Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102587**

ID профиля: **369390**

Вариант 22

Чистовик

№1

Пусть d - разность арифметической прогрессии. Т.к. прогрессия целая, то $a_1 \in \mathbb{Z}$ и $d \in \mathbb{Z}$, а т.к. она возрастающая, то $d \geqslant 1$ (т.е. $d \in \mathbb{N}$).

Тогда $a_7 = a_1 + 6d$; $a_{16} = a_1 + 15d$; $a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{12} = a_1 + 11d \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > S-24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < S+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21d a_1 + 90d^2 > S-24 \\ a_1^2 + 21d a_1 + 110d^2 < S+4 \end{cases}$$

Вычитая первое нер-во из второго, получаем, что:

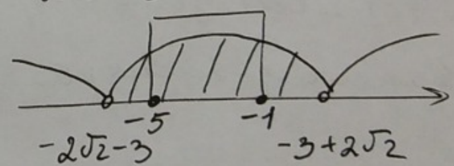
$-20d^2 > -28 \Rightarrow d^2 < \frac{7}{5} \Rightarrow$ т.к. $d \in \mathbb{N}$ $d^2 \leq 1 \Rightarrow d \in [-1;1]$,

но из условий, что прогрессия возрастает и что она целая $\Rightarrow \underline{d=1}$

Тогда $S = \frac{2a_1 + 14 \cdot d}{2} \cdot 15 = (a_1+7) \cdot 15 = 15a_1 + 105$. Подставив исходные нер-ва:

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ (a_1 - (2\sqrt{2}-3))(a_1 - (-2\sqrt{2}-3)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq 3 \\ \end{cases}$$



Учитывая, что $a_1 \in \mathbb{Z}$, получаем, что $a_1 \in \{-5, -4, -2, -1\}$

Ответ: $-5; -4; -2; -1$

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,\ 50)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 50 \quad (*)\\ a^2+b^2\le 50 \quad (1)\\ \cancel{a\ge\frac{25-b}{7}}\ b\ge 25-7a\end{cases}\\ \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 50 \quad (*)\\ (a-7)^2+(b-1)^2\le 50 \quad (2)\\ \cancel{a\le\frac{25-b}{7}}\ b\le 25-7a\end{cases}\end{array}\right.$$

$49+$

$5^2+\ 49+1$

Если изображать данные ~~нер-ва~~ система в координатах ~~(a;b)~~ (a;b), то получим следующие мн-ва:

(1) $a^2+b^2\le 50$ — круг с центром $(0;0)$ и $R=5\sqrt{2}$

$b\ge 25-7a$ ~~$a\ge\frac{25-b}{7}$~~ — полуплоскость над прямой ~~$a=\frac{25-b}{7}$~~ $b=25-7a$

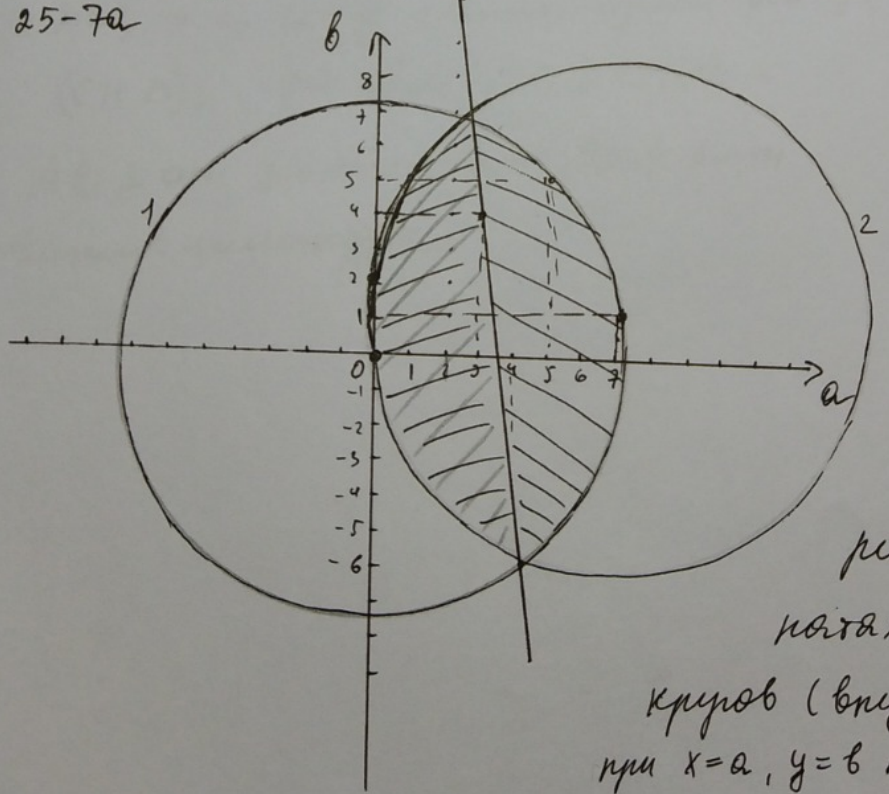
(2) $(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$ — окр-ть с центром $(7;1)$ и $R=5\sqrt{2}$

~~$a\le\frac{25-b}{7}$~~ — полуплоскость ~~а~~ под прямой ~~$a=\frac{25-b}{7}$~~ $b=25-7a$

$b\le 25-7a$

$25-14=11$

$25-21=4$



||| — мн-во 1

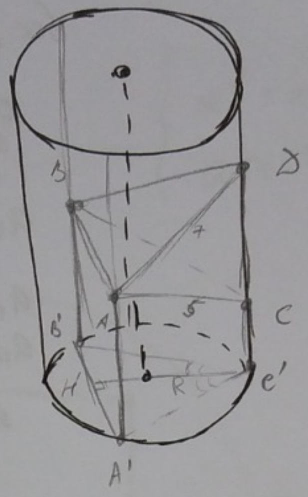
||| — мн-во 2

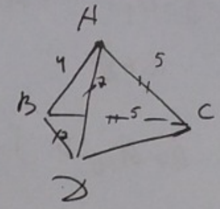
Теперь рассмотрим (*). В координатах $(a;b)$ это мн-во кругов (внутр. их часть, т.к. при $x=a$, $y=b$ нер-во выполнено), с центром $(x;y)$ и $R=5\sqrt{2}$

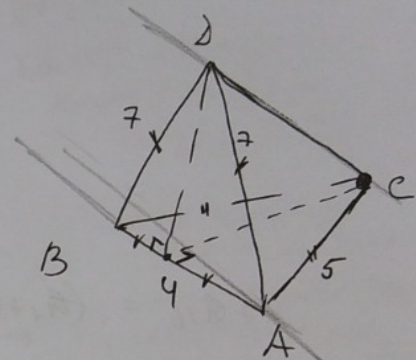
$AB=4$
$AC=CB=5$
$AD=DB=7$
$CD \parallel OO_1$

Взяли тетраэдр, что для него R min — чему тогда может быть равно CD?

Черновик





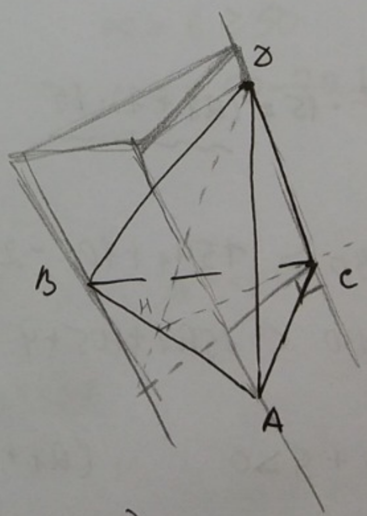


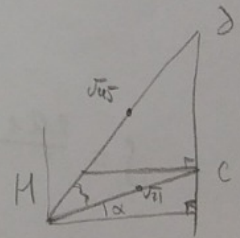
$AA' \parallel CC'$
$BA \parallel B'A'$, $BA = B'A' = 4$

Если в таком тетраэдре в гранях BDA и CBA опустить на AB высоты, то они попадут в одну точку — в середину AB

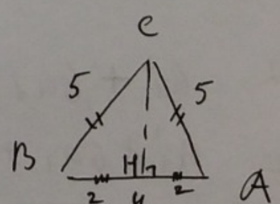
Основание цилиндра будет $\perp$ CD

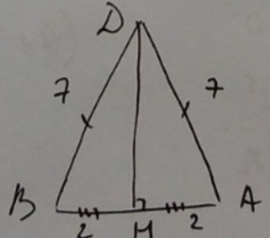
$R_ц$ зависит от проекции $\triangle BCA$ на пл-ть, $\perp$ую CD





$CH' = CH \cdot \cos\alpha \rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~CH' min = 0~~



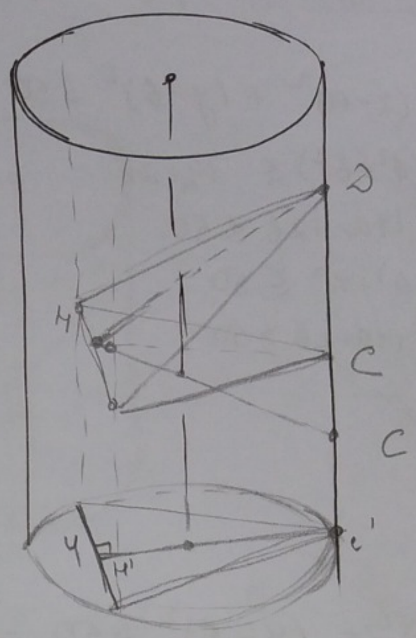


$CH = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

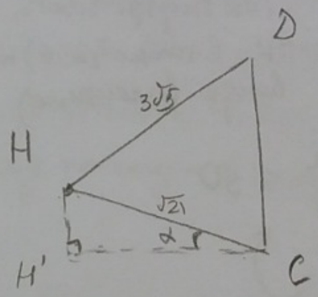
$DH = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

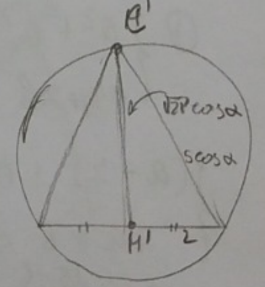
Черновик



D
H
C
C
Ч
H'
C'



D
$3\sqrt{5}$
H
$\sqrt{21}$
α
H'
C



C'
$\sqrt{21}\cos\alpha$
$5\cos\alpha$
H'
2

Черновик

M – фигура, что сущ-т пара a, b, что выполнено:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a^2+b^2) \le 14a+2b \\ 14a+2b \le 50 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \\ 14a+2b \ge 50 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$a=1 \quad b=2$

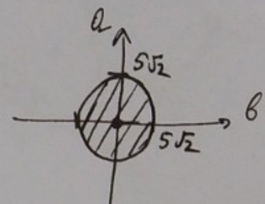
$\cancel{(x-2)^2+(y-b)^2 \le 50}$

следует из второго нер-ва

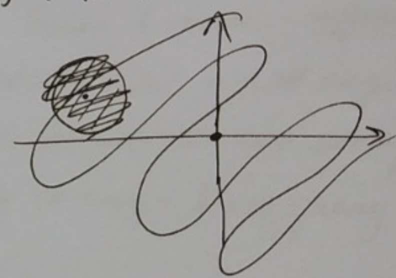
При $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ первое нер-во: $a^2+b^2 \le 50$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ $\quad \sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$a^2+b^2 \ge 2ab$



$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50$ – это круги ~~их внутр. часть~~ с центрами $(a;b)$ и $R=5\sqrt{2}$ (их внутр. часть, т.к. в точке $(a;b)$ нер-во всегда выполнено)



$a^2+b^2 \le 50$

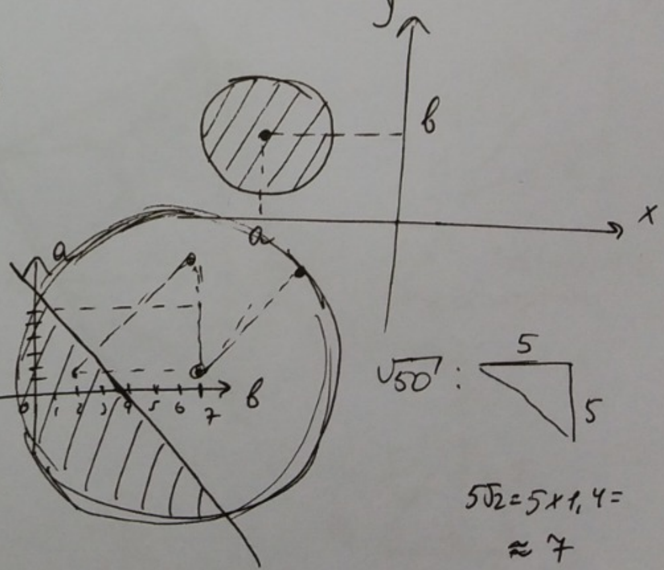
$x=a \rightarrow$
$y=b$

2·7

① $\begin{cases} a^2+b^2 \le 14a+2b \\ 14a+2b \le 50 \end{cases}$

$\begin{cases} (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \\ 7a+b \le 25 \end{cases}$

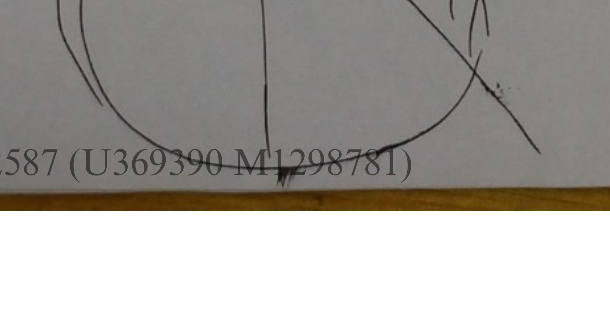
$a \le \frac{25-b}{7}$



$\sqrt{50}$: 5, 5

$5\sqrt{2}=5\times1,4=$
≈ 7

②



$2{,}4 \cdot 5 = 70$

$25{,}0 : 7 = 3{,}57$
-21
40
-35
50
-49
1

Черновик

$a_1 < a_2$

$S = a_1 + \dots + a_{15} = \cancel{a_1 + 2 \ldots (n-1)}$ $\quad \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot n$

$a_i \in \mathbb{Z}$

все возможные a_1

$a_7 a_{16} > S - 24$

$a_{11} a_{12} < S + 4$

$a_2 = a_1 + d$ $\quad \boxed{d \in \mathbb{Z}}$

$a_3 = a_1 + 2d$

$\vdots$

$a_7 = a_1 + 6d$ $\quad \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$

$\vdots$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{12} = a_1 + 11d$ $\quad \frac{1+5}{2} \cdot 5 = 15$

$\vdots$

$a_{16} = a_1 + 15d$ $\quad a_{15} = a_1 + (15-1)d$ $\quad 5 \cdot 3 \cdot 6 = 90$

$$a_7 a_{16} = (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) = a_1^2 + 21d a_1 + 90d^2 > S - 24$$

$$a_{11} a_{12} = (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 21d a_1 + 110d^2 < S + 4$$

$15 \cdot 7 = 105$, $105 - 24 = 81$

$$a_1^2 + 21d a_1 + 90d^2 > S - 24$$

$$-a_1^2 - 21d a_1 - 110d^2 > -(S+4)$$

$$-20d^2 > -28 \Rightarrow d^2 < \frac{28}{20} = \frac{7}{5} \Rightarrow d^2 \leq 1 \Rightarrow d = 1$$

т.к. $d^2 < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |d| < 1$, а $d \in \mathbb{Z}$

и арифм. прогр. $\nearrow$

$$S = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7) \cdot 15$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 = 15a_1 + 81 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 = 15a_1 + 109 \end{cases}$$

$36 - 4 = 32$

$2^5 = 2^4 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = (4\sqrt{2})^2$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$D = 36 - 4 = 32 = 2^5$

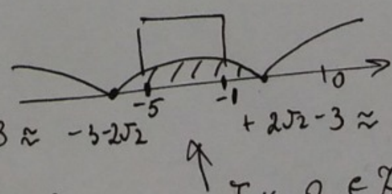
$\frac{-6 + 4\sqrt{2}}{2} = -3 + 2\sqrt{2}$

$\frac{-6 - 4\sqrt{2}}{2} = -3 - 2\sqrt{2}$

$(a_1 + 3)^2 > 0$ — при $\forall a_1$, кроме $a_1 = -3$

$(a_1 - (2\sqrt{2} - 3))(a_1 - (-3 - 2\sqrt{2})) < 0$

$15 \cdot 6 = 90$



$-5{,}8 \approx -3 - 2\sqrt{2}$ $\quad + 2\sqrt{2} - 3 \approx 2{,}8 - 3 = -0{,}2$

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то

$a_1 = \{-5, -4, -2, -1\}$

$2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1{,}4 = 2{,}8$

$\frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 50 & (*) \\ a^2+b^2 \le 14a+2b & (1) \\ 14a+2b \le 50 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 & (2) \\ 14a+2b \ge 50 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(*)$

$$\begin{cases} (a-7)^2 + (b-1)^2 \le 50 \\ a \le \dfrac{25-b}{7} \end{cases}$$

$(*)$

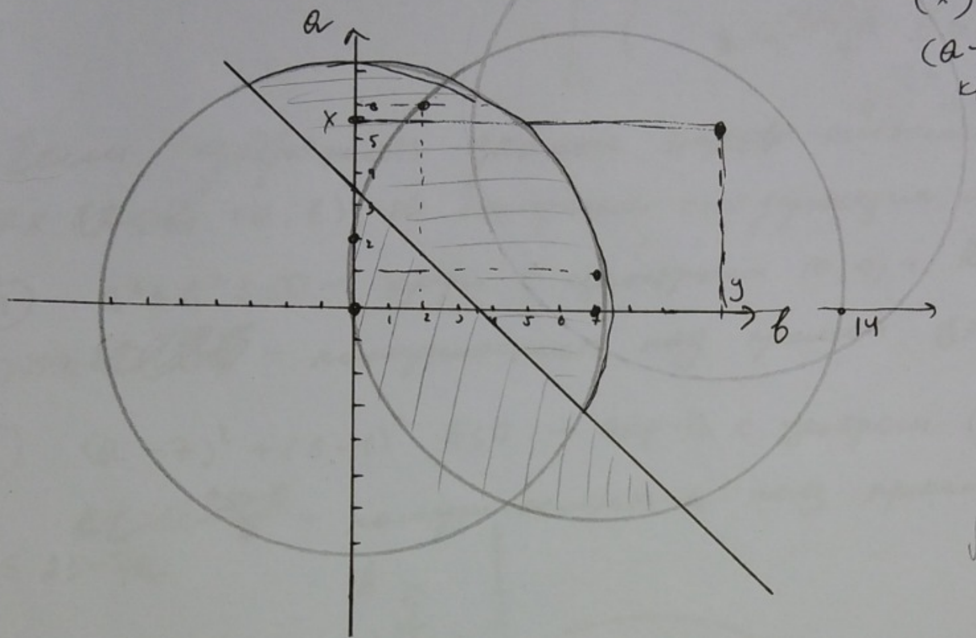
$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 50 \\ a \ge \dfrac{25-b}{7} \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow$

$(a-x)^2 + (b-y)^2 \le 50$

круги с центрами $(x; y)$ и $R = 5\sqrt{2}$

а это такие же окр-ти, как уже нарисованные, только сдвинутые центрами



$\sqrt{50-9} = \sqrt{41}$

$7a + b \ge 50$

$b \ge 50 - 7a$

$\cancel{a^2} - 14a + \cancel{b^2} - 2b = \cancel{a^2} + \cancel{b^2}$

$14a = -2b$

$7a = -b$

$b = -7a$

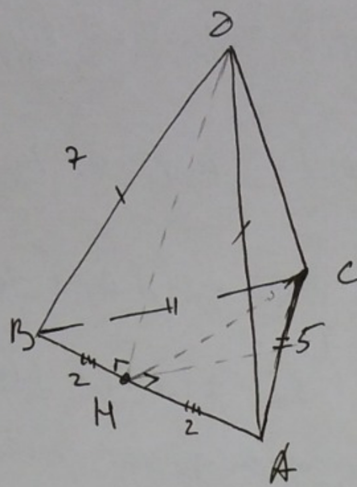
Чистовик

№ 2

Дано:
$AB = 4$
$AC = CB = 5$
$AD = DB = 7$
$CD \parallel OO_1$
R_{min}

Найти:
$CD = ?$

Рассмотрим такой тэтраэдр ABCD:

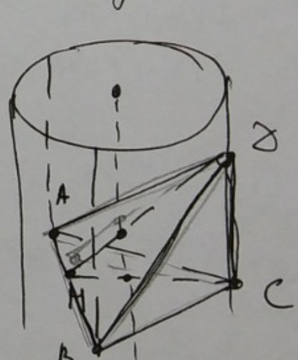


Если в гранях DBA и BAC опустить на AB из D и C соотв. перпендикуляр, то они (эти ⊥-ы) попадут в одну точку — в середину AB (т.к. △BDA равнобедр. и △CBA равнобедр., то высота на основание будет и медианой)

Из △HAD: $DH = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$, из △CHA: $CH = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

Если CD ∥ оси цилиндра, значит, CD — его направляющая, а A и B — точки на цилиндре, равноудалённые от неё (т.к. △BDC = △ADC по 3м сторонам, то равны и расстояние от B и A до DC) → из соображ. симметрии ось цилиндра пройдёт через (CHD). При чём AB ⊥ (CHD) →

→ AB ⊥ оси цилиндра → AB ∥ пл-ти основание цилиндра



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102587**

ID профиля: **369390**

Вариант 22

Чистовик

№ 4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases} \longrightarrow a=14p_1;\ b=14p_2;\ c=14p_3, \text{ где } НОД(p_1;p_2;p_3)=1$$

Пусть $a \geq b \geq c$. Тогда $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Т.к. $НОД(p_1;p_2;p_3)=1$, тогда хотя бы у одной из пар $(p_1;p_2)$, $(p_2;p_3)$, $(p_1;p_3)$ НОД равен 1

$a, b, c \in N$

Кол-во таких троек

(Черновик

$НОД(a;b;c) = 14 = 2 \cdot 7$

$НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

~~НОД·НОК = abc = ($2^{18} \cdot 7^{19}$)~~

$НОД(2, 6) = 2$

$НОК(2, 6) = 6$

$НОД(2, 6, 18) = 2$

$НОК(2, 6, 18) = 18$

$2 \cdot 6 \cdot 18$

~~3;6~~

36 ; 6

6 ; 4

$a = 14 p_1$:2

$b = 14 p_2$

$c = 14 p_3$

Хотя бы одно из чисел $p_1, p_2, p_3 \vdots 2$ и хотя бы одно $\vdots 7$

$2^{17} \cdot 7^{18} = a k_1 = b k_2 = c k_3$

$НОД = 14 \to$ $a = 14p_1$, $b = 14p_2$, $c = 14p_3$

$НОД(p_1; p_2; p_3) = 1$

14 · 3 = 42

$НОК = 2^{17} \cdot 7^{18} \to$ $a = 2^{17} \cdot 7^{18} k_1$, $b = 2^{17} \cdot 7^{18} k_2$, $c = 2^{17} \cdot 7^{18} k_3$

3, 2, 3

~~$НОК(k_1, k_2, k_3) = 1$~~

~~$k_1 = k_2 = k_3 = 1$~~

$НОК(3, 2, 3) = 6$

$НОК(3, 8, 7) = 3 \cdot 8 \cdot 7$

$НОК(14p_1; 14p_2; 14p_3) =$

$= 14 \cdot$

(14, 28, 42)

$НОД(1;2;3) = 1$

$НОК(14; 28; 42) =$

$= 42 = 14 \cdot 3$

$(14 \cdot 6; 14 \cdot 2; 14 \cdot 7)$

$НОД(2; 6; 7) = 1$

$НОК(14 \cdot 6; 14 \cdot 2; 14 \cdot 7) =$

$= 14 \cdot 7 \cdot 6$

$НОД(6, 18, 36) = 6$

$НОК(6, 18, 36) = 36$

$6 \cdot 1$

$6 \cdot 3$

$6 \cdot 6$

$НОД(1, 3, 6) = 1$

$6 \cdot 18 \cdot 36 =$

$= 6^4 \cdot 3$

$6 \cdot 36 = 6^4$

$(3, 6, 7) = 1$

$(3, 7) = 1$

$(6, 7) = 1$

$(3; 6) = 3$

21102587 (U369390 M1298782)

6) В $\triangle APC$, PK - бис. $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$ Чистовик

7) $PK \parallel AB$ (т.к. $\angle CPK = \angle PBA$, соотв. при секущей BP) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{KC}{AC} = \cancel{AB}\ \frac{PK}{AB} \Rightarrow \frac{PK}{AB} = \cancel{5x}\ \frac{5x}{12x} \Rightarrow \frac{S_{PKC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{PK}{AB}\right)^2 = \frac{25}{144} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{144}{25} S_{PKC} = \frac{144 \cdot 5}{25} = \frac{144}{5}$

Чистовик

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = \log_{\sqrt{\frac{9}{2}}}\frac{9}{2} = 2$. Т.е. $x=7$ действительно подходит

(2) ~~log~~ $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2}-6 = \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 \\ \frac{3x}{2}-6 \geq 0 \text{ – учтено в ОДЗ} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-2x+28=0$: $D = 4-4\cdot 28 < 0 \Rightarrow$ корней нет; этот случай не подходит

(3) $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 = 1$; тогда $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{2}+1 = \frac{3x}{2}-6 \Rightarrow x=7$. А это то же, что и в первом случае

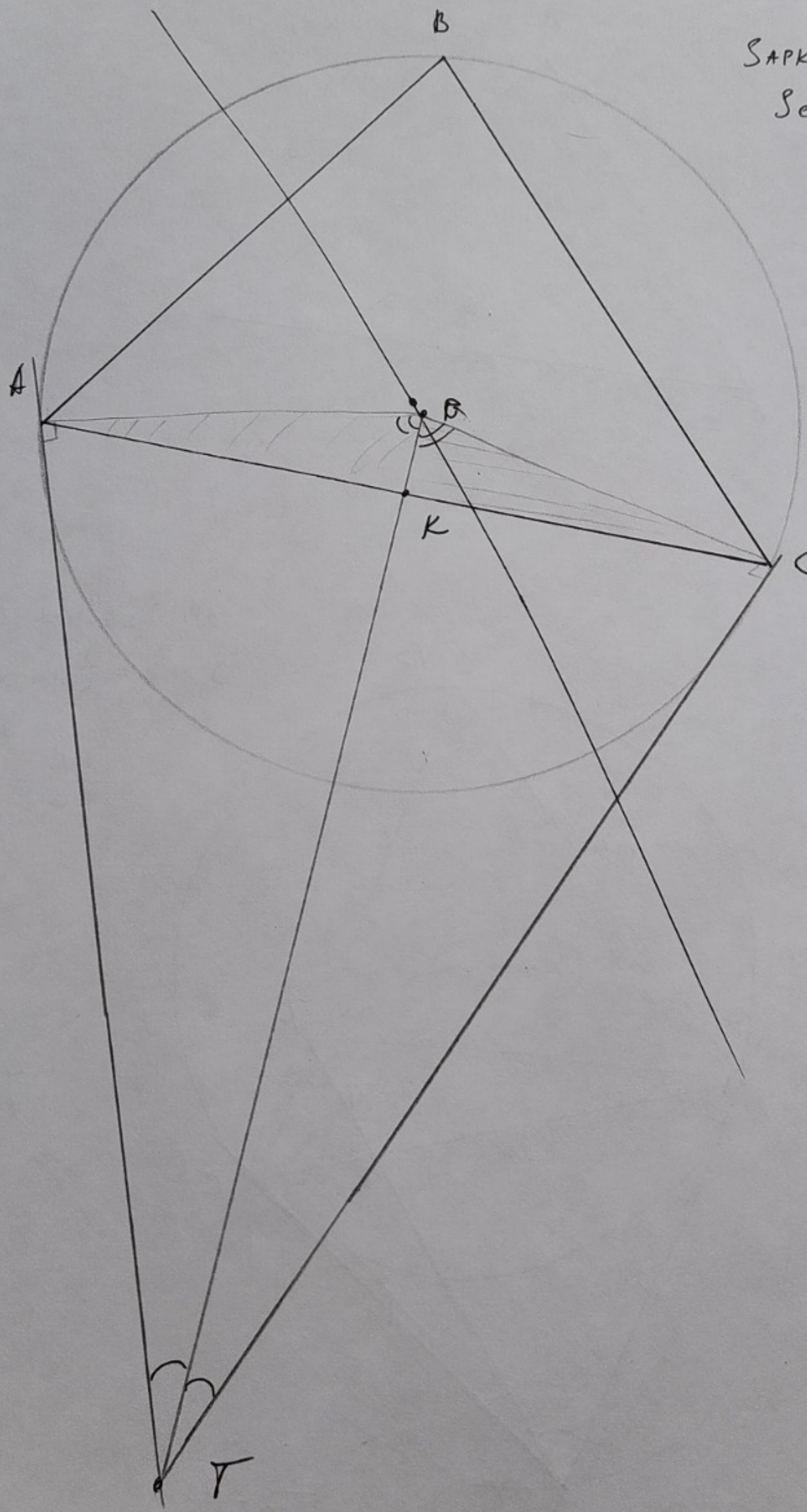
Ответ: $x=7$

Черновик

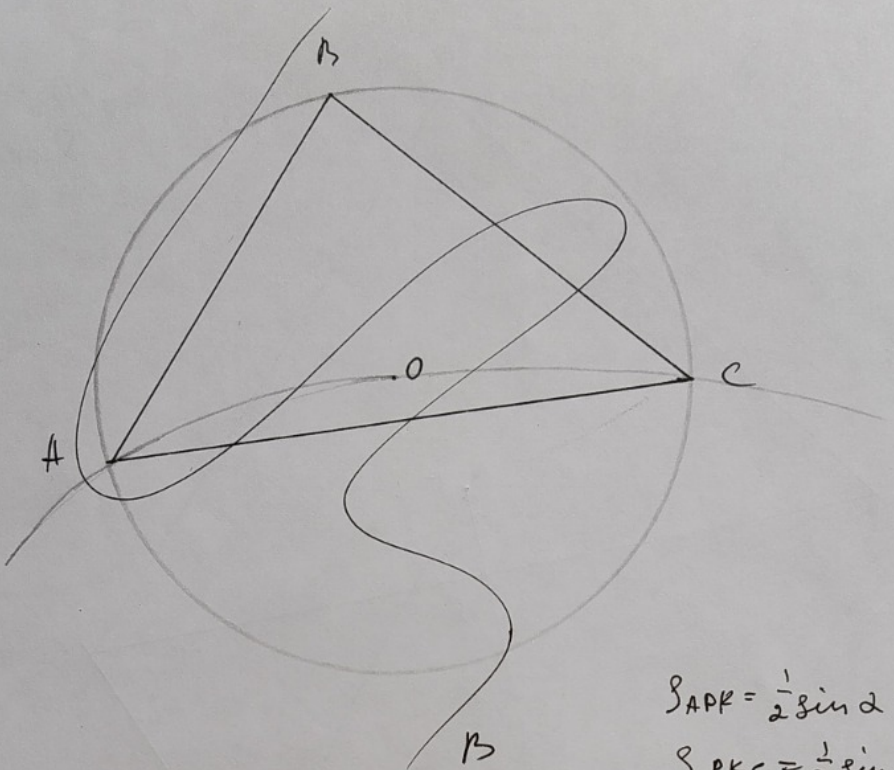
$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$

а) $S_{ABC} = ?$



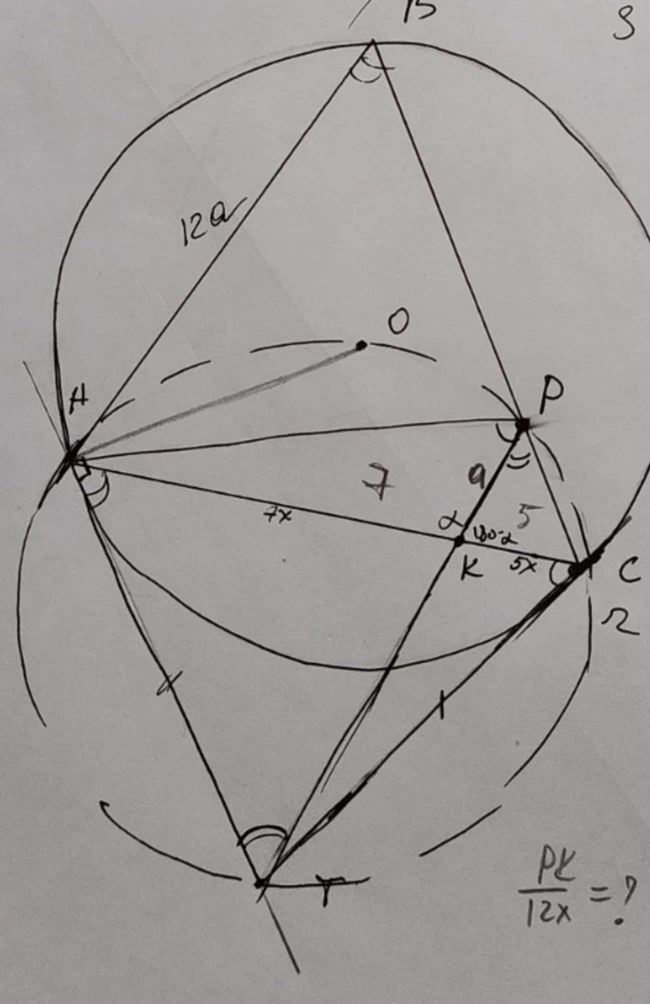
Черновик



$S_{APK} = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot PK \cdot AK$

$S_{PKC} = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot PK \cdot KC$

$\frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$



$T \in \Omega$

$\frac{PK}{12x} = ?$

(Черновик

$$\begin{array}{r|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ -\,a^3-2a^2 & a^2+a+2 \\ \hline a^2-4 & \\ -\,a^2-2a & \\ \hline 2a-4 & \\ -\,2a-4 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

$x = 1 - 2\cdot 4 < 0$

То есть два равных логарифма равны двум, а третий 1. Рассмотрим 3 случая, когда "третий равен 1":

(1) $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

$$\frac{x^2}{4}-2\cdot\frac{x}{2}+1=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$$

$x^2-4x+4=14x-17$

$x^2-18x+21=0$

~~$x^2-4x+1=14x-17$~~

~~$x^2-18x+18=0$~~

$21\cdot 1$

$7\cdot 3$

~~x~~ $225-72=153$

(2) $\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}=\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$

$\sqrt{\frac{14x-17}{4}}=\left(\frac{3x-12}{2}\right)^2$

$\sqrt{14x-17}=(3x-12)^2$

$28-17 \quad 6-12$

$5 \quad 9-12=(-3)^2=9$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)^2$

$\left(\frac{x}{2}+1-\frac{7x}{2}+\frac{17}{4}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{7x}{2}+1-\frac{17}{4}\right)=0$

$\frac{17}{14}$ 4

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=1$

$\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2$

$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$

$x^2+4x+4=14x-17$

$x^2-10x+21=0$

$(x-3)(x-7)=0$

Черновик

$2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\frac{3x}{2}-6$

$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{3x}{2}-6$

$x^2+4x+4=6x-24$

$x^2-2x+28=0$

корней нет

$\frac{28}{4}$

$4-28\cdot 4$

$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 7 \\ \hline 98 \\ -\ 17 \\ \hline 81 \end{array}$

$\log\sqrt{\frac{14\cdot 7-17}{4}}$

$\left(\frac{21-12}{2}\right)^2$

$\log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{9}{2}\right)^2$

$\frac{x+7}{2}$

$\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}=7$

$x=7$

$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{3x}{2}-6$

$x^2+4x+4=6x-24$

$x^2-2x+28=0$

21102587 (U369390 M1298782)

(Черновик

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=1$$

два равны, а третье меньше их на 1

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}(3x-6)=2$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2$$

$\log_a b=\log_c d-1$

$\log_a b+1=\log_c d$

$\log_a ab=\log_c d$ $\quad b=a-1$

$a,\ b,\ a$

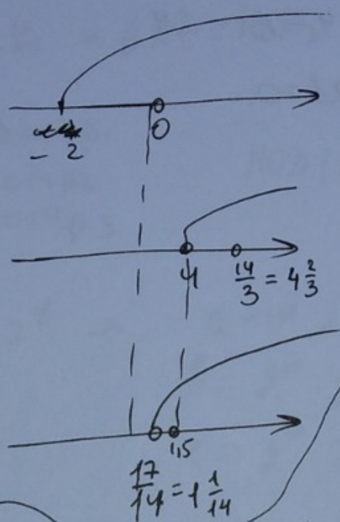
$8=3a-1$

$2a\quad b=$

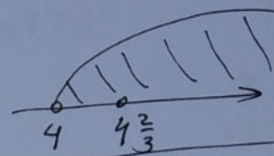
$$\begin{cases}\frac{x}{2}+1>0\\ \cancel{x\neq 2}\quad x\neq 0\\ \qquad x\neq -4\\ \frac{3x}{2}-6>0\\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0\\ \frac{3x}{2}\neq \cancel{7}\end{cases}$$

$\frac{7x}{2}\neq\frac{17}{4}+1$

$\frac{7}{2}x\neq\frac{21}{4}\quad x\neq\frac{3}{2}$



$\Rightarrow$



$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{\frac{1}{2}\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)}$$

$\frac{x}{2}>2$

$x>4$

$3x\neq 12$

$\cancel{x\neq 4}$

$x\neq\frac{14}{3}$

$7x>\frac{17}{2}$

$x>\frac{17}{14}$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=\frac{4}{\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

+

$$4+2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$$

Если всё перемножить, то получим $2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=4\Rightarrow$

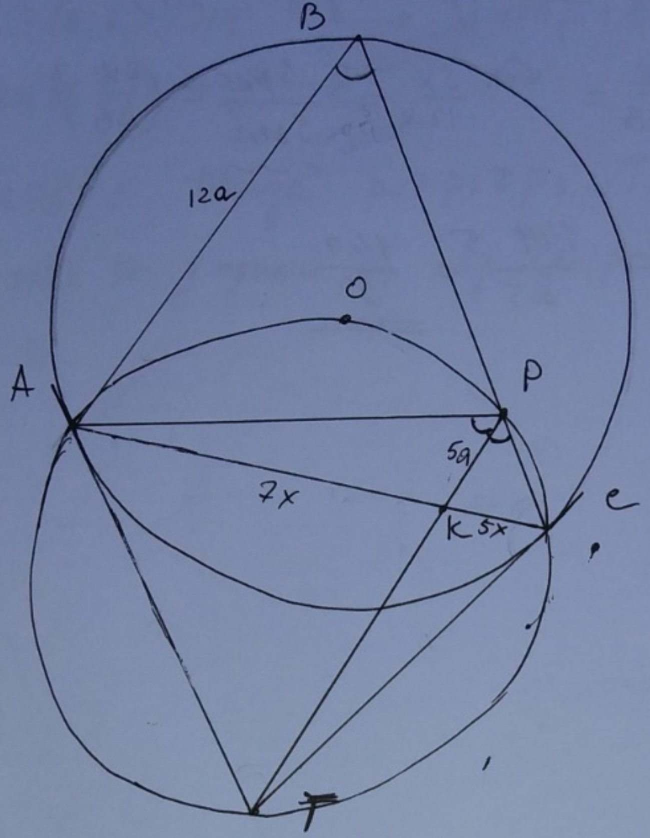
$\Rightarrow a\cdot a\cdot(a-1)=a^3-a^2=4\Rightarrow\quad a^3-a^2-4=0$

$8-4-4$

$(a-2)(a^2+a+2)\Rightarrow\boxed{a=2}$

Чистовик

№ 6



Дано:
$\triangle ABC$ впис. в ω
Ω около $\triangle AOC \cap BC = P$
AT и TC — касат. к ω
$TP \cap AC = K$
$S_{APK} = 7$, $S_{PCK} = 5$
а) Найти: S_{ABC}
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$
Найти: AC

1) Пусть окр-ть около $\triangle AOC$ — Ω. Тогда $T \in \Omega$, т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 90° + 90° = 180° \Rightarrow AOCT$ — вписанный, т.е. $T \in \Omega$

2) $\angle CAT = \angle ABC$ (угол между касат. и хордой), как и $\angle ACT = \angle BAC$ (аналогично). $\angle ACT = \angle APT$ (опир. на одну дугу в Ω); аналогично $\angle TPC = \angle CAT$ (опир. на одну дугу в Ω)

3) $\angle PCA = \angle PTA$ (опир. на одну дугу в Ω) $\Rightarrow \triangle KAT \sim \triangle BAC$ по двум углам.

4) Если $\angle PKA = \gamma$, то $S_{APK} = PK \cdot \frac{1}{2} \sin\gamma \cdot AK$, $S_{PKC} = \frac{1}{2} \sin(180° - \gamma) \cdot PK \cdot KC \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \dfrac{7}{5} \Rightarrow$ Если $AK = 7x$, то $KC = 5x$, а $AC = 12x$

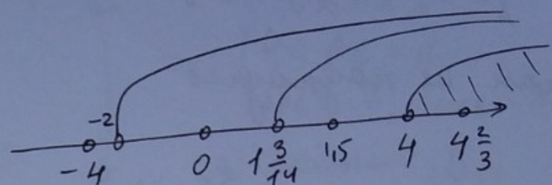
5) $\triangle AKT \sim \triangle KPC$ ($\angle PCK = \angle KTA$ и $\angle KPC = \angle KAT$) $\Rightarrow \dfrac{AK}{KP} = \dfrac{AT}{PC} = \dfrac{KT}{KC}$

Чистовик

№5

Найдём область допустимых значений для x:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+1 \neq 1 \\ \frac{x}{2}+1 \neq -1 \\ \frac{x}{2}+1 > 0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} > 0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6 > 0 \\ \frac{3x}{2}-6 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -4 \\ x > -2 \\ x > \frac{17}{14} \\ x \neq \frac{3}{2} \\ x > 4 \\ x \neq \frac{14}{3} \end{cases}$$



Т.е. $x \in (4;+\infty) \setminus \{4\frac{2}{3}\}$

Заметим, что если перемножить эти три числа, то получим: $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) \cdot \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 \cdot \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) =$

$$= \frac{\frac{1}{2}\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)} \cdot \frac{2\cdot 2}{\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)} \cdot 2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right) =$$

$= \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 2 = 4 \Rightarrow$ если один из логарифмов равен a, то два других — a и $a-1 \Rightarrow a \cdot a(a-1) = 4 \Rightarrow a^3-a^2-4=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a-2)(a^2+a+2)=0 \Rightarrow a=2,\ a-1=1$. Т.е. есть одно из чисел равно 1, а два других — 2. Рассмотрим три случая:

(1) $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+x+1 = \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-10x+21=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \text{ — не уд. ОДЗ} \\ x=7 \end{array}\right.$

При $x=7$: $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 = \log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 2$, а

$\sqrt{\text{лист 1 из 3}}$