Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102360**

ID профиля: **372930**

Вариант 22

Рег. №: М11-К-0325
Класс участия: 11 класс
Дата проведения: 07 марта 2021г.
Время начала (по московскому времени): 10:00

1 1 1 3 4 7 0 5

ШИФР
(заполняется секретарём)

МФТИ

Заключительный этап 2021 г.

Анкета участника

Данная анкета заполняется участником перед началом олимпиады и загружается в личный кабинет на сайте олимпиады. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

Кочегов	Лука	Денисович	05.11.2003	17 лет
Фамилия	Имя	Отчество	Дата рождения	Возраст

Российская Федерация — Страна
Краснодарский край — Регион
г Сочи — Населенный пункт

Паспорт гражданина РФ	03 17	858684	28.11.2017	230-011
Документ, удостоверяющий личность	Серия	Номер	Дата Выдачи	Код Подразделения

Российская Федерация — Страна школы
Краснодарский край — Регион Школы
г Сочи — Населенный Пункт Школы

11 класс — Класс обучения
МОАУ ГИМНАЗИЯ № 8 — Полное название образовательного учреждения

+7 989 758 34 24 — Мобильный телефон
lukakochegov@gmail.com — E-mail

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен на сбор, систематизацию, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет" и даю согласие в отношении обработки персональных данных при участии в олимпиаде на площадке федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» в электронной информационно-образовательной среде с применением дистанционных образовательных технологий. Я согласен, что мои персональные данные будут ограниченно доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован, что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я согласен на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Порядком проведения олимпиад школьников, Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников "Физтех", а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«7» марта 2020 г

Подпись участника олимпиады

Кочегов Денис Викторович	отец	
ФИО законного представителя	Степень родства	Подпись законного представителя

Паспорт гражданина РФ	0309	123055	13.02.2009	230-015
Документ, удостоверяющий личность	Серия	Номер	Дата выдачи	Код подразделения

ул. Санм-Нсва 35
Адрес

21102360 (U372930 M1299387)

№1

a_1
$a_2 = a_1 + d$
$\vdots$
$a_7 = a_1 + 6d$
$\vdots$
$a_{11} = a_1 + 10d$
$a_{12} = a_1 + 11d$
$\vdots$
$a_{15} = a_1 + 14d$
$a_{16} = a_1 + 15d$

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15$$

$$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$$
$$(a_1+6d)(a_1+15d) > 15a_1 + 105d - 24$$
$$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$$
$$(a_1+10d)(a_1+11d) < 15a_1 + 105d + 4$$

Из условия следует:

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ 15a_1 + 105d + 4 > a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 \end{cases}$$

т.к. обе части нер-в положительны, сложим их:

$$a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 + 15a_1 + 105d + 4 > 15a_1 + 105d - 24 + a_1^2 + 21a_1d + 110d^2$$
$$90d^2 + 4 > 110d^2 - 24$$
$$28 > 20d^2$$
$$d^2 < \frac{28}{20}$$

Заметим, что при $d \geq 2$: $d^2 \geq 4$, а т.к. у нас возрастающая арифм. прогрессия, состоящая из целых чисел, то $d = 1$.

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ (a_1 + 3 - 2\sqrt{2})(a_1 + 3 + 2\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$$

21102360 (U372930 M1299387)

ЧИСТОВИК

$$\begin{cases} a_1 \neq 3 \\ a_1 \in \left(-3-2\sqrt{2};\, -3+2\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

т.к. $2 < 2\sqrt{2} < 3$, то a_1 может принимать значения:

$-5; -4; -2; -1$

$\boxed{\text{Ответ: } -5; -4; -2; -1}$

ЧИСТОВИК 3 из 4

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \end{cases}$$

1) Заметим, что для всех a и b удволетворяющих второму нер-ву точки (x,y) будут лежать в окр-ти радиуса $5\sqrt{2}$ с центром в точке (a,b)

2) $a^2+b^2 \le 50$. Заметим, что нер-во всегда выполняется (для наших a и b), т.к. либо $14a+2b \le 50$, либо $14a+2b > 50$. В 1ом случае $a^2+b^2 \le 14a+2b$, а во втором случае $\min(14a+2b; 50) = 50$

Тоже самое для нер-ва $a^2+b^2 \le 14a+2b$

Значит подходящие a и b должны удволетворять обоим нер-вам, то есть лежать в их пересечении.

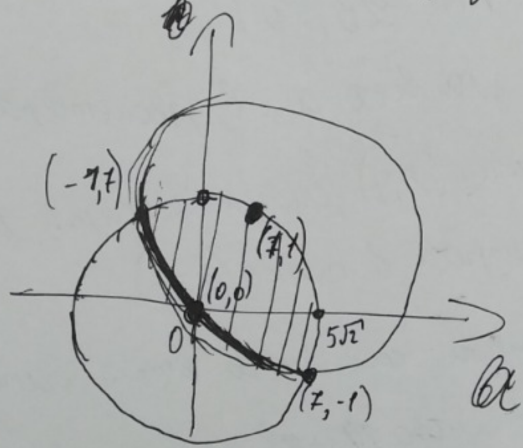
3) Решение нер-ва $a^2+b^2 \le 50$ это окружность в т. $(0,0)$ и радиусом $5\sqrt{2}$

4) $a^2+b^2 \le 14a+2b$ $\boxed{\text{ЧИСТОВИК}}$ 4 из 4

$a^2-14a+b^2-2b-49-1+50 \le 0$

$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$

Решение этого нер-ва это окр-сть с центром в точке ~~[illegible] и рад~~ $(7;1)$ и радиусом $5\sqrt{2}$



Все решения лежат в закрашенной области.

Не сложно посчитать, что там лежат следующие точки:

~~ЧИСТОВИК~~ ЧЕРНОВИК

№ 1.

$8 \neq a_1$

$S_{15} = (a_1 + 7d) \cdot 15$

$a_2 = a_1 + d$

$\vdots$

$a_7 = a_1 + 6d$

$\vdots$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$\vdots$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 15a_1 + 105d - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 11d) > 15a_1 + 105d + 4$

Из условия следует:

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ 15a_1 + 105d + 4 > a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 \end{cases}$$

Т.к. обе части нер-в положительны, сложим:

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1d} + 90d^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{105d} + 4 > \cancel{15a_1} + \cancel{105d} - 24 + \cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1d} + 110d^2$

$90d^2 + 4 > 110d^2 - 24$

$28 > 20d^2$

$d^2 < \frac{28}{20}$

21102360 (U372930 M1299387)

ЧЕРНОВИК

Заметим, что при $d \geq 2$: $d^2 \geq 4$, а т.к. у нас возрастающая арифм. прогр. состоит из целых чисел, то $d = 1$

$$a_1^2+21a_1+90 > 15a_1+\cancel{109}\,81$$

$$a_1^2+21a_1+1\cancel{10} < 15a_1+109$$

$$a_1^2+6a_1+1<0$$

$$D=36-4=32=4\sqrt{2}$$

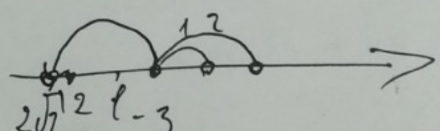
$$x_1=\frac{-6+4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}-3$$

$$x_2=\frac{-6-4\sqrt{2}}{2}=-3-2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a+1<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ (a_1-2\sqrt{2}+3)(a_1+2\sqrt{2}+3)<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}) \end{cases}$$



т.к. $2<2\sqrt{2}<3$, то a_1

$$a^2-14a+49+b^2-2b+1-50$$

$$(a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50$$

21102360 (U372930 M1299387)

ЧЕРНОВИК 1 из

№1

$S_{15} =$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

$S_{15} = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

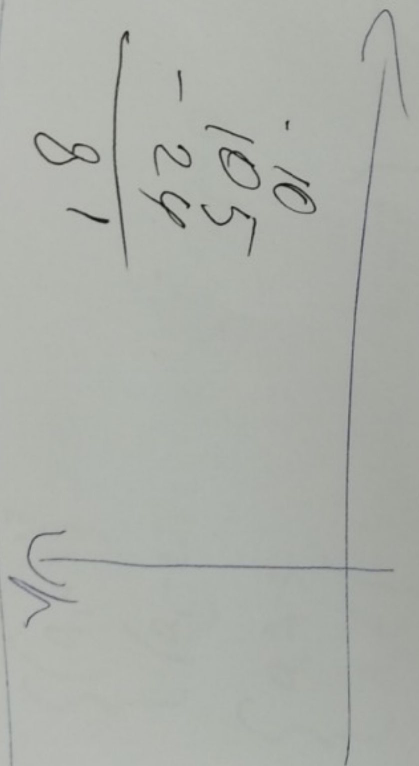
$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) = \dfrac{2a_1+14d}{2} \cdot n - 24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) = (a_1+7d)15+4 \end{cases}$$

$a^2 + 15da + 6da + 90d^2 = (a_1+7d) \cdot 15 - 24$

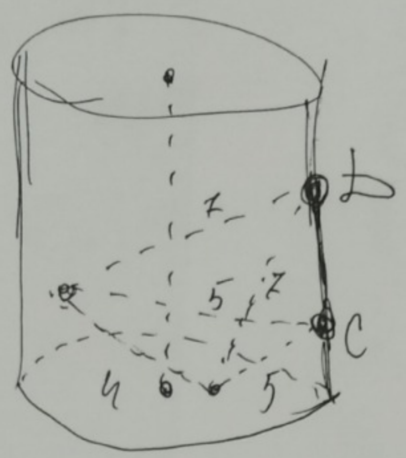
$a_1^2 + 10a_1d + 11a_1d + 110d^2 = (a_1+7d) \cdot 15 + 4$

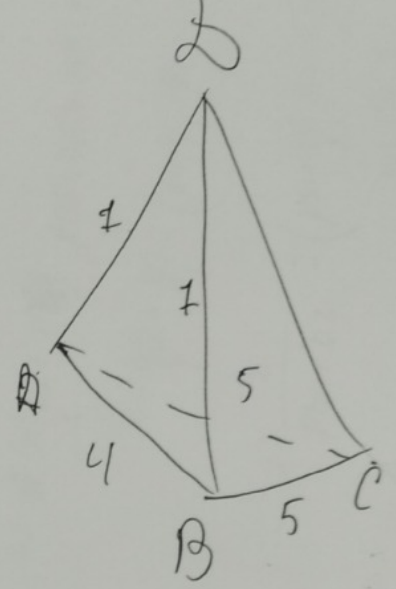
$-20d^2 = -28$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \cdot\ 105 \\ -\ 24 \\ \hline 81 \end{array}$$



$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 50 \\ a^2 + b^2 \le \min \end{cases}$$

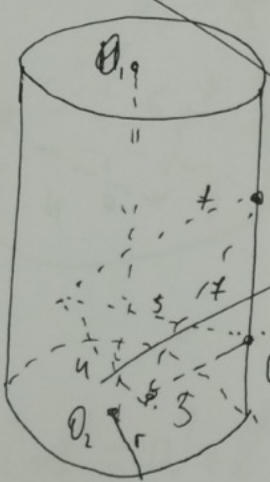




$a^2+b^2=a^2+b^2-14a-2b$

ЧЕРНОВИК

№2.



т.к. радиус минимальный, тогда C и D максимально удалены от друг друга

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102360**

ID профиля: **372930**

Вариант 22

ЧИСТОВИК

№4.

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=14 & (1) \\ НОК(a,b,c)=2^{17}\cdot 7^{18} & (2) \end{cases}$$

т.к. $НОК(a,b,c)=2^{17}\cdot 7^{18}$, то:

$$\begin{cases} a=2^{x}\cdot 7^{e} \\ b=2^{y}\cdot 7^{d} \\ c=2^{z}\cdot 7^{f} \end{cases}$$ где $0\le x,y,z\le 17$

$0\le e,d,f\le 18$

т.к. $НОД(a,b,c)=14=2\cdot 7$

то $x,y,z,d,e,f\geq 1$

Из условий (1) и (2) следует что среди x,y,z одно число равно 17, ~~3~~ одно равно 1, а одно равно α, причём $\alpha\in[1;17]$. Точно также среди d,e,f одно равно 18, одно равно [illegible] 1, а одно равно β, причём $\beta\in[1;18]$

Тогда кол-во троек равно кол-ву перестановок x,y,z и d,e,f, т.е. $17,1,\alpha$ и $18,1,\beta$. ~~Таких перес~~ Перестановок для x,y,z $3!$, но ~~вари~~ для каждой перестановки есть 17 вариантов значений α. Тогда всего вариантов x,y,z $(3!\cdot 17-6)$. Почему -6? В случае когда $\alpha=1$, у нас только 3 различных случая, [illegible] т.к. [illegible] при $\alpha=1$ варианты $1,\alpha,17$ и $\alpha,1,17$ одинаковы. Значит у нас 3 разных варианта $(1,1,17)$; $(1,17,1)$; $(17,1,1)$. Точно также для случая $\alpha=17$.

Итог: Перестановок x,y,z $3!\cdot 17-6=96$

Аналогично перестановок e, d, f: ЧИСТОВИК 2 из 4

$3! \cdot 18 - 6 = 102$

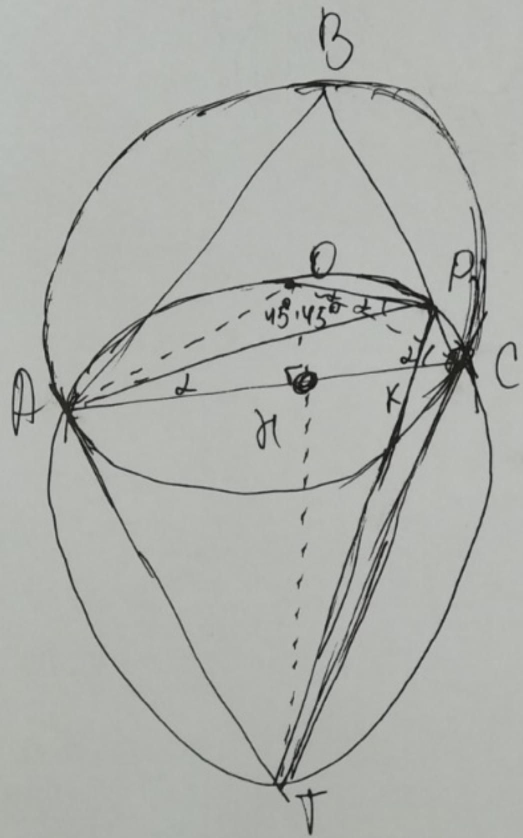
Для каждого варианта перестановки x, y, z есть 102 варианта перестановки d, e, f. Следовательно, всего вариантов:

$96 \cdot 102 = 9792$

$\boxed{\text{Ответ: } 9792}$

ЧИСТОВИК 3 из 4.

№6. а)



1) $\angle OAT + \angle OCT = 90° + 90° = 180°$

$\Downarrow$

$AOCT$ - вписаный $\Rightarrow$ T лежит на окружности описанной вокруг $\triangle AOC$

~~$S_{\triangle KPC}$~~

$\angle APC = 180 - 2\alpha \Rightarrow$

$\angle ACT = 2 \angle APC$

$OATC$ - квадрат

$S_{\triangle APK} = 7$

$S_{\triangle CPK} = 5$

$\left.\begin{matrix} CK = 5x \\ AK = 7x \end{matrix}\right\} HC = 6x \Rightarrow S_{\triangle HPC} = 6$

HP - ср. линия.

$S_{\triangle ABC} = 6 \cdot 4 = 24$

21102360 (U372930 M1299388)

ЧИСТОВИК 4 из 4.

№5.

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$,

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2}$

21102360 (U372930 M1299388)

ЧЕРНОВИК

1 | 18

т.к. НОД$(a,b,c) = 2\cdot 7$, ~~x,y,z~~

то $x, y, z, d, e, f \geq 1$

a. из (1) и (2) следует что среди x, y, z один обязательно равен 17, один равен 1, а ~~треч~~ оставшийся лежит на отрезке $[1; 17]$ $\alpha \in [1;17]$. И среди d, e, f один равен 18, один равен 1, а один $[1; 18]$ $\beta \in [1;18]$

~~Значит~~ Тогда кол-во троек равно кол-ву перестоновок $x\,y\,z$ и $d\,e\,f$, т.е. $17, 1, \alpha$ и $18, 1, \beta$ Причём вариантов α - 17 штук, вариантов β - 18 штук. перестоновок 3 чисел вариантов $(3!\cdot 17 - 6) + (3!\cdot 18 - 6)$ Мы вычитаем 2, т.к. ~~мы дважды посчитали 2 варианта ко ситуации при $\alpha=1$~~ в ситуациях типа $\alpha = 1$ ~~каждую ситуацию перестановок x, y, z посчитали дважды, а также пересогн потому что при α~~ перестоновок не $3!$, а $3!/2$ т.к. ~~тогда~~ например при $\alpha = 1$ ситуации $1, \alpha, 17$ и $\alpha, 1, 17$ одинаковы

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 6 \\ \hline 96 \end{array}$$

$96 + 6 = 102$

$$\begin{array}{r} 96 \\ +\ 96 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9600 \\ +\ 192 \\ \hline 9792 \end{array}$$

21102360 (U372930 M1299388)

$\boxed{\text{ЧЕРНОВИК}}$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 14 \quad (1) \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (2) \end{cases}$$

$a \vdots 2 \cdot 7^k$

$b \vdots 7 \cdot 2^l$

$c \vdots 2^{\cancel{x}} \cdot 7^{\cancel{y}}$

либо x и y = 17 и 18 $\Rightarrow$ k и l < 17 и 18

если $a = 14$, то вариантов для b и c = $17 \cdot 18 \cdot 2$

~~если $a \vdots 2 \cdot 7^k$~~

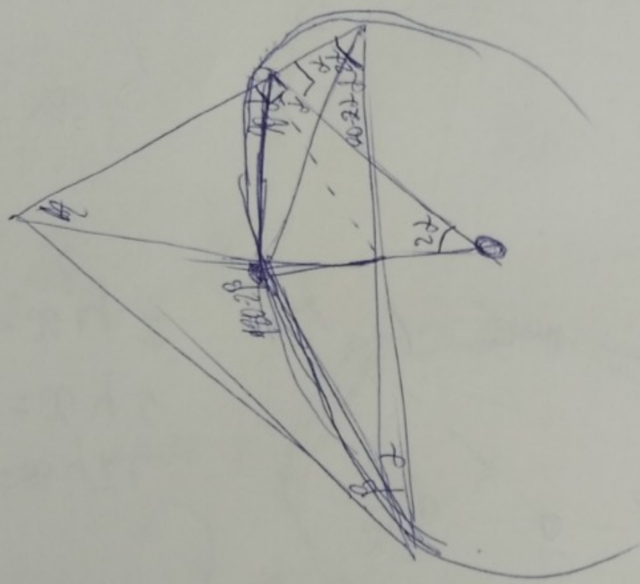
т.к. $\text{НОК}(a,b,c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$, то

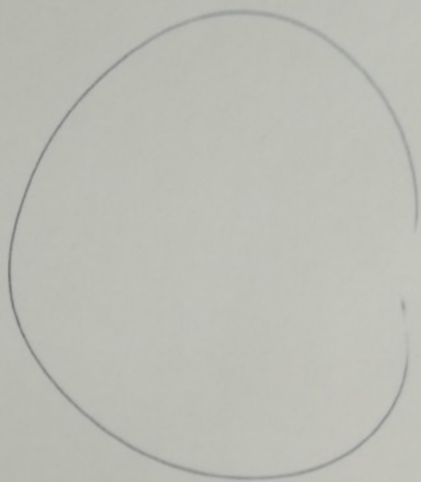
$$\begin{cases} a = 2^x \cdot 7^e \\ b = 2^y \cdot 7^d \\ c = 2^z \cdot 7^f \end{cases}$$

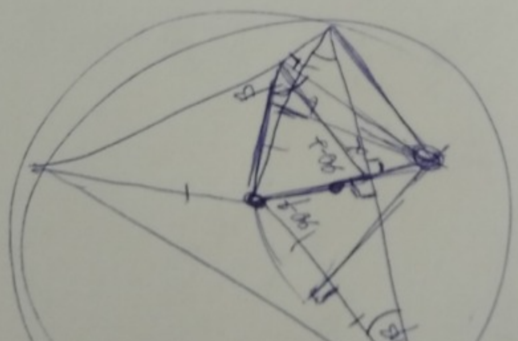
где $0 \le x, y, z \le 17$

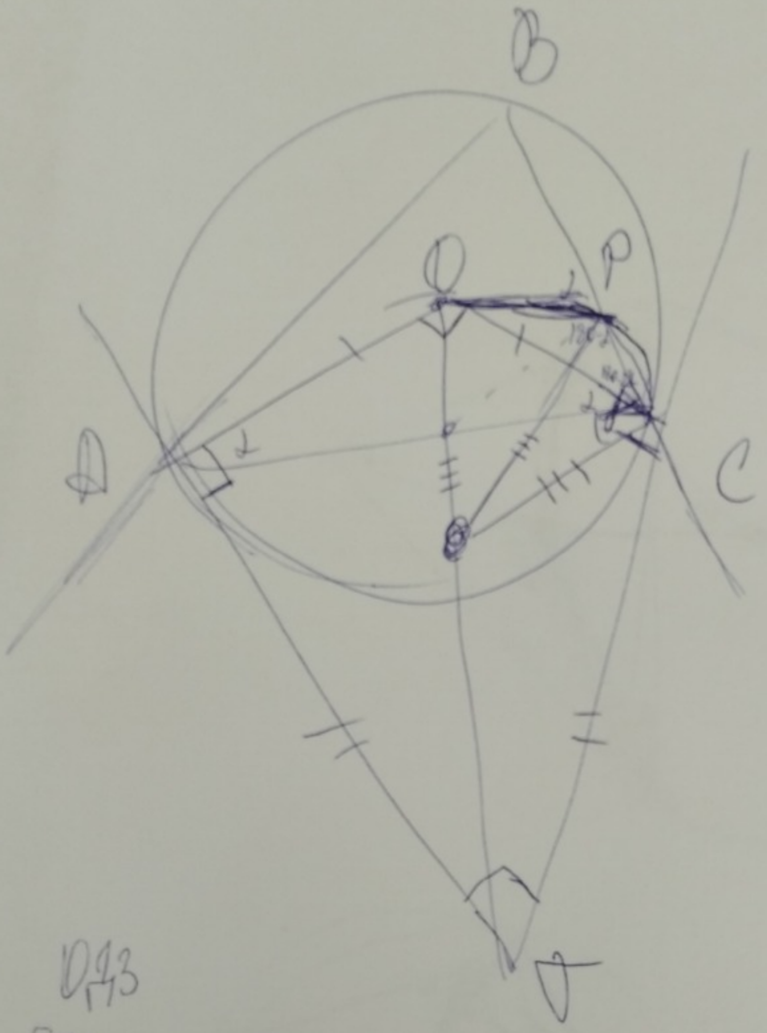
$0 \le e, d, f \le 18$

21102360 (U372930 M1299388)









D,13

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2}+4\neq 1 \\ \frac{x}{2}+4\neq 0 \\ \frac{\cancel{11}x}{2}>\frac{\cancel{11}}{4} \\ \frac{3x}{2}-6\geq 0 \\ \frac{x}{2}+1 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right.$$