + 95b$$

$$(a_1 + 6b)(a_1 + 15b) > 15a_1 + 105b - 24$$

$$(a_1 + 10b)(a_1 + 11b) < 15a_1 + 105b + 4$$

$$a_1^2 + 21ba_1 + 90b^2 > 15a_1 + 105b - 24$$

$$a_1^2 + 21ba_1 + 110b^2 < 15a_1 + 105b + 4$$

$$90b^2 + 4 > 110b^2 - 24$$

$$20b^2 < 28$$

$$\begin{cases} b^2 < \frac{7}{5} \\ b > 0 \end{cases}$$

$$0 < b < \sqrt{\frac{7}{5}}, \ b \in N \Rightarrow b = 1$$

$$a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24$$

$$\overset{-15}{90} - 105 + 24 = 9$$

21102879 (U294648 M1305126)

$(l+r)^2 = a^2-4$

$r^2 = l^2+4$

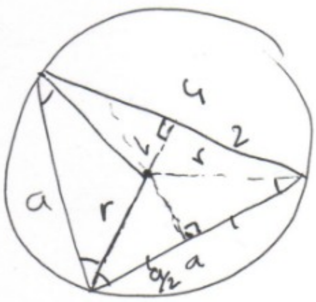
$(r-l)(r+l)=4$

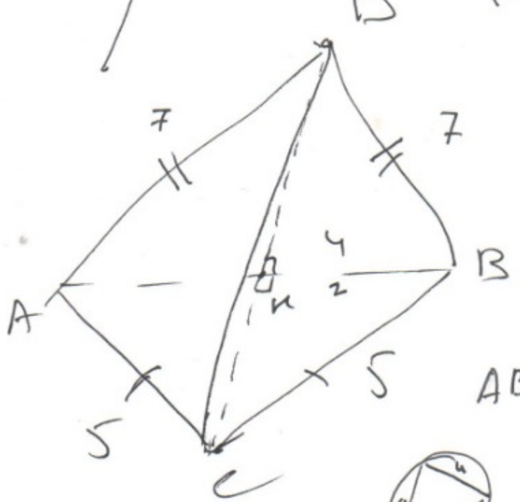
$2R = \frac{4}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$R = \frac{2}{\sin\alpha}$

$R_{min} = 2$ при $\sin\alpha = 1$

$\alpha = 90^\circ$

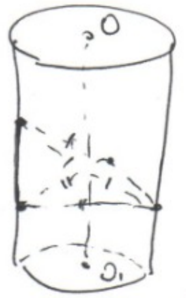


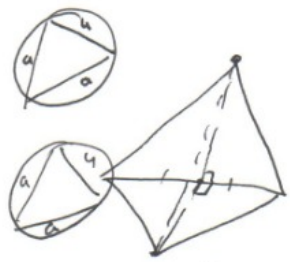


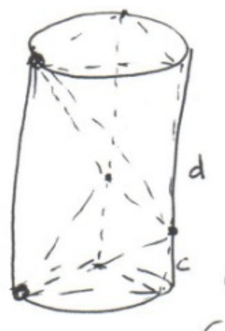
AB I

$CD \parallel OO_1$, $C, D \in$ бок грани $\Rightarrow$

CD $\perp$ основаниям цилиндра







$$\begin{cases} a^2+d^2 = 49 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \\ a^2+b^2 = 25 \\ b+d = CD \end{cases}$$

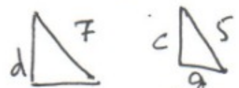
$d^2 = \sqrt{41}$

$b^2 = \sqrt{17}$

$\sqrt{17}+\sqrt{41}$

$d^2-b^2=24$

$(d-b)CD = 24$



$a^2+b^2 = 14a+28$

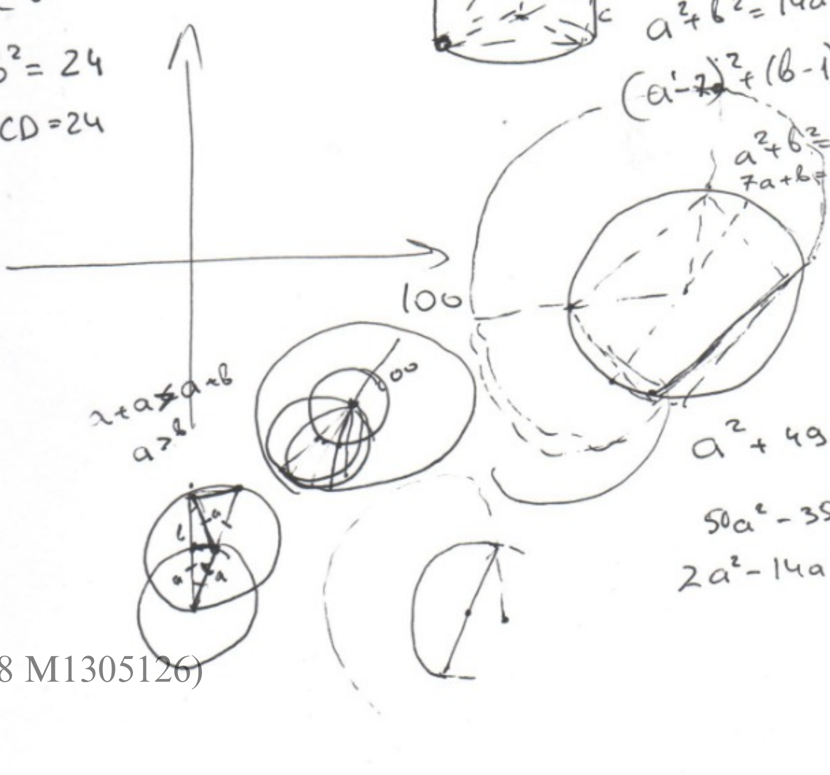
$(a-7)^2+(b-1)^2 = 50$

$a^2+b^2=50$

$7a+b=25 \Rightarrow b = 25-7a$

$a = \frac{25}{7} = 3\frac{1}{7}$

$\sqrt{50} \approx 7$



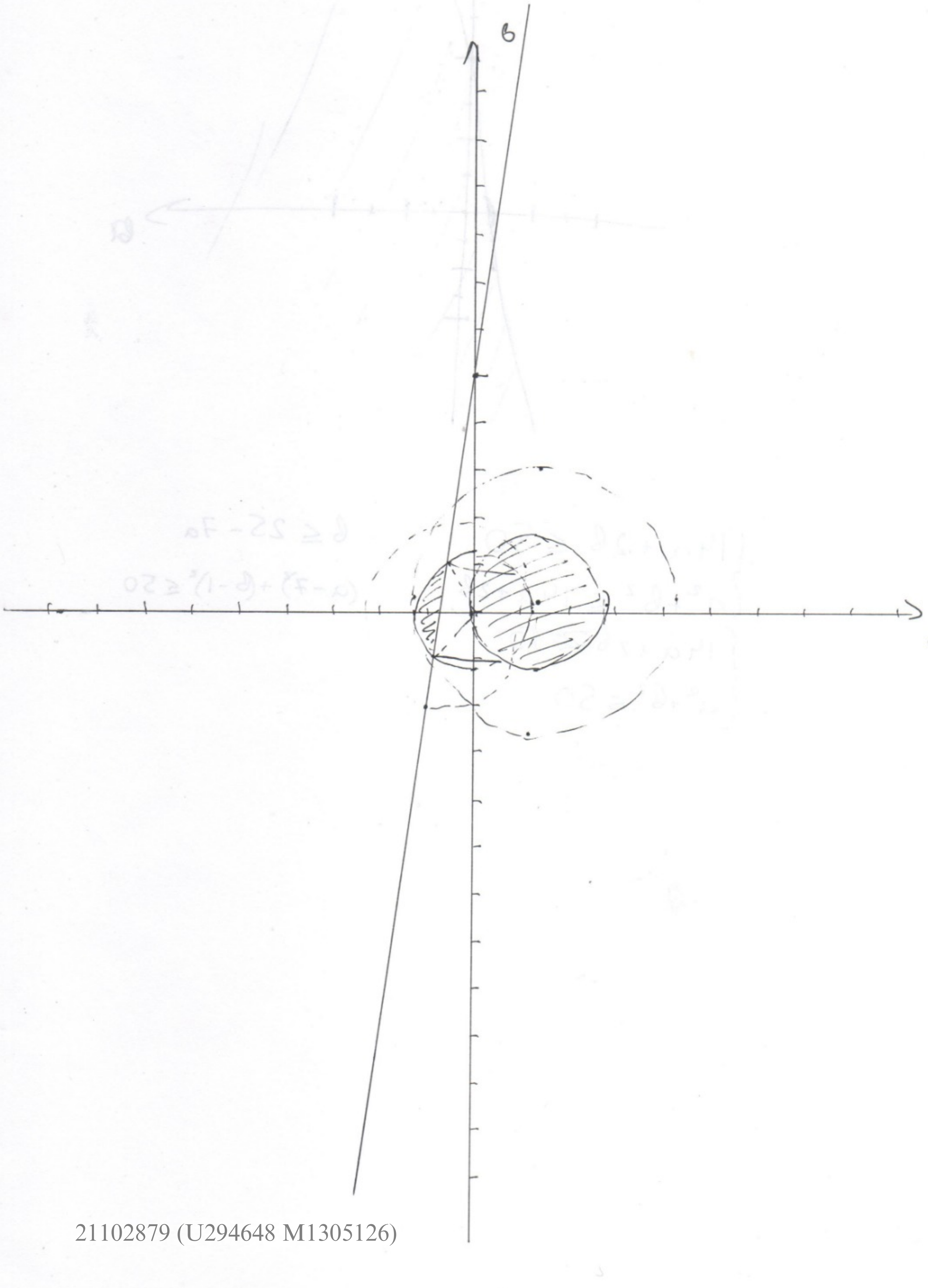
$a+a \geq a+b$

$a>b$

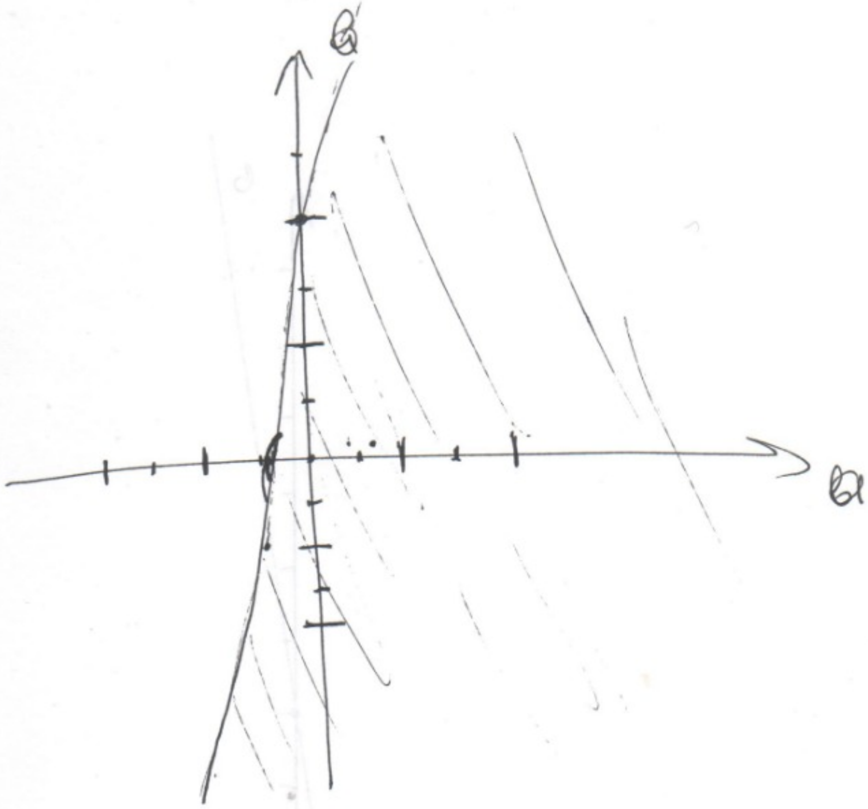
$a^2+49a^2-350a+625=50$

$50a^2-350a+575=0$

$2a^2-14a+23=0$



21102879 (U294648 M1305126)



$$\begin{cases} 14a + 2b \leq 50 \\ a^2 + b^2 \leq 14a + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a + 2b \cancel{\geq} 50 \\ a^2 + b^2 \leq 50 \end{cases}$$

$b \leq 25 - 7a$

$(a-7)^2 + (b-1)^2 \leq 50$

21102879 (U294648 M1305126)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102879**

ID профиля: **294648**

Вариант 22

Чистовик

Задача 4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases} \Rightarrow$$ ~~$a = k\cdot 2^{k_1}$~~ одно из чисел содержит ровно 2^1; одно – 7^1 (ровно)

Наибольшая степень двойки в числе 17, семерки 18

$a = 2^{k_a}\cdot 7^{k_a}$ одна из $k=1$, другая – 17, III $\in[1;17]$

$b = 2^{k_b}\cdot 7^{l_b}$ одна из $l=1$, другая – 18, III $\in[1;18]$

$c = 2^{k_c}\cdot 7^{l_c}$

Кол-во расстановок $k = 3\cdot 2\cdot 17-2 = 102-2=100$

Кол-во расстановок $l = 3\cdot 2\cdot 18-2 = 106$

Всего способов расставить коэф-ты $106\cdot 100 = 10600$

(до этого вычитали 2, т.к. III коэф. может быть равен: $k\in\{1;17\}$, $l\in\{1;18\}$ и тогда для каждого коэф-та по одному из случаев повторяется)

Ответ: 10600

Чистовик. Задача 5

Пусть $\frac{x}{2}+1=a$; $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$; $\frac{3x}{2}-6=c$

Тогда у нас есть числа:

$$\frac{1}{2}\log_a b;\ 4\log_b c;\ 2\log_c a$$

I сл. $\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c$, $a, b, c \neq 1$

$$\frac{1}{\log_b a} = 8\log_b c \Rightarrow 1 = 8\log_b a \log_b c$$

$$4\log_b c = 2\log_c a + 1 \Rightarrow 2\log_c a \log_c b + \log_c b = 4$$

$$2\log_c b \log_c a\sqrt{c} = 4 \Rightarrow \log_c b \log_c a\sqrt{c} = 2$$

$$b = 7a - \frac{45}{4};\quad c = 3a - 9$$

ОДЗ: $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \\ a\neq 1 \\ b\neq 1 \\ c\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ a>\frac{45}{28} \\ a>3 \\ a\neq 1 \\ a\neq\frac{49}{28} \\ a\neq\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow a>3,\ a\neq\frac{10}{3}$

$a \vee 7a-\frac{45}{4}$

$\frac{45}{4} \vee 6a$

$\frac{15}{8} \vee a$

$a>3 \Rightarrow \frac{15}{8}<a \Rightarrow$

$a<b$

$\Downarrow$

$\frac{1}{2}\log_a b > \frac{1}{2}$

$7a-\frac{45}{4} \vee 3a-9$

$4a \vee \frac{45-36}{4}$

$a \vee \frac{9}{16}$, $a>3$

$\Downarrow$

$a>\frac{9}{16} \Rightarrow b>c$

$\Downarrow$

$4\log_b c < 4$

$a \vee 3a-9$

$9 \vee 2a$

$4{,}5 \vee a$, $a>3$

при $a\in(3;4{,}5)$

$a<c$

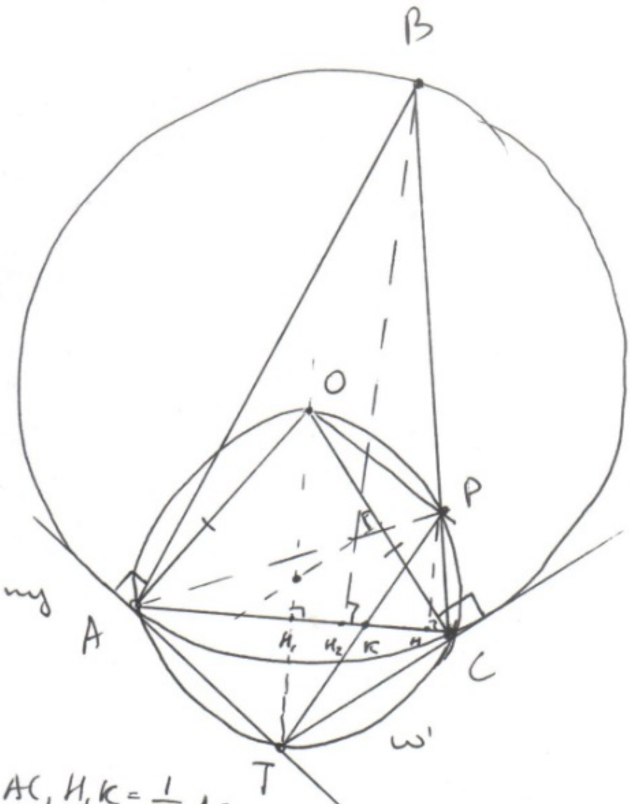
при $a\in(4{,}5;+\infty)$

$a>c$

2 из 3

Чистовик

Задача 6.



OA и OC – радиусы ω =>

$AT \perp AO$, $\cancel{A}TC \perp OC$

$\angle OA\cancel{T} = 90°$
$\angle OCT = 90°$
$O, A, C \in \omega'$
} => $OACT$ – вписан. четырехуг => $T \in \omega'$

$\triangle APK$ и $\triangle PKC$ имеют общ высоту

PH => $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$

OH_1 – серпер => $AH = \frac{1}{2}CA$, $AK = \frac{7}{12}AC$, $H_1K = \frac{1}{12}AC$, ~~KHC~~ $KC = \frac{5}{12}AC$

$\triangle ABC = \frac{S_{APC}}{PH} \cdot PH_2 = 12\ \frac{PH_2}{PH}$

OT – диаметр ω' (т.к. $\angle OCT = 90°$)

$\angle ACP = \angle ATP$

т.к. $AT = TC$ (из равенства $\triangle AOT$ и $\triangle OCT$), то $\angle APT = \angle TPC$ } =>

$\triangle APT \sim \triangle KPC$

21102879 (U294648 M1305127)

$\frac{1}{2} \cancel{\log}$

$7a - \frac{45}{4} > 0$

$a > \frac{45}{28}$

$3a - 9 > 0 \Rightarrow a > 3$

$a > 0$

$a > 3$

$\frac{\log_b b}{\log_b a} = 8 \log_b c$ $\quad \log_a$

$\log_b a \log_b c = \frac{1}{8}$

$2 \log_c a + 1 = 4 \log_b c$

$\frac{x}{2} + 1 \quad \frac{7x}{2} - \frac{17}{4} \quad \left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot 7 - \frac{45}{4}$

$\frac{7x}{2} + 7 - \frac{7x}{2} + \frac{17}{4} = \frac{45}{4}$

$\frac{3x}{2} + 3 - \frac{3x}{2} + 6 = 9 \quad \left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot 3 - 9$

$a;\ 7a - \frac{45}{4};\ 3a - 9$

$\frac{1}{2} \log_a b = 2 \log_c a + 1$

$\log_a b = 4 \log_c a\sqrt{c}$

2

$\frac{1}{2} \log_a\left(7a - \frac{45}{4}\right) > \frac{1}{2}$

$4 \log_{(7a-\frac{45}{4})}(3a-9) < 4$

$7a - \frac{45}{4} > \frac{1}{4}$

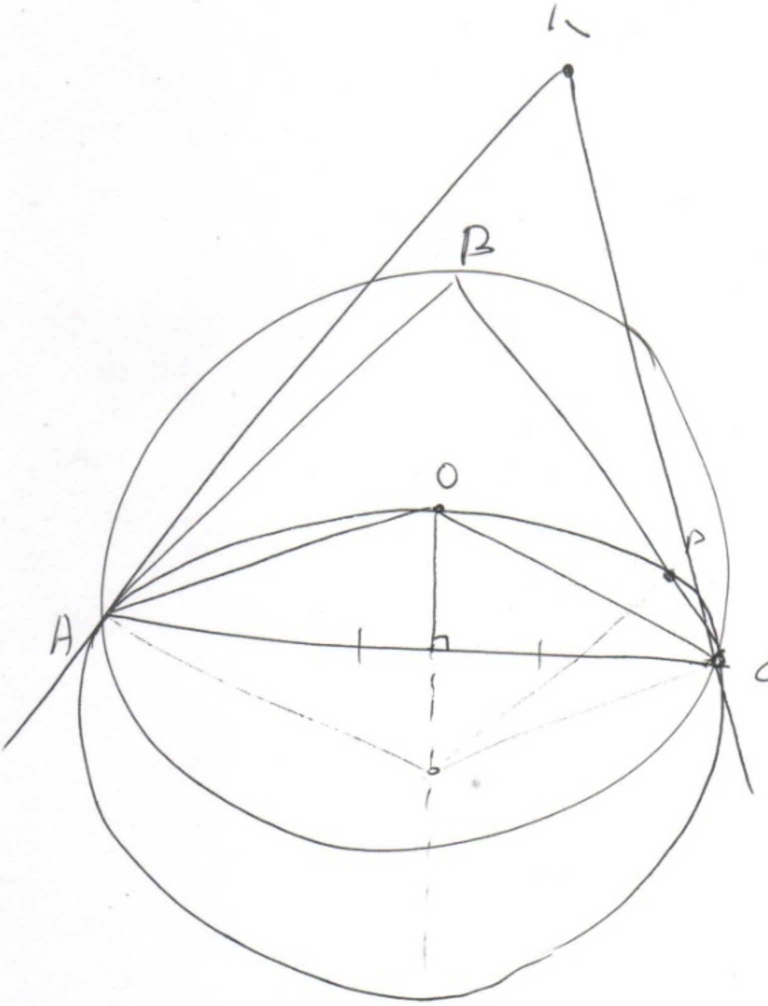
$\frac{1}{2} \log_a\left(7a - \frac{45}{4}\right);\ 4 \log_{(7a-\frac{45}{4})}(3a - 9);\ 2 \log_{(3a-9)} a$

$3a - 9 < a$

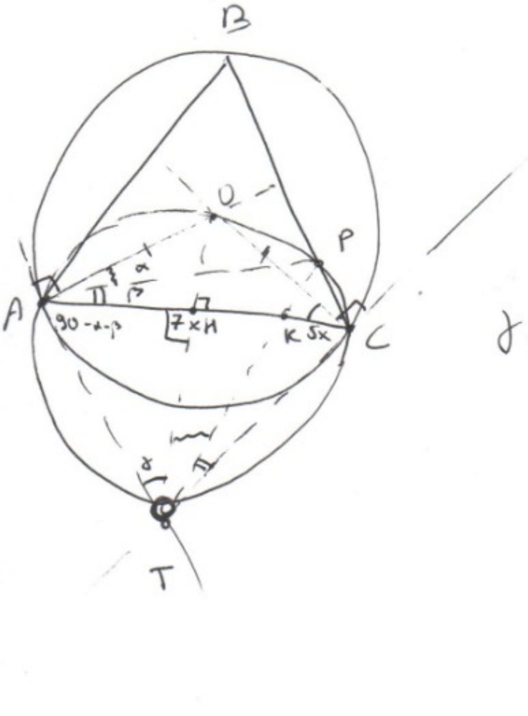
$2a < 9$

$a < \frac{9}{2}$

$\frac{9}{2} > 2$

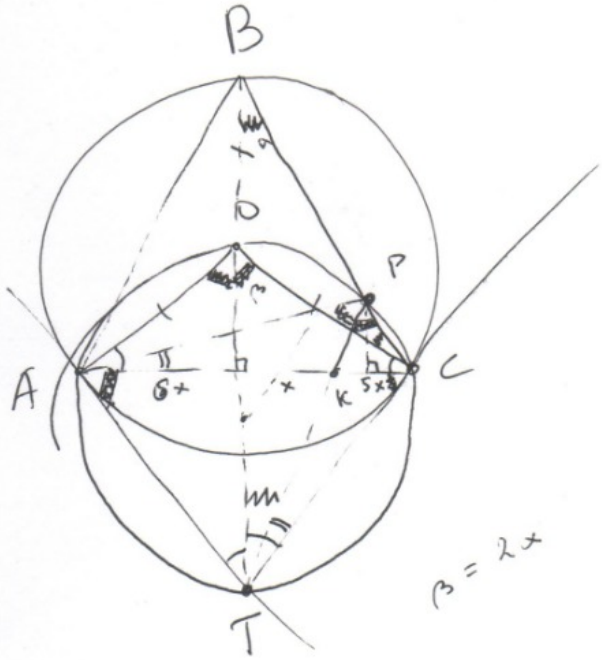


$AH = 6x$
$HK = x$
$KC = 5x$

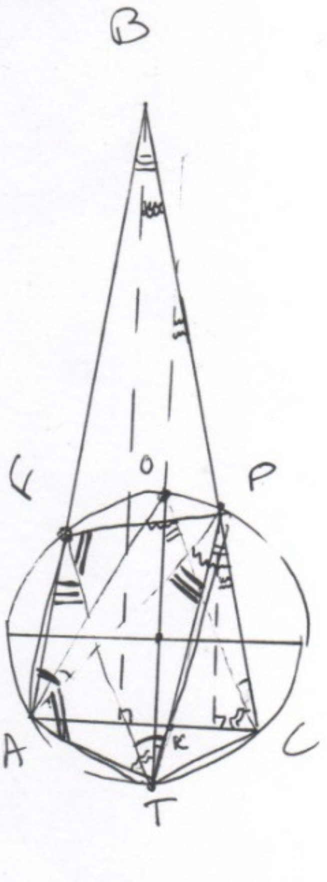


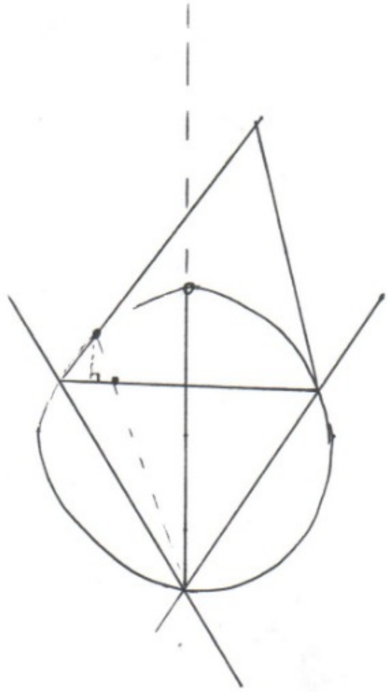
$\gamma = \alpha + \beta$

21102879 (U294648 M1305127)



$\beta = 2x$





$$\frac{PC}{AP} = \frac{5}{7}$$

$6 \cdot 17 = 102$
$6 \cdot 18 = 108$

I $\quad 2 \cdot 7^x \qquad 3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 15 \qquad n \in (1; 17)$

$2^{17} \cdot 7^y$

$2^n \cdot 7^z$

II $\quad 2 \cdot 7^x \qquad \cancel{3 \cdot 2 \cdot 16}$ ~~считаем дважды~~ $\cancel{2 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16$

$2^{17} \cdot 7^y$

$2 \cdot 7^z$

III $\quad 2 \quad 7^x \qquad \cancel{3 \cdot 2 \cdot 16} \quad 2 \cdot 2 \cdot 16$

$2^{17} \quad 7^y$

$2^{12} \quad 7^z$

IV $\quad 2 \cdot 7^x \qquad x, y, z \in \{1; 18\}$

$2^{17} \cdot 7^y \qquad 3 \cdot 15 \cdot 2$

$2^n \cdot 7^z$

V $\quad 2 \cdot 7^x \qquad x, y, z \in \{1; 18\}$

$2^{17} \cdot 7^y \qquad \cancel{3 \cdot 2} \quad 2 \cdot 2 = 4$

$2 \cdot 7^z$

$2 \cdot 7 \qquad 2 \quad 7^{18} \qquad 2 \cdot 7^{18} \qquad 2 \cdot 7$

$2^{17} \cdot 7^{18} \qquad 2^{17} \quad 7 \qquad 2^{17} \cdot 7$

$2 \cdot 7^{18} \qquad 2 \cdot 7^{18} \qquad 2 \cdot 7$

VI $\quad 2 \cdot 7^x \qquad x, y, z \in \{1; 18\}$

$2^{17} \cdot 7^y$

$2^{17} \cdot 7^z \qquad 2 \cdot 2 = 4$

$3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 15 + 8 \cdot 16 + 6 \cdot 15 + 8$