Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102575**

ID профиля: **326749**

Вариант 22

Черновик

№1

$S = \frac{15(a_1+a_{15})}{2} = \frac{15(a_1+a_1+14d)}{2} = 15(a_1+7d)$

$\begin{cases} a_7 a_{16} > S-24 \\ a_{11} a_{12} < S+4 \end{cases}$

$(a_1+6d$

105 81

$a_1^2+21a_1+90 > 15(a_1+7)-24$

$a_1^2+24a_1+110 < 15(a_1+7)+4$

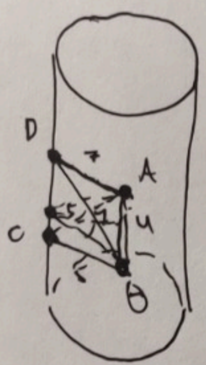
$a_1^2+6a_1+9 > 0$

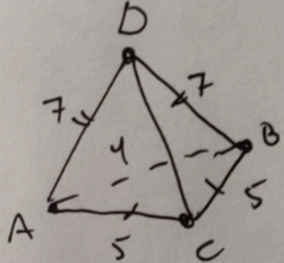
$a_1^2+6a_1+1<0$

32

[redacted]

$\frac{-6\pm\sqrt{32}}{2} = -3\pm\sqrt{8}$

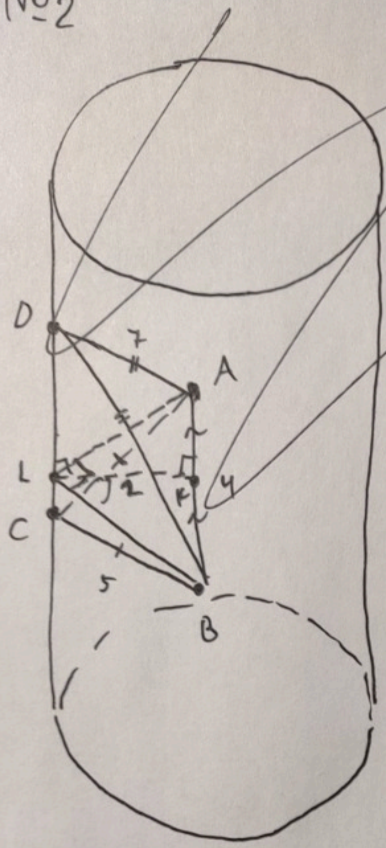




$\sqrt{21}$

Черновик

№2



Покажем на рис. расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD LK (см. рис.). Т.к. C и D лежат на боковой поверхности и CD параллелен оси цилиндра, весь отрезок CD лежит на боковой поверхности (а следовательно и точка L). Пусть R − радиус цилиндра.

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle ALB}$$ по т. синусов.

Значит, R минимален, когда синус максимален ($AB = const$)

$\sin\angle ALB$ максимален, когда максимален $\angle ALB$

В силу симметрии ($AC=BC$ и $AD=BD$), K − сер. AB.

Значит, LK − биссектриса, высота и медиана ΔALB.

$\angle ALB$ максимален, когда максимальны $\angle BLK$ и $\angle ALK$ ($\angle ALK=\angle BLK=\frac{\angle ALB}{2}$), а они максимальны тогда, когда максимальны их тангенсы

Черновик

$(a_1+6d)(a_1+15d) > S-24 = 15(a_1+7d)-24$

$S=\frac{15\cdot(a_1+a_1+15d)}{2}=\frac{15(2a_1+14d)}{2}=15(a_1+7d)$

$\cancel{S=\frac{n(a_1+a_n)}{2}}$

$(a_1+12d)(a_1+11d) < 15(a_1+7d)+4$

$a^2+21ad+90d^2 > 15a+105d-24$

$a^2+2ad+110d^2 < 15a+105d+4$

$5\sqrt{2}$

$a^2-14a+49-49$

$a^2+21ad+90d^2+4 > a^2+22ad+110d^2-24$

$14a+2b\le 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

$28 > 20d^2 \Rightarrow d^2=1$

$14a+2b>50$

$a^2-14a+49-49+b^2-2b+1-1\le 0$

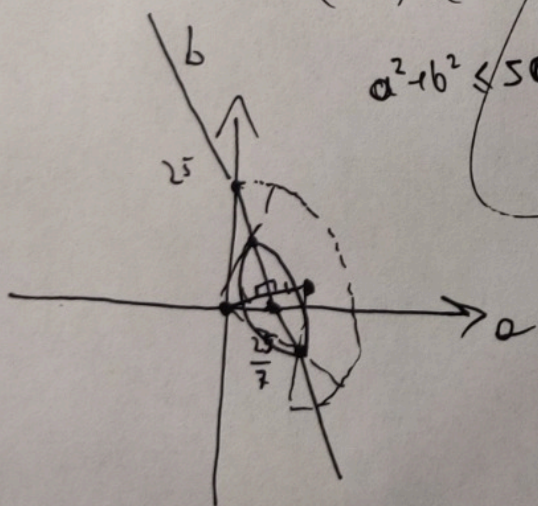
$2b \quad 50-14a$

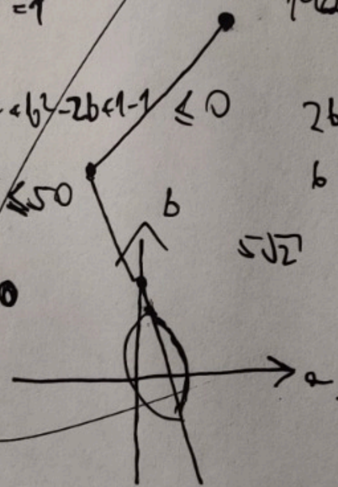
$b \quad 25-7a$

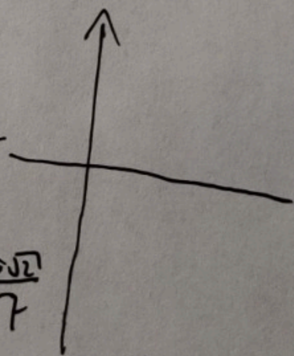
$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

$5\sqrt{2}$

$a^2+b^2\le 50$







$25\cdot\sqrt{1+\frac{1}{49}}=25\cdot\frac{5\sqrt{2}}{7}$

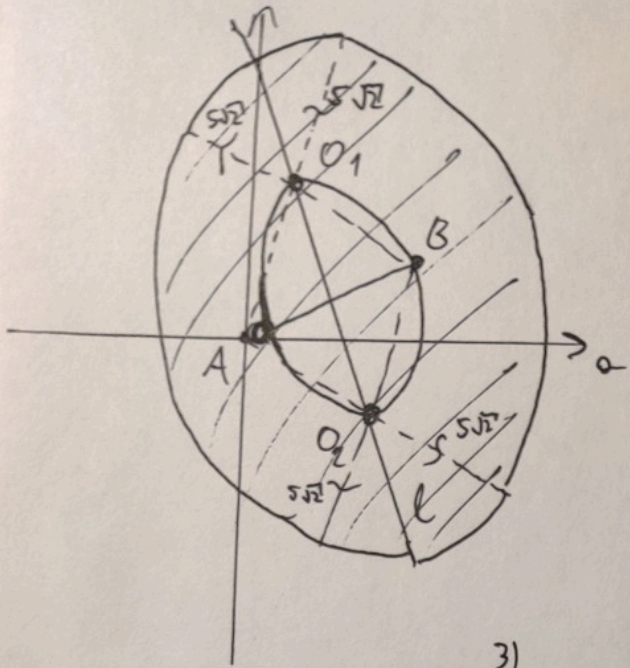
$5\sqrt{2}$

$\frac{25\cdot\frac{25}{7}}{25\cdot\frac{5\sqrt{2}}{7}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

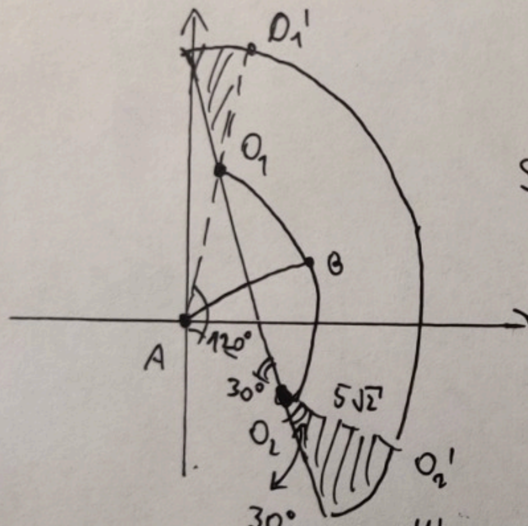
21102575 (U326749 M1299651)

6 Чистовик

Фигура M выглядит так (см. рис. 3)



3)



4)

Найдем площадь половины этой фигуры.

Площадь сектора $AO_1'O_2'$ равна

$$S_1=\pi AO_1'^2\cdot\frac{\angle O_1'AO_2'}{360°}=\pi(AO_1+O_1O_1')^2\cdot\frac{\angle O_1AO_2}{360°}=$$

$$=\pi(5\sqrt{2}+5\sqrt{2})^2\cdot\frac{120°}{360°}=\frac{200}{3}\pi$$

Площадь выделенных кусков (которые являются секторами круга радиуса $5\sqrt{2}$) равна

$$S_2=\pi\cdot(5\sqrt{2})^2\cdot\frac{30°}{360°}\cdot 2=\frac{100\pi}{12}=\frac{25\pi}{3}.$$

Надо учесть, что в S_1 мы посчитали площадь ΔAO_1O_2.

Итого, площадь всей фигуры равна

$$S_0=2(S_1+S_2-S_{AO_1O_2})=2\left(\frac{200}{3}\pi+\frac{25\pi}{3}-\frac{AO_1\cdot AO_2\sin 120°}{2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{200}{3}\pi+\frac{25}{3}\pi-\frac{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{225}{3}\pi-\frac{25}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{450\pi-75\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\dfrac{450\pi-75\sqrt{3}}{3}$

4

Чистовик

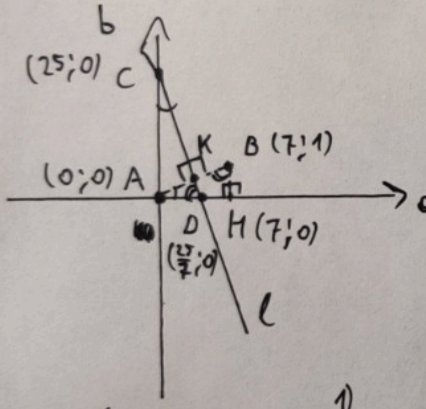
№3

Перефразируем условие – для всех точек $(a;b)$, удовл. второму неравенству, решениями будут все $(x;y)$ такие, что расстояние до хотя бы одной такой $(a;b)$ $\le 5\sqrt{2}$. Изобразим решение $(a;b)$ второго неравенства.

$$a^2+b^2\le \min(14a+2b,\ 50)$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}14a+2b\le 50\\ a^2+b^2\le 14a+2b\end{cases}\\ \begin{cases}14a+2b>50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}14a+2b\le 50\\ a^2-14a+49+b^2-2b+1\le 50\end{cases}\\ \begin{cases}14a+2b>50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}14a+2b\le 50\\ (a-7)^2+(b-1)^2\le 50\end{cases}\\ \begin{cases}14a+2b>50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}\end{array}\right.$$

Пусть l – прямая $b=25-7a$, $A=(0;0)$ и $B=(7;1)$. Также введём доп. обозначения как на рис. ($C=(0;25)$, $D=(\frac{25}{7};0)$, $H=(7;0)$)



1)

$$\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{25}{7}}{25}=\frac{1}{7}\ \text{и}\ \frac{BH}{AH}=\frac{1}{7}\Rightarrow \triangle ACD\sim\triangle HAB.$$

Значит, $\angle BAD+\angle ADC=\angle ACD+\angle ADC=90^\circ\Rightarrow AB\perp CD$

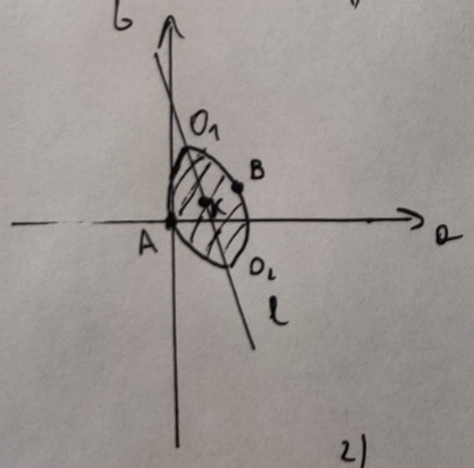
Пусть $AB\cap CD=K$.

$$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=\sqrt{25^2+\left(\tfrac{25}{7}\right)^2}=25\cdot\frac{5\sqrt{2}}{7}$$

$$AK=\frac{AC\cdot AD}{CD}=\frac{25\cdot\frac{25}{7}}{25\cdot\frac{5\sqrt{2}}{7}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$$

$AB=2AK\Rightarrow$ A и B симметричны отн. l



2)

Значит, решения $(a;b)$ второго неравенства образуют следующую фигуру (см. рис. 2)

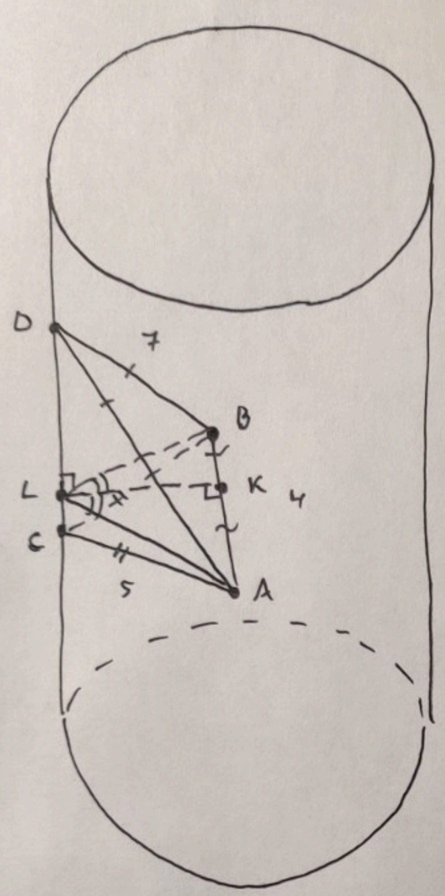
Пусть её граница пересекает l в O_1 и O_2.

Т.к. $O_1A=O_1B=AB=5\sqrt{2}$ (аналогично с O_2), то $\angle O_1AO_2=120^\circ$ ($\triangle ABO_1$ и $\triangle ABO_2$ – равносторонние)

3

Чистовик

№2



Пусть LK - расстояние между AB и CD

C и D лежат на бок. поверх-ти и CD параллельна оси $\Rightarrow$ CD лежит на бок. поверх-ти.

Рис. симметричен отн. (CDK) $(AC=BC$ и $AD=BD) \Rightarrow$ K - сер. AB.

Пусть R – радиус цилиндра.

$R = \dfrac{AB}{2\sin\angle ALB}$ по т. синусов в $\triangle ALB$ (ALB параллельна основанию)

R - min $\Rightarrow$ $\sin\angle ALB$ - max (т.к. AB - const)

$\sin\angle ALB$ - max $\Rightarrow |90^\circ - \angle ALB|$ - min

LK - бис. $\triangle ALB$, т.к. K-сер. равнобедр. $\triangle ALB$

$|90^\circ - \angle ALB|$ - min $\Rightarrow |45^\circ - \angle ALK|$ - min

Очевидно, $LK \leq \min(KC, KD)$ (т.к. KC и KD - гипотенузы в $\triangle LKC$ и $\triangle LKD$ соотв., а LK - катет)

$LK \leq \min(KC, KD) = \min(\sqrt{5^2-2^2}, \sqrt{7^2-2^2}) = \min(\sqrt{21}, \sqrt{45}) = \sqrt{21}$

Получаем, что $\angle ALK \leq \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{21}} < \operatorname{arctg} 1 < 45^\circ$

Значит, радиус минимален, когда $LK = KC \Leftrightarrow L = C$.

Тогда, $\triangle CKD$ - прямоугольный и $CD = \sqrt{DK^2 - CK^2} =$
$= \sqrt{45-21} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Ответ: $2\sqrt{6}$

2

Чистовик

№1

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > S-24 \\ a_{11} a_{12} < S+4 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a_7 a_{16} > S-24 \\ S+4 > a_{11} a_{12} \end{cases}$$

$$a_7 a_{16} + \underline{S}+4 > \underline{S}-24 + a_{11}a_{12}$$

$$(a_1+6d)(a_1+15d)+28 > (a_1+10d)(a_1+11d)$$

$$\underline{a_1^2} + \underline{\underline{21a_1d}} + 90d^2 + 28 > \underline{a_1^2} + \underline{\underline{21a_1d}} + 110d^2$$

$$28 > 20d^2$$

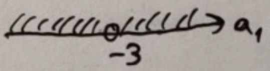
$$d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d=1$$

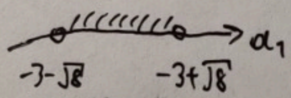
$$S = \frac{15(a_1+a_{15})}{2} = \frac{15(a_1+a_1+14d)}{2} = 15(a_1+7d) = 15a_1+105$$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1d+90d^2 > S-24 \\ a_1^2+21a_1d+110d^2 < S+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1+90 > 15a_1+81 \\ a_1^2+21a_1+110 < 15a_1+109 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0 \end{cases}$$





$$a_1 \in (-3-\sqrt{8}; -3) \cup (-3; -3+\sqrt{8})$$

Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$ и $2=\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$, $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

Ответ: $\{-5; -4; -2; -1\}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

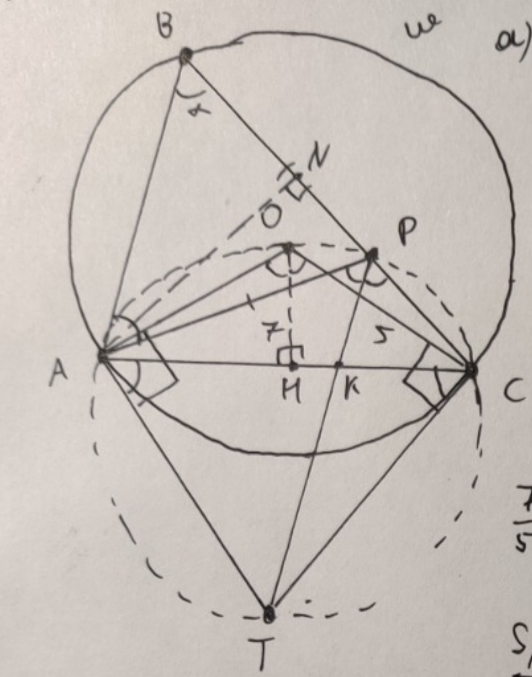
Шифр: **21102575**

ID профиля: **326749**

Вариант 22

Чистовик

№6



а) Т.к. $\angle OAT$ и $\angle OCT = 90^\circ$, OACT – вписан.

Т.е. OACTP – вписан.

Пусть $\angle ABC = \alpha$.

Тогда $\angle CAT = \angle ACT = \alpha$ (т.к. опир. на $\overset{\frown}{AC}$)

Тогда $\angle APT = \angle CPT = \alpha$ (т.к. опир. на $\overset{\frown}{AT}$ и $\overset{\frown}{CT}$)

$\angle BAP = \angle APC - \angle PBA = 2\alpha - \alpha = \alpha$ (т.к. $\angle APC$ – внешний к $\triangle APB$)

Значит, $AP = BP$.

$$\frac{7}{5} = \frac{S_{ADK}}{S_{CPK}} = \frac{\frac{AP \cdot PK \sin\alpha}{2}}{\frac{CP \cdot PK \sin\alpha}{2}} = \frac{AP}{CP} = \frac{BP}{PC}$$

$\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC}$ (т.к. общая высота) $= \frac{7}{5} \Rightarrow S_{APB} = \frac{7}{5} S_{APC} =$

$= \frac{7}{5}(S_{APK} + S_{CPK}) = \frac{84}{5}$

$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} = \frac{84}{5} + 12 = \frac{144}{5}$

б) $tg\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$

$$12 = S_{APC} = \frac{AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}{2} \Rightarrow 24 = AP \cdot \frac{5}{7} AP \cdot \frac{24}{25}$$

$AP^2 = 35$

$AP = \sqrt{35}$; $PC = \frac{5}{7}\sqrt{35}$

$BC = BP + PC = AP + PC = \frac{12}{7}\sqrt{35}$

Опустим высоту AN на BC.

$AN = AB \sin\alpha = \frac{3}{5} AB$

$AB = \frac{5}{3} AN = \frac{5}{3} \cdot \frac{2 S_{ABC}}{BC} = \frac{96}{25}\sqrt{35}$

По т. косинусов в $\triangle ABC$ найдем AC

Ответ: а) $\frac{144}{5}$, б) –

Чистовик

№5

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$; $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

О.Д.З.: $\begin{cases} \left(\frac{x}{2}+1\right)^2>0 & x\neq -2 \\ \left(\frac{x}{2}+1\right)^2\neq 1 & x\neq 0;\ x\neq -4 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 & x>\frac{17}{14} \\ \sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}>0 & x>\frac{17}{14} \\ \sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\neq 1 & x\neq \frac{3}{2} \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\geq 0 & x\geq \frac{17}{14} \\ \left(\frac{3x}{2}-6\right)^2>0 & x\neq 4 \\ \sqrt{\frac{3x}{2}-6}>0 & x>4 \\ \sqrt{\frac{3x}{2}-6}\neq 1 & x\neq \frac{14}{3} \\ \frac{3x}{2}-6\geq 0 & x\geq 4 \\ \frac{x}{2}+1>0 & x>-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x>4 \\ x\neq \frac{14}{3} \end{cases}$

Пусть $\frac{x}{2}+1=u$; $\frac{7x}{2}-14=v$; $\frac{3x}{2}-6=w$. Тогда произведение трёх чисел равно:

$$\log_{u^2} v\cdot\log_{\sqrt{v}} w^2\cdot\log_{\sqrt{w}} u=\frac{\log_u v}{2}\cdot\log_v w\cdot 2\log_w u=\frac{\log_v w\cdot\log_w u}{\log_v u}=\frac{\log_w u}{\log_w u}=1$$

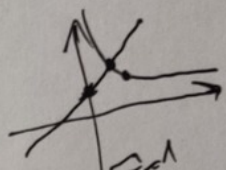
Пусть искомые числа равны a,b,c. Тогда $abc=1$.

Ответ: —

2

Черновик

$>1 \quad <1$



$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

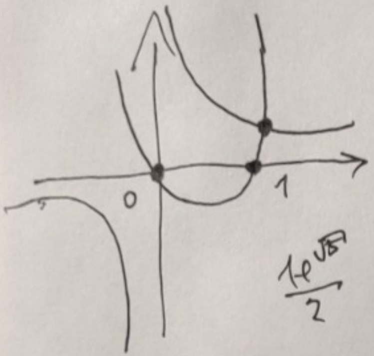
$\min(a_2, b_2, c_2) = 1$

$\min(a_7, b_7, c_7)$

$3 \cdot 17 = 51 - 6 = 45$

$3 \cdot 18 = 54 - 6 = 48$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 45 \\ \hline 240 \\ 192 \\ 2160 \end{array}$$



$\left(\frac{a+\sqrt{6}}{c}\right)^2 = \frac{a^2+6+2a\sqrt{6}}{c^2} \left(\frac{a-c+\sqrt{6}}{c}\right)$

$(a+c)2a\sqrt{6}$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

$\log_{u^2} v \quad \log_{\sqrt{v}} w^2 \quad \log_{\sqrt{w}} u$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 > 0$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 \neq 1$

$\log_u v$

$\frac{\log_u v}{2} \quad \log_v w \; 2\log_w u$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$\frac{1}{x} \quad b = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$\frac{\log_u v}{2} = \log_v w = \log_w u + 1$

$bc = \frac{1}{a} \quad a = \frac{1}{b^2}$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1+3+2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$a = b+1$

$\frac{1}{2\log_v u} = \log_v w$

$\log_u v \; \log_v w \; \log_w u =$

$= \log_u v \cdot \log_v w = 1$

$(x+1)^2 x = 1$

$1 - 2\log$

$abc = 1$

$x x$

$x^3 + 2x^2 + x = 1$

$a^2(a-1) = 1$

$u \; b = c$

$x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$

$x^3 - x^2 + 1$

$a^3 - a^2 = 1$

$x($

$a^3 - a^2 + 1$

$x^3 - x^2 + 1 = 0$

$\frac{1}{2} \quad \frac{4}{4}($

x^3

$x^3 + x^2 - 2x^2 + 1$

$b = -1 - \frac{1}{c}$

$x^2(x-1) + 1 - x + x =$

$(x+a)(x^2+bx+c) = x^3 + (a+b)x^2 + (ab+c)x + ac$

$1+7+2\sqrt{7} \left(\sqrt{7}-1\right.$

$a+b = 1$

$\frac{1}{c}$

$= (x^2-1)(x-1) + x =$

$ab + c = 0$

$=$

$c^3 - c - 1 = 0$

$ac = 1$

$\frac{b}{c} + c = 0$

$\frac{-1-\frac{1}{c}}{c} + c = 0$

$\frac{-c-1}{c^2} + c = 0$

Чистовик

№4

Т.к. НОК(a,b,c) не содержит никаких простых делителей кроме 2 и 7, то и a,b,c содержат только их (иначе, если какое-то из чисел содержит простой делитель $p \neq 2;7$, то и НОК должен содержать p).

Пусть a_2, b_2, c_2 – степени двойки; a_7, b_7, c_7 – степени семёрки в разложениях a, b, c соотв.

Тогда, по определению НОД и НОК,

$$\text{НОД}(a,b,c)=14=2^1\cdot 7^1 \Rightarrow \begin{cases} \min(a_2,b_2,c_2)=1 \\ \min(a_7,b_7,c_7)=1 \end{cases}$$

$$\text{НОК}(a,b,c)=2^{17}\cdot 7^{18} \Rightarrow \begin{cases} \max(a_2,b_2,c_2)=17 \\ \max(a_7,b_7,c_7)=18 \end{cases}$$

Т.к. $\min(a_2,b_2,c_2)\neq\max(a_2,b_2,c_2)$ и $\min(a_7,b_7,c_7)\neq\max(a_7,b_7,c_7)$, то в каждой тройке можно зафиксировать один минимум и один максимум. Тогда третье число в тройке (a_2,b_2,c_2) пробегает значения от 1 до 17, а в другой – от 1 до 18. Также тройки вида (x,x,y) мы посчитали два раза для каждой тройки. Для (a_2,b_2,c_2) они имеют вид:

1. 1, 1, 17 и 3 перестановки
2. 1, 17, 17 и 3 перестановки

Всего: 6 повторов.

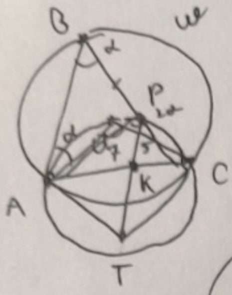
Аналогично для (a_7,b_7,c_7). Две уникальные тройки (a_2,b_2,c_2) и (a_7,b_7,c_7) задают уникальную тройку $(a,b,c)=(2^{a_2}\cdot 7^{a_7}, 2^{b_2}\cdot 7^{b_7}, 2^{c_2}\cdot 7^{c_7})$.

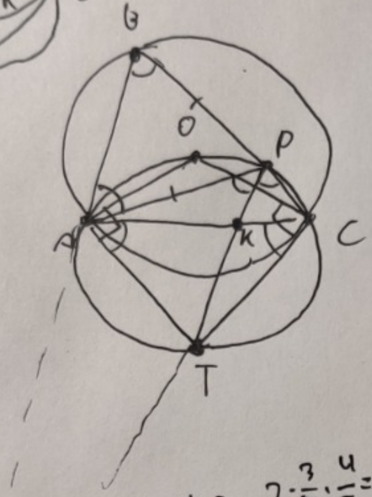
Поэтому ответ: $(3\cdot 17-6)(3\cdot 18-6)=2160$

Ответ: 2160

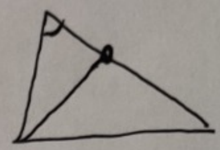
1

Черновик

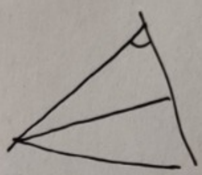




$\frac{7AB \cdot \frac{12}{7}\sqrt{35}}{10} =$



$OA =$



48

96

5

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$ $\frac{3}{5}$

$\frac{5}{6}x$

$AP \cdot PC \sin 2\alpha =$ $\frac{24}{25}$ $\frac{5}{7} AP^2 =$

$\frac{2}{7} AP^2 = 1$

$AP^2 = \frac{7}{2}$

7744
49
69696
30976
379456

49
7744

7744 · 49

$\frac{88\sqrt{35}}{\frac{5}{7} \cdot 35}$

$2 \quad \frac{\frac{44}{5}}{\frac{1}{7}\sqrt{35}} = \frac{88 \cdot 7}{5\sqrt{35}} = \frac{88\sqrt{7}}{5\sqrt{5}} =$

$= \frac{88}{25}\sqrt{35}$

625
25
3125
1250
15625

$\frac{2 \cdot 44}{\frac{5}{7}\sqrt{35}}$

88
88
704
704
7744

320
320
3520

$\frac{880 \cdot 4}{25 \cdot 75}$

48

25

125 · 7 875

700

$\frac{96}{25}\sqrt{}$

96