Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102709**

ID профиля: **265452**

Вариант 22

Задача 1 Чистовик

a_1 – первый член
d – разность прогрессии

$a_1, d \in \mathbb{Z}$
$d > 0.$

$a_7 = 6 \cdot d + a_1$
$a_{16} = 15d + a_1$
$a_{11} = 10d + a_1$
$a_{12} = 11d + a_1$

$S = a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + 14d) =$
$= 15a_1 + (1 + 2 + \dots + 14)d = 15a_1 + 15 \cdot 7d =$
$= 15a_1 + 105d.$

По условию:

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 15a_1 + 105d - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + (21d - 15)a_1 + (90d^2 - 105d + 24) > 0. \quad (1) \\ a_1^2 + (21d - 15)a_1 + (110d^2 - 105d - 4) < 0. \quad (2) \end{cases}$$

$\cancel{(1):}$

$\cancel{D = (21d - 15)^2 - 4(90d^2 - 105d + 24) =}$

$\cancel{= 21^2 d^2 - 2 \cdot 15 \cdot 21d + 15^2 - 360d^2 + 420d - 96 =}$

$\cancel{= 441d^2 - 360d^2 + 420d - 2 \cdot 15 \cdot 21d + 15^2 - 96 =}$

$\cancel{= 81d^2 - 210d + 129 =}$

Из системы следует ~~(2)-(1)~~

$$+\begin{cases} -(a_1^2 + (21d - 15)a_1 + (90d^2 - 105d + 24)) < 0. \\ a_1^2 + (21d - 15)a_1 + (110d^2 - 105d - 4) < 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow (110d^2 - 105d - 4) - (90d^2 - 105d + 24) < 0$$

$20d^2 - 28 < 0 \Leftarrow 2d^2 < 2{,}8 \Rightarrow d^2 < \frac{2{,}8}{2} \Rightarrow d = 1$ т.к. $d > 0.$

1.

Подставим $d=1$ в систему н-в

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ (a_1+3)^2<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ -2\sqrt{2}<a_1+3<2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ -2\sqrt{2}-3<a_1<2\sqrt{2}-3 \end{cases}$$ т.к. $a \in \mathbb{Z}$, то

$\Rightarrow \quad a \in \{-5;-4;-2;-1;\}$, проверим каждое из a и $d=1$

Ответ: $\{-5;-4;-2;-1;\}$.

Чистовик

Чистовик

Задача 7

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;\,50) & (2) \end{cases}$$

Неравенство (1) задаёт круг в плоскости Oxy с центром в точке $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{50}$.

Рассмотрим (2) неравенство и (1)

1) $\min((14a+2b);50)=50 \Leftrightarrow 50 \le 14a+2b$

тогда система принимает вид.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50. \\ a^2+b^2 \le 50 \\ 50 \le 14a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50. \\ 25-7a \le b \end{cases}$$

2) $\min(14a+2b,50)=14a+2b$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ (b-1)^2+(a-7)^2 \le 50 \\ 25-7a \ge b \end{cases}$$

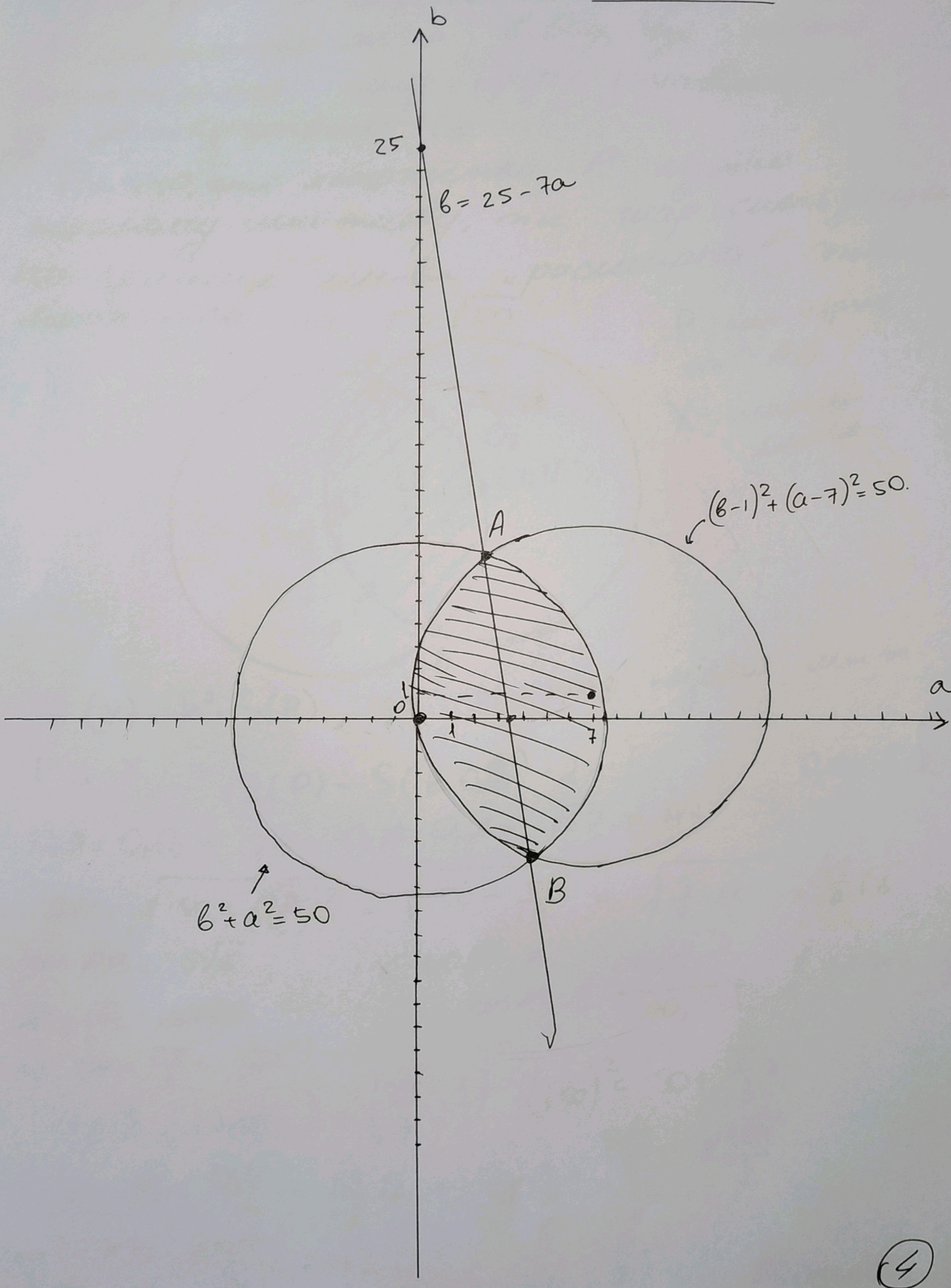
Рассмотрим на плоскости Oab две систем.

$$\begin{cases} (b-1)^2+(a-7)^2 \le 50 \\ 25-7a \ge b \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \\ 25-7a \le b. \end{cases}$$

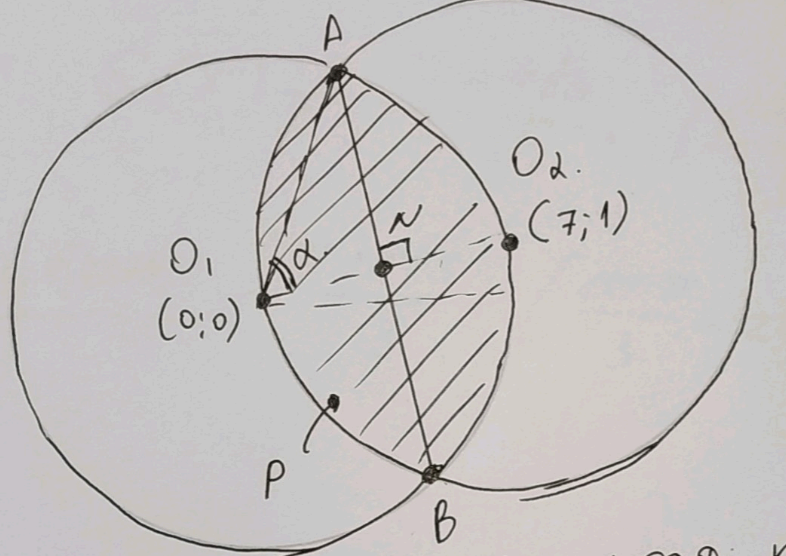
прямая $25-7a=b$, окружность $(b-1)^2+(a-7)^2=5$ и окружность $a^2+b^2=50$ пересекаются в двух точках. A и B. , т.к. при подстановке $b=25-7a$ получаем одинаковые уравнения $\Rightarrow$ Закрашенная P область есть мн-во точек $(a;b)$, удовл. совокупности 2х систем, т.е. Мн-во центров кругов, задаваемых (1) неравенством.

3

Чистовик



Перейдём в плоскость Oxy.
P- множество точек в Oxy, где может располагаться центр круга, задаваемого ~~н~~ неравенством (1)
Понятно, что множество P подобно искомому множеству, т.к. шар, сползающий по границе мн-ва „расширяет" это множество на $r=\sqrt{50}$.



P симметрично отн. AB
X- искомое мн-во.

$S(X)=k^2\cdot S(P)$, где k - коэф. подобия мн-ва P и X

$S(P)=S(BO_2A)\cdot 2.$ $\quad O_1N=\frac{5}{2}\sqrt{2}.$

$O_1A=O_1O_2=O_1B=O_2A=O_2B=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$

$AN=\sqrt{50-\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2}=\sqrt{50-\frac{50}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}\cdot 50}=\frac{5}{2}\sqrt{6}.$

$\Rightarrow AB=5\sqrt{6}.$ $\quad \angle NO_1A=\alpha.$ $\quad \cos\alpha=\frac{O_1N}{AO_1}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$

~~По т. cos~~

$\Rightarrow 2\alpha=\frac{2\pi}{3}=120^\circ$

$\Rightarrow S(\text{сектора})=\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot(\sqrt{50})^2=50\cdot\frac{\pi}{3}$

$S(BO_2A)=\frac{50\pi}{3}-\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{6}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{50\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{2}.$

$\Rightarrow S(P)=\frac{100\pi}{3}-25\sqrt{3}$

5

Чистовик

Чистовик

Найдём k.

$$k = \frac{AN + r}{AN} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{6} + \sqrt{50}}{\frac{5}{2}\sqrt{6}} = 1 + \frac{\cancel{5\sqrt{2}}}{\frac{\cancel{5}}{2}\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$k^2 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4+3+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{7+4\sqrt{3}}{3}$$

тогда $S(x) = \frac{7+4\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right) =$

Ответ: $\frac{7+4\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right)$.

$$(110d^2 - \cancel{105d} - 4) - (90d^2 \cancel{- 105d} + 24) < 0.$$

$$20d^2 - 30 < 0.$$

$$2d^2 < 3$$

$$d^2 < \frac{3}{2}$$

$$d < \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow d = 1$$

$90 - 105 + 24$

$$\begin{array}{r} 90 \\ +24 \\ \hline 114 \\ -105 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ -105 \\ \hline 5 \\ -4 \\ \hline 1 \end{array}$$

$(a_1 + 3)^2 > 0.$

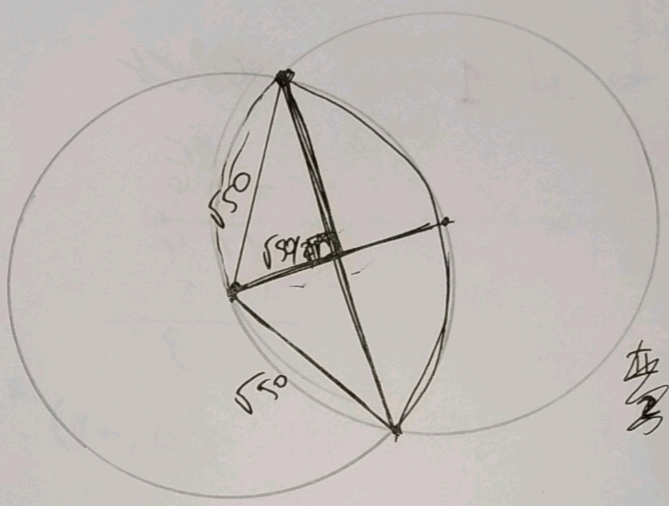
$D = 36 - 4 \cdot 9$

$2{,}8 \quad -3$

$2 \cdot 1{,}4 = 2{,}8.$

$-5{,}8 < a < -0{,}2$

Чернови



$50 \cdot \pi$ $\qquad \dfrac{25 \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2} \cdot 2}$

$5\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

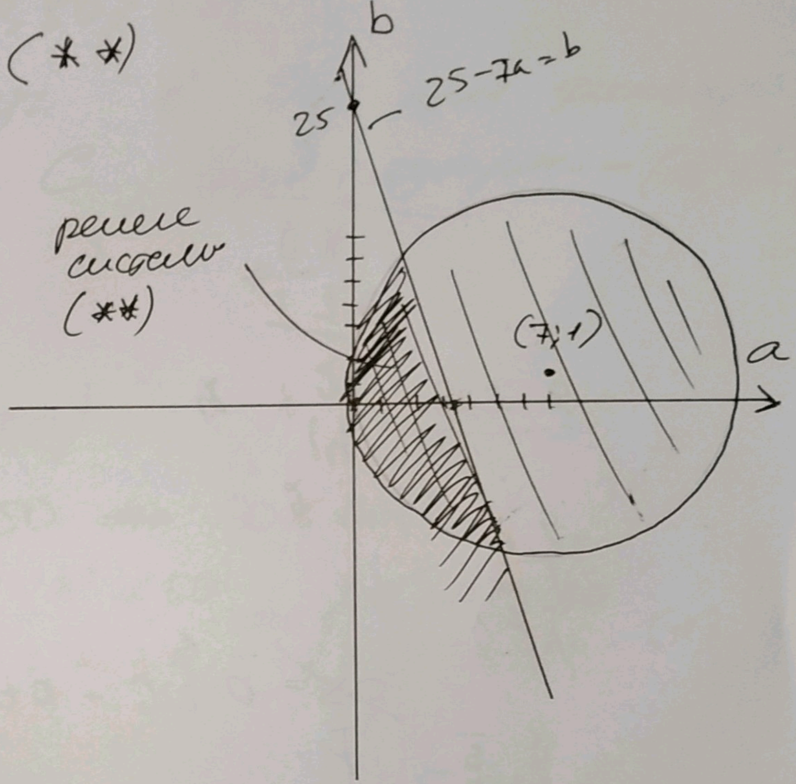
$\dfrac{50\pi}{3} - \left(\dfrac{5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \dfrac{1}{2}$

Черновик.

2) $\min((14a+2b), 50) = 14a+2b \Leftarrow 50 \geqslant 14a+2b$

$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant 14a+2b \\ 25 \geqslant 7a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b^2-2b+1)+(a^2-14a+49)-1-49 \leqslant 0 \\ 25 \geqslant 7a+b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2+(a-7)^2 \leqslant 50 \\ 25-7a \geqslant b \end{cases}$ (**)



Черновик

$a^2 + (25-7a)^2 = 50$

$a^2 + 25^2 + 49a^2 - 7a \cdot 25 \cdot 2 = 50.$

$50a^2 - 50a \cdot 7 + 25^2 = 50.$

$50a^2 - 350a + 575 = 0$

$10a^2 - 70a + 115 = 0.$

$\boxed{2a^2 - 14a + 23 = 0.}$

$(25-7a-1)^2 + (a-7)^2 \le 50$

$(24-7a)^2 + (a-7)^2 \le 50$

$24^2 + 49a^2 + a^2 + \cancel{49} - 2 \cdot 24 \cdot 7a - 2 \cdot 7 \cdot a = \cancel{50}.$ 1

$50a^2 - 350a + 576.$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 75 \\ +50 \\ \hline 575 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 625 \\ -50 \\ \hline 575 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ +50 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$115 : 5 = 23 \qquad \begin{array}{r} 115 \\ -10 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$70 : 5 = 14 \qquad \begin{array}{r} 70 \\ -5 \\ \hline 20 \end{array}$$

500

$$575 : 5 = 115 \qquad \begin{array}{r} 575 \\ -5 \\ \hline 7 \\ -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ +48 \\ \hline 576 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times 25 \\ \hline 70 \\ +28 \\ \hline 350 \end{array}$$

Чернове

Задача 7

$(x, y): \quad \exists a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 50 & (1) \\ a^2+b^2 \leq \min(14a+2b, 50) & (2) \end{cases}$$

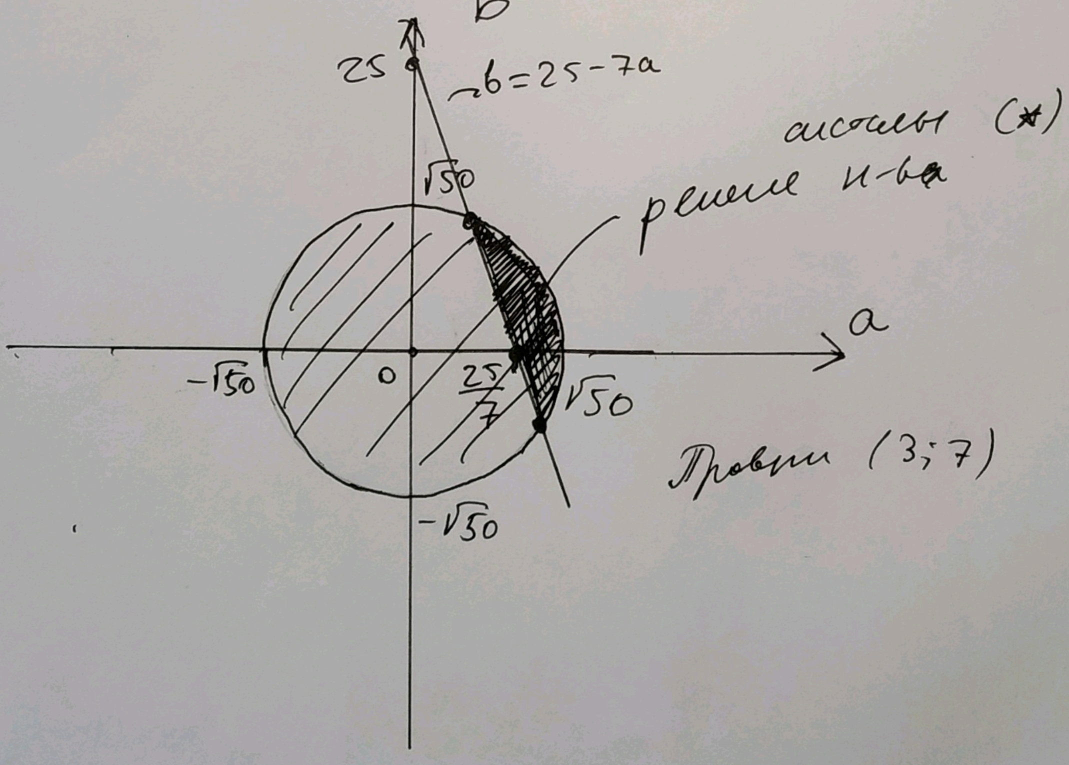
(1) н-во задаёт круг в Oxy при фиксированных a и b. Круг C, ~~центр~~ которого — (a;в) и радиус $\sqrt{50}$

Рассмотрим (2) н-во

$a^2+b^2 \leq \min(14a+2b, 50)$

1) $\min(14a+2b, 50) = 50 \Leftarrow 50 \leq 14a+2b$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leq 50 \\ 50 \leq 14a+2b \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} a^2+b^2 \leq 50 \\ 25 \leq 7a+b \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} a^2+b^2 \leq 50 \\ 25-7a \leq b \end{cases} (*)$$



Черновик

$$\cancel{a_1^2 + 21d\cdot a_1 + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24.}$$

$$\cancel{a_1^2 + (21d - 15)a_1 - 15d + 24 > 0.}$$

$$\cancel{a_1^2 + 21d + 110d}$$

$$a_1^2 + 21d\cdot a_1 + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24.$$

$$a_1^2 + (21d - 15)a_1 + (90d^2 - 105d + 24) > 0.$$

$$a_1^2 + (21d - 15)a_1 + (110d^2 - 105d - 4) < 0$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 21 \\ \hline 21 \\ +\ 42 \\ \hline 441 \\ -\ 360 \\ \hline 81 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ \times\ 3 \\ \hline 630 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times\ 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \\ -\ 96 \\ \hline 129 \end{array}$$

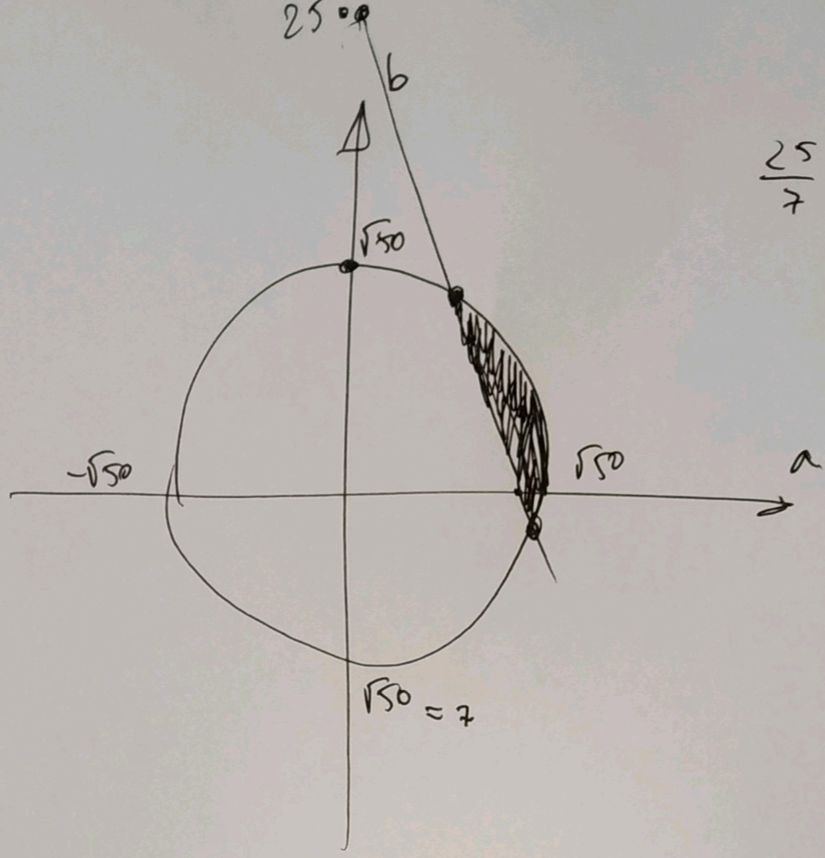
$$\begin{array}{r} 630 \\ -\ 420 \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 \\ -\ 96 \\ \hline 129 \end{array}$$

Черновик

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

$\frac{25}{7}$



Черновик

$2 \cdot 15 = 30$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 3 \\ \hline 630 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 630 \\ -\ 420 \\ \hline 210 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ -\ 96 \\ \hline 129 \end{array}$$

$129 : 3 = 43$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 \le 50.$

$a^2 + b^2 \le 50.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102709**

ID профиля: **265452**

Вариант 22

Чистовик

Задача 4

Известно, что НОД$(a;b;c)\cdot$НОК$(a;b;c) = abc$

$\Rightarrow abc = 2^{18}\cdot 7^{19}$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$

т.к. НОД$(a;b;c) = 14 \Rightarrow$

$a, b, c \vdots 14 \Rightarrow \alpha_{1,2}; \beta_{1,2}; \gamma_{1,2} \in \mathbb{N}$

тогда получаем, что

$$2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}\cdot 2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}\cdot 2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2} = 2^{18}\cdot 7^{19}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 18 \quad (1) \\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = 19 \quad (2) \end{cases}$$

Воспользуемся методом шаров и перегородок

В каждую переменную требуется „положить" по одной единице. (границы переменных – „перегородки", единицы – „шары")

тогда в (1): 15 шаров (единиц)
2 перегородки
тогда в

$\frac{(17!)}{2!\cdot 15!}$ – кол-во способов реш-ь (1) ур-ие в $\mathbb{N}$ числах

Для (2): 16 шаров (единиц)
2 перегородки (границ переменных) $\Rightarrow \frac{18!}{2!\cdot 16!}$ –

– кол-во способов реш-ь в $\mathbb{N}$ числах ур-е (2)

$\Rightarrow$ Общее число троек.

$$\frac{17!}{2!\cdot 15!}\cdot\frac{18!}{2!\cdot 16!} = \frac{16\cdot 17\cdot 17\cdot 18}{2!\cdot 2!} = \frac{17^2\cdot 9\cdot 8}{1} =$$

$=$ 20808

Ответ: 20'808.

1

Задача 5 Чистовик

ОДЗ:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 > 0 \\ \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 \neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}} > 0 \\ \sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}} \neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} > 0 \\ \left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{2}-6} \neq 1 \\ \sqrt{\frac{3x}{2}-6} > 0 \\ \frac{3x}{2}-6 > 0 \\ \frac{x}{2}+1 > 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -1 \\ x \neq -4 \\ x > \frac{17}{14} \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{17}{14} \\ x \neq \frac{3}{2} \\ x > \frac{17}{14} \\ x \neq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \neq \frac{14}{3} \\ x > 4 \\ x > 4 \\ x > -2 \end{cases} \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{x > 4} \boxed{;\ x \neq \frac{14}{3}}$$

$\langle \frac{x}{2}+1 = a \rangle$

$\langle \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} = b \rangle$

$\langle \frac{3x}{2}-6 = c \rangle$

Упростим логарифмы на ОДЗ:

1: $\log_{a^2}(b) = \frac{1}{2}\log_{(a)}(b)$

2: $\log_{b^{1/2}}(c^2) = 4 \cdot \log_b(c)$

3: $\log_{c^{1/2}}(a) = 2\log_c(a)$

Чистовик

На ОДЗ: $a > \frac{4}{2} + 1 = 3 \Rightarrow a > 3$

$b > \frac{7 \cdot 4}{2} - \frac{17}{4} = 9{,}75$

$c > 0,\ c \neq 1$

Причём $b > a \Rightarrow \log_{a^2}(b) = \frac{1}{2}\log_a b > \frac{1}{2}\log_a a = \frac{1}{2}$

Пусть какие-то 2 равны и равны y.

тогда произведение 3х чисел.

$y \cdot y(y-1) = y^3 - y^2$

с другой стороны

$\frac{1}{2}\log_a(b) \cdot 4\log_b(c) \cdot 2\log_c(a) = 4 \cdot \log_a(b) \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{1}{\log_a c} =$

$= 4 \Rightarrow y^3 - y^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^3 - y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2 + y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = 2$

а другое число, отличное от 2х — 1

1) $\frac{1}{2}\log_a(b) = 1 \Leftrightarrow \log_a b = 2 \Leftrightarrow a^2 = b$

тогда другие $4\log_b c = 4 \cdot \log_{a^2} c = 2\log_a c$

$2\log_c(a) =$ ~~...~~

тогда числа:

$\frac{1}{2}\log_a(b) = 1 \Rightarrow 1;\ 2\log_a c \overset{2}{=};\ 2\log_c a \overset{2}{=}$

$\Rightarrow 2\log_a c = 2\log_c a \Leftrightarrow \log_a c = \log_c a \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a c = \cancel{\pm} 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = c \\ \cancel{a = \frac{1}{c}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 1 = \frac{3x}{2} - 6 \Leftrightarrow \boxed{x = 7}$ подходит

подставим $x = 7$

в первое число $\frac{1}{2} \cdot \log_{4,5}\left(\frac{49}{2} - \frac{17}{4}\right) = \log_{4,5}\left(25 - \frac{1}{2} - 4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2}\log_{9/2}\left(\frac{81}{4}\right) = 1.$

Числители.

2) $4 \cdot \log_b c = 1 \Leftrightarrow b^4 = c^4$

$\frac{1}{2}\log_a b = \frac{1}{2}\log_a c^4 = 2\log_a c = 2$

$\Leftrightarrow a = c \Leftrightarrow$

$x = 7$

$2\log_c(a) = 2\log_c a = 2.$

$\boxed{x=7}$ подходит

3) $2\log_c(a) = 1 \Leftarrow a^2 = c$

$\frac{1}{2}\log_a b \leftarrow$ первое число.

$4 \cdot \log_b c = 4 \cdot \log_b \cdot a^2 = 8\log_b a$ — второе число

$\frac{1}{2}\log_a b = 8\log_b(a) = 2.$

$\Downarrow$

$\log_a b = 4$

$a^2 = c \Leftarrow \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{3x}{2} - 6\right) \Leftarrow$

$\Leftarrow \frac{x^2}{4} + 1 + x = \frac{3x}{2} - 6 \quad \Big| \cdot 4.$

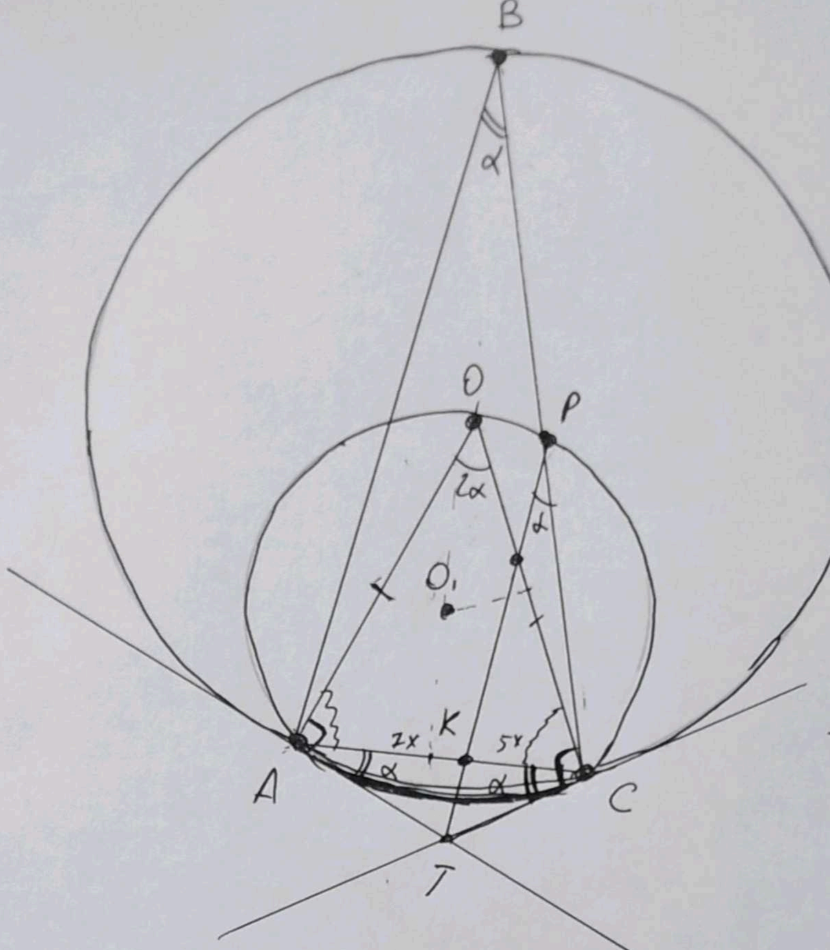
$x^2 + 4 + 4x = 6x - 24. \Leftarrow x^2 - 2x + 28 = 0.\ ;\ D<0 \rightarrow$

$\Leftarrow x - \varnothing$

<u>Ответ:</u> при $x = 7$.

Задача 7 Чистовик

а)



$S(\triangle APK)=7$ ⇒
$S(\triangle CPK)=5$
$KC : KA = 5:7$

$S(\triangle ABC)$ - ?

$OC = OA = R_\omega$ — радиус ω

⇒ $\triangle AOC$ - р/б.

по Th. о касательной и секущ.

$\angle ACT = \angle ABC$

$\angle BAT = \angle ABC$ ⇒

⇒ $TC = TA$

$\angle ABC = \alpha$ ⇒

⇒ $\angle CAT = \angle ACT = \alpha$.

$\angle OAT = \angle OCT = \frac{\pi}{2}$ как радиус в точку касан.

Докажем, что $PT \parallel BA$ ⇒ $\triangle(PKC) \sim \triangle ABC$

⇒ $k = \frac{7+5}{5} = \frac{12}{5}$ ⇒ $k^2 = \frac{12^2}{5^2}$

⇒ $S(\triangle ABC) = k^2 \cdot S(\triangle PKC) = \frac{12^2}{5^2} \cdot 5 = \frac{12^2}{5} = \frac{144}{5}$

$OATC$ - вписанный ⇒ $\angle ATC = \pi - 2\alpha$.

$\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$.

$\angle ATC = \pi - 2\alpha$ ⇒ $APCT$ - вписанный

⇒ $\angle TPC = \angle TAC = \alpha$. ⇒ $PT \parallel BA$

⇒ $\triangle ABC \sim \triangle AKC$ ⇒ $S(ABC) = k^2 \cdot S(\triangle PKC) =$

$= \left(\frac{7+5}{5}\right)^2 \cdot 5 = \frac{144}{5}$; $\boxed{S(\triangle ABC) = \frac{144}{5}}$

5

Задача 4

Известно, что $НОК(a;b;c)\cdot НОД(a;b;c)=$
$=abc \Rightarrow abc = 2^{18}\cdot 7^{19}$

т.к. $НОД(a;b;c)=2\cdot 7 \rightarrow a,b,c \geq 14$ и $a;b;c \vdots 14$

$НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 2^{18} \Rightarrow a;b;c \leq 2^{17}\cdot 7^{18}$

$a=2^{a_1}\cdot 7^{a_2}$ $\quad a_{1,2};c_{1,2};b_{1,2}\in\mathbb{N}$

$b=2^{b_1}\cdot 7^{b_2}$ $\Rightarrow \begin{cases} a_1+b_1+c_1=18 & (1) \\ a_2+b_2+c_2=19 & (2) \end{cases}$

$c=2^{c_1}\cdot 7^{c_2}$

Воспользуемся методом шаров и перегородок. $18=\underbrace{1+1+\dots+1}_{18 \text{ шаров}}$ переменные — перегородки

в каждую переменную положим по одной единице, останется (1): 15 един
(2): 19 единиц.

тогда способов расставить перегородки для (1) случая $\frac{17!}{2!\cdot 15!}$

для второго $\frac{21!}{2!\cdot 19!}$ $\Rightarrow$ всего случаев.

Цуповин

Черновик

$9 \cdot 8 = 72.$

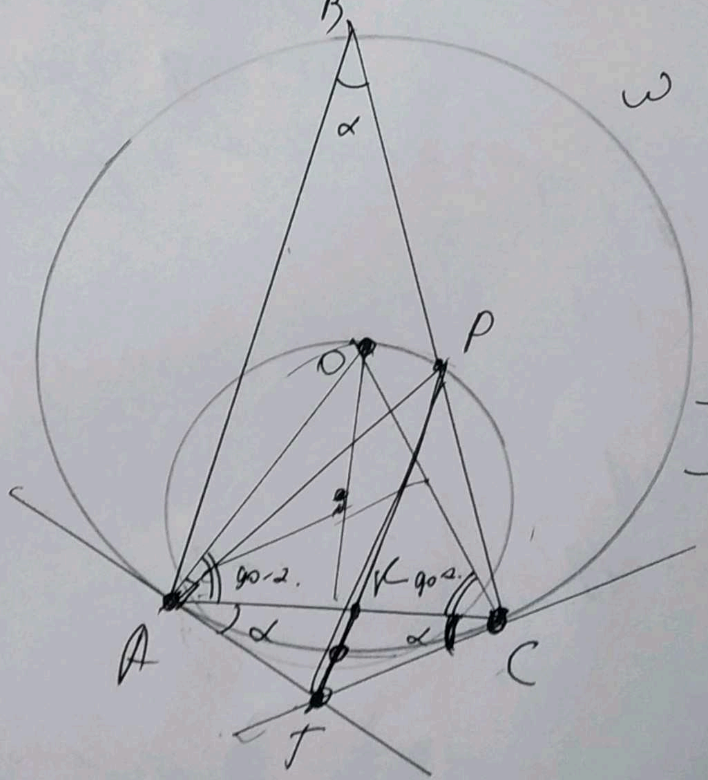
$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \\ \times 72 \\ \hline 1978 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \\ \cancel{72} \\ \hline 78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{289} \\ \times \cancel{72} \\ \hline \cancel{578} \\ +\cancel{23} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 72 \\ \hline 578 \\ +2023 \\ \hline 808 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 72 \\ \hline 578 \\ +2023 \\ \hline 20808 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 12^2 \\ 12 \\ \times 12 \\ \hline 24 \\ +12 \\ \hline 144 \end{array}$$

Рассмотрим a; в; c

$a \vee в \Leftarrow \frac{x}{2}+1 \vee \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \Leftarrow \frac{6x}{2} \vee \frac{17+4}{4} \Leftarrow$

$\Leftarrow 6x \vee \frac{21}{2} \Leftarrow x \vee \frac{21}{12} < 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a < в$; р-м. 2a и в.

$2a \vee в \Leftarrow x+2 \vee \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftarrow 2+\frac{17}{4} \vee \frac{7x}{2}-\frac{2x}{2} \Leftarrow \frac{8+17}{4} \vee \frac{5x}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \vee \frac{x}{2}$

$\Leftarrow \frac{10}{4} \vee x \Leftarrow \frac{10}{4} < x$ по ОДЗ: $\Rightarrow в > 2a$.

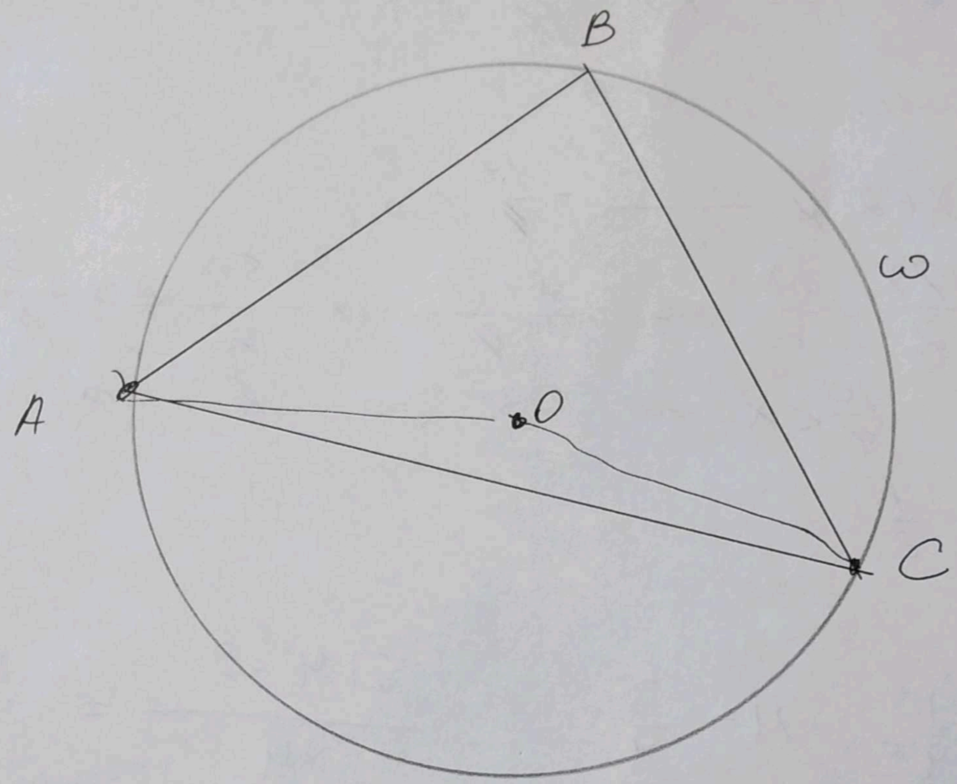
$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_a(в) > \frac{1}{2}$

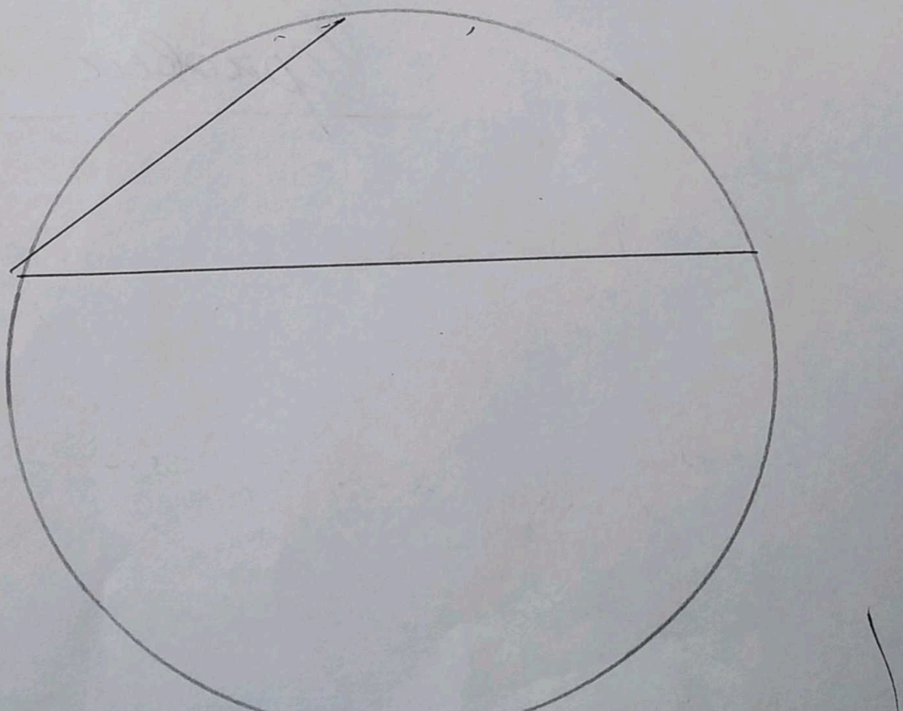
$21-\frac{2}{4}-\frac{1}{4} = 21-\frac{3}{4}$. $\quad \frac{21\cdot 4-3}{4} = \frac{84-3}{4}$.

$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

Черновик

Чернови.





Задача 4

$(a, b, c):$

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 14 \\ НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} {}^{4}\\ \times\, 17 \\ 17 \\ \hline +\, 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

т.к. НОК(a; b; c) содержит в качестве множителей только 2 и 7, то числа a; b; c представимы:

$a = 7^{\alpha} \cdot 2^{\beta}$

$b = 2^{\gamma} \cdot 7^{\delta}$

$c = 7^{\sigma} \cdot 2^{\varepsilon}$

т.к. НОД(a; b; c) = 14, то $a, b, c \geq 14$ и $a; b; c \,\vdots\, 14$

$\Rightarrow \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \varepsilon \in \mathbb{N}$

тогда $НОД(a; b; c) = 7^{\min(\alpha; \delta; \sigma)} \cdot 2^{\min(\beta; \gamma; \varepsilon)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \min(\alpha; \delta; \sigma) \\ 1 = \min(\beta; \gamma; \varepsilon) \end{cases}$$

$НОК(a; b; c) = 7^{\max(\alpha; \delta; \sigma)} \cdot 7^{\max(\beta; \gamma; \varepsilon)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18 = \max(\alpha; \delta; \sigma) \\ 17 = \max(\beta; \gamma; \varepsilon) \end{cases}$$

тогда $\begin{cases} 1 = \min(\alpha; \delta; \sigma) \\ \end{cases}$

$$\begin{array}{r} {}^{66}\\ \times\, 289 \\ 72 \\ \hline +\, 578 \\ 2023 \\ \hline 20808 \end{array}$$

Черновик

$\frac{x}{2} \cancel{1} \neq \cancel{1} \Rightarrow x \neq 0.$

$\left[\frac{1}{2}z;\ 2x;\ 4y \right]$

$\frac{x}{2} + 1 \neq -1$

$x \neq -4.$

$7 \cdot$ $\begin{array}{r} \overset{4}{17} \\ + \quad 7 \\ \hline 119 \end{array}$

$\begin{cases} 2x = 4y \Rightarrow y = 2x \\ 2x - 1 = \frac{1}{2}z \end{cases}$

$\frac{7x}{\cancel{2}1} > \frac{17}{\cancel{4}2}$

Черновик

$x > \frac{7 \cdot 17}{2}$

$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = 1$

$\frac{7x}{\cancel{2}} = \frac{4+17}{\cancel{4}2} = \text{\_\_\_\_\_}$

Черновик

$7x = \text{\_\_\_\_\_}$

$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} \neq 1$

$\frac{7x}{\cancel{2}} \neq \frac{17+4}{4} = \frac{21}{\cancel{4}2}$

$x \neq \frac{21}{7 \cdot 2} =$

$\frac{\cancel{3}x}{2} > \cancel{6}2$

$\frac{x}{2} > -1$

$x > -2.$

$\frac{3x}{2} - 6 > 0.$

$x > 4$

$\frac{3x}{2} \neq 7$

$x \neq \frac{14}{3}$

$\frac{3x}{2} - 6 = 0.$

$x \neq 4.$

$\frac{\cancel{3}x}{2} = \cancel{6}2$

1) Случай 1: первое число равно 2му

$$\frac{1}{2}\log_a(b) = 2\log_b(c) \Leftrightarrow \log_a(b) = 4\log_b(c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\, b = c = 1 \right.$$

$\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) = 1$ I) $2x = 4y \Leftrightarrow x = 2y.$

$\frac{1}{2}z;\ 2x;\ 4y$

$\cancel{2y}$ $2x - 1 = z$

$4y - 1 = z$

$4y = z + 1$

$x + 2 \vee \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$

$2 + \frac{17}{4} = \frac{7x}{2} - \frac{2x}{2}$ | $\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} \vee \frac{x}{2} + 1$ $>$

$\frac{8+17}{4} = \frac{25}{4} \vee \frac{5x}{2}$ $\frac{6x}{2} \vee \frac{17+4}{4} \Leftrightarrow 6x \vee \frac{21}{2}.$

$x \vee \frac{21}{12}$

Черновик

$\cancel{-\frac{x}{2}}$ $\frac{x}{2} + 1 \vee \frac{3x}{2} - 6$

$14 - \frac{16+1}{4} = 14 - 4 + \left(-\frac{1}{4}\right) = 10 - \frac{1}{4} = 9,75$

Случай 1) ~~[illegible]~~ первое равно 2му:

$$\frac{1}{2}\log_a(b) = 2\log_b c \Leftrightarrow \log_a(b) = 4\log_b(c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_b a)^{-1} = 4\log_b(c) \Leftrightarrow \frac{1}{\log_b a} = 4\log_b(c)$$

$2a = x+2$

$4b = 14x-17$

$2c = 3x-12$

$yy(y-1) =$

$= y^3 - y$

$$\log_a(b)\cdot\log_b(c)\cdot\log_c(a) =$$

$$= \log_a(b)\cdot\frac{1}{\log_a c}\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b} = 1.$$

	1	-1	0	-4.
2	1	1	2	0.

$(y^2+y+2)(y-2)$

$\frac{7}{2}+1 = \frac{9}{2}$ $\frac{49}{2} - \frac{17}{4} =$

~~[illegible]~~ 25

Черновик