Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102417**

ID профиля: **381914**

Вариант 22

Чистовик

N2 (продолжение)

9. $S_{DHC} = \frac{1}{2} HM \cdot X$

$$HM = \sqrt{\frac{36 \cdot 21 \cdot 5 - (66 - x^2)^2}{2x}} \to \min$$

$$\frac{66 - x^2}{\sqrt{3780 - (66 - x^2)^2}} - \frac{\sqrt{3780 - (66 - x^2)^2}}{2x^2} = 0$$

$$x = \pm 2\sqrt{6}$$

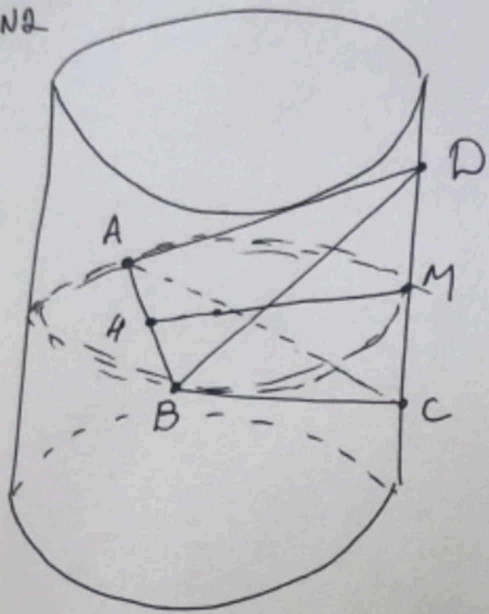
$x > 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$

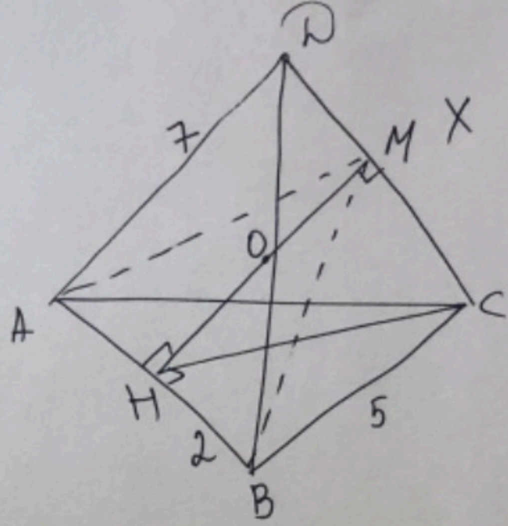
Ответ: $2\sqrt{6}$

4

Условие

№2





Решение: 1. т.к. $CH \perp AB$, $\triangle ABC$ - р/б $\Big| \Rightarrow$ CH - медиана и высота по свойству $\Rightarrow AH = HB$

2. $AH = HB$, $\triangle ADB$ - р/б $\Big| \Rightarrow$ HD - высота по свойству

3. $DC \parallel$ осн. цилиндра $\Rightarrow HM \perp DC$
OM - радиус
$OH \perp AB$ по свойству радиуса и хорды.

$HM = \rho(AB; DC)$

4. $\triangle HOB$: $OH \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{R^2 - 4}$ по т. Пифагора

5. $HM = R + \sqrt{R^2 - 4} \to \min$, т.к. $R - \min$.

6. по т. Пифагора $CH = \sqrt{21}$
$DH = 3\sqrt{5}$

7. по т. косинусов $\triangle HDC$

$$\cos \angle DHC = \frac{66 - x^2}{6\sqrt{21 \cdot 5}}$$

$$\sin \angle DHC = \sqrt{1 - \left(\frac{66 - x^2}{6\sqrt{21 \cdot 5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{36 \cdot 21 \cdot 5 - (66 - x^2)^2}{4 \cdot 21 \cdot 45}}$$

8. $$S_{DHC} = \frac{1}{2}\sqrt{\cancel{21}} \cdot \sqrt{\cancel{45}} \sqrt{\frac{36 \cdot 21 \cdot 5 - (66 - x^2)^2}{4 \cdot \cancel{21} \cdot \cancel{45}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{36 \cdot 21 \cdot 5 - (66 - x^2)^2}{4}}$$

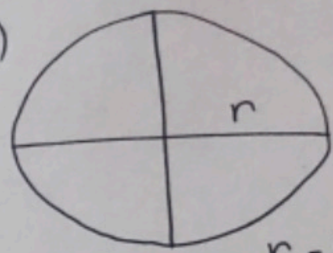
3

21102417 (U381914 M1304888)

№3

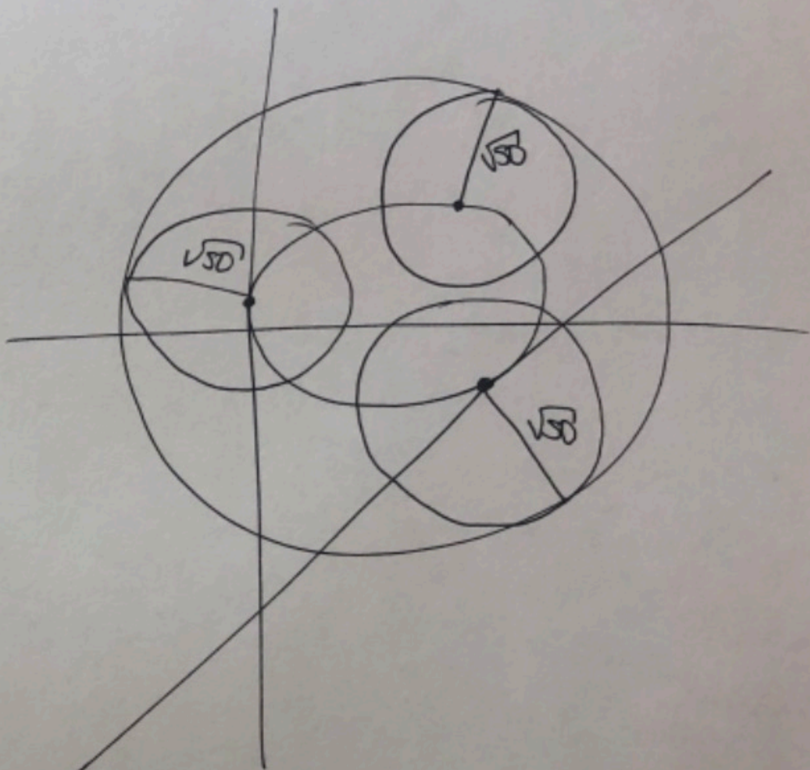
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(14\cdot a+2b,\ 50) & (2)\end{cases}$$

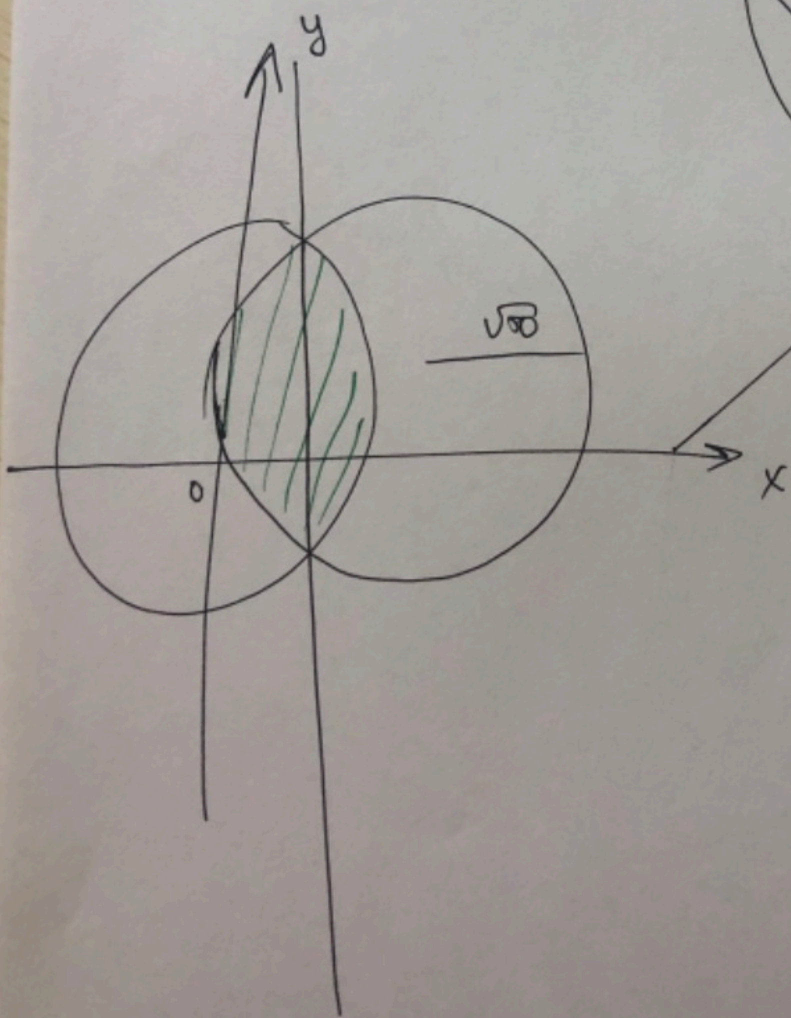
(1)



$r=5\sqrt{2}$

(2) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}14a+2b\geq 50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}\\ \begin{cases}14a+2b<50\\ a^2+b^2\le 14+2b\end{cases}\end{array}\right.$





Чистовик Математика 11кл

№1

$(a_1+6b)(a_1+15b)>15a_1+105b-24$

$(a_1+10b)(a_1+11b)<15a_1+105b+4$

т.к. $b\in N$ (возрастающая последовательность), тогда возьмем $b=1$, имеем

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+15)>15a_1+105-24 \quad (1)\\ (a_1+10)(a_1+11)<15a_1+105-4 \quad (2)\end{cases}$$

(1) $a_1^2+6a_1^2+9>0$

$(a_1+3)^2>0$

$a_1\in R/-3$

(2) $a_1^2+6a_1^2+1<0$

$a\in(-3-2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2})$

* $-3-2\sqrt{2} \vee -5$

$-2\sqrt{2}<-2$

$-3-2\sqrt{2} \vee -6$

$-2\sqrt{2}>-3$

$2\sqrt{2}<3$

$8<9$

$-6 \quad -3-2\sqrt{2} \quad -5 \quad x$

* $-3+2\sqrt{2} \vee 0$

$2\sqrt{2}<3$

$8<9$

$-3+2\sqrt{2} \vee -1$

$2\sqrt{2}>2$

$-1 \quad -3+2\sqrt{2} \quad 0$

Следовательно при $b=1$, "a" может принимать значения такие как: $-5; -4; -2; -1;$

при $b=2$

$$\begin{cases}(a_1+12)(a_1+30)>15a_1+210-24\\ (a_1+20)(a_1+22)<15a_1+210+4\end{cases}$$ — решений нет

Заметим, что при $b>1$ решений нет

=> Ответ: $-5; -4; -2; -1;$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102417**

ID профиля: **381914**

Вариант 22

Чистовик

B22

№4

1. из НОК очевидно, что числа a, в, с имеют вид $2^k \cdot 7^в$.

2. т.к. НОД $= 2 \cdot 7 \Rightarrow$ в каком-то из чисел будет иметь $2 \cdot 7^в$ и $2^\alpha \cdot 7$ т.к. если во всех числах α и в будут >1, то НОД не будет $2 \cdot 7$

3. аналогично из НОК $\Rightarrow$, что есть числа 2^{17} и 7^{18}.

4. Переберем все варианты.

$2^{17} \cdot 7^{18} \quad 2 \cdot 7 \quad 2^\alpha \cdot 7^\beta \longrightarrow 17 \cdot 18 \cdot 6 - 6 = 1830$

$2^{17} \cdot 7^\alpha \quad 2 \cdot 7 \quad 2^\beta \cdot 7^{18} \longrightarrow 17 \cdot 16 \cdot 6 - 3 = 1629$

$2^{17} \cdot 7 \quad 2 \cdot 7^{18} \quad 2^\alpha \cdot 7^\beta \longrightarrow 17 \cdot 18 \cdot 6 - 6 = 1830$

Итого: $1830 + 1629 + 1830 = 5289$

Ответ: 5289.

Чистовик

№6 (продолжение)

8. $\Delta KCP \sim \Delta ACB$ по двум углам

$$\frac{CK}{AC} = \frac{CP}{CB} = \frac{5x}{12x} = \frac{5}{12}$$

9. $$\frac{S_{CKP}}{S_{ABC}} = \frac{25}{144} = \frac{5}{S_{ABC}} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{144 \cdot 5}{25} = 28{,}8.$$

б) 10) $\angle ABC = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

$$\operatorname{tg}\alpha = 3/4$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$$, т.к. ABC - остроуг.

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

11) $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

12) $S_{APC} = \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = 12$

$$AP^2 \cdot \frac{1}{35} = 1 \Rightarrow AP = \sqrt{35}$$

$$CP = \frac{5}{7}\sqrt{35}$$

13) $\cos 2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

14) по т. косинусов в ΔACP

$$AC^2 = 35 + \frac{\cancel{25}}{\cancel{49}_{7}} \cdot \cancel{35}^{5} - 2 \cdot \sqrt{35} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{7}} \cdot \sqrt{35} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{25}_{5}}$$

$$AC^2 = 35 + 125/7 - 14$$

3

$$AC^2 = 21 + \frac{125}{7}$$

$$AC = \sqrt{21 + \frac{125}{7}}$$

Ответ: а) 28,8

б) $\sqrt{21 + \frac{125}{7}}$

Чистовик

№5 Пусть

$\frac{x}{2}+1=a$

$\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}=b \quad \sqrt{\frac{3x}{2}-6}=c$

$\log_{a^2} b^2 \; ; \log_b c^4 \; ; \log_c a$

$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2\cdot$

$\cdot\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=4$

$\Rightarrow k^2(k-1)=4 \Rightarrow$ один действ. реш.

$\log_b c=\frac{1}{4} \quad \log_c b=4 \quad \log_a b=2=\log_b a$

$c^2=a$

$\left(\sqrt{\frac{3x}{2}-6}\right)^2=\frac{x}{2}+1$

$x=7$

$\log_a b=2$

$a^2=b$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\sqrt{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}$

решений нет

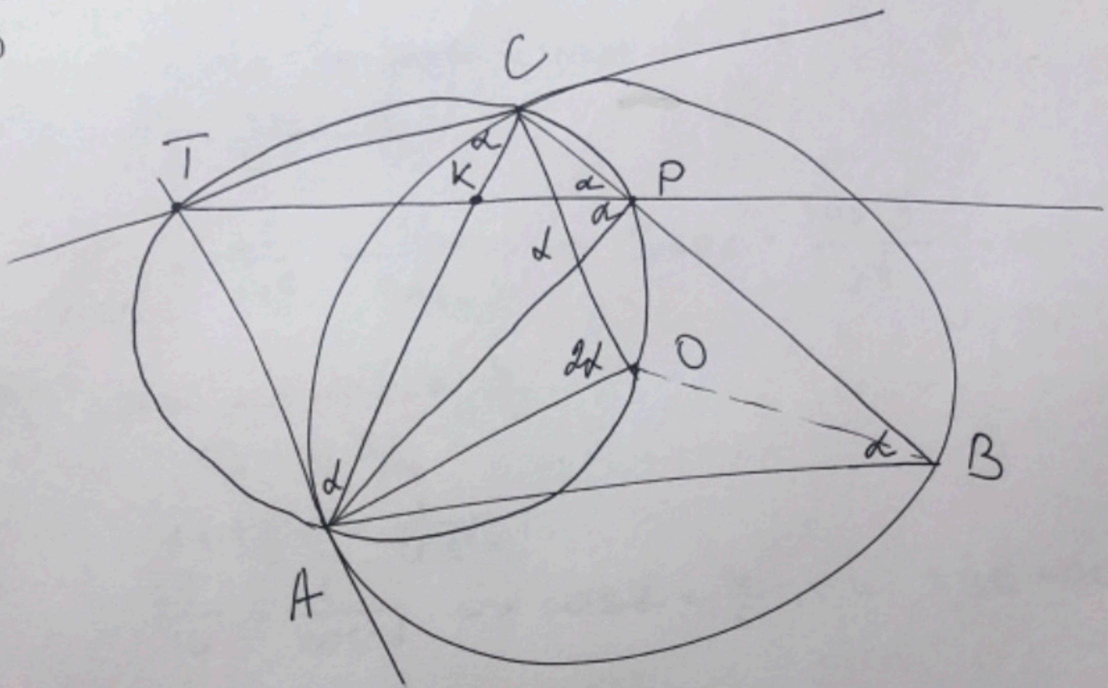
Ответ: 7.

4

21102417 (U381914 M1304889)

Чистовик

№6



Решение: а)

1. $\angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow ATCO$ - вписанный четырехуг. (по приз.) $\Rightarrow$
   $\Rightarrow T$ лежит на окружности.

2. $\frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{5}{7} = \frac{CK}{AK}$, т.к. Δ имеют общее S.
   $\Rightarrow CK = 5x,\ AK = 7x,\ AC = 12x$

3. по свойству хорд: $CK \cdot AK = TK \cdot KP$
   $5x \cdot 7x = TK \cdot KP$
   $35x^2 = TK \cdot KP$

4. $\angle AOC = \frac{1}{2} \angle ABC$ по свойству центр угла

5. $\angle TAC = \angle TCA = \frac{1}{2} \cup AC$ по св-ву угла касат. и хордой.

6. тогда $\angle TAC = \angle TCA = \angle ABC = \alpha$

7. $\left.\begin{array}{l}\angle APC = \angle AOC \\ \angle APT = \angle ACT\end{array}\right\} \begin{array}{l}(\cup AC) \\ (\cup AT)\end{array}$
   $\Rightarrow \angle TPC = \alpha = \angle APT \Rightarrow PK$ - биссектриса $\Delta APC \Rightarrow$
   $\Rightarrow \frac{AK}{AP} = \frac{KC}{CP} \Rightarrow \frac{CP}{AP} = \frac{KC}{AK} = \frac{5}{7} \Rightarrow CP = \frac{5}{7} AP$

2