Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102351**

ID профиля: **378006**

Вариант 22

Чистовик.

Пусть d - разность прогрессии. Так как a_1 и (a_1+d) - целые числа, то d - целое, при этом $d \geq 1$.

По условию

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S-24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S+4 \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > S-24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < S+4 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2+21a_1d+90d^2 > S-24 \\ a_1^2+21a_1d+110d^2 < S+4 \end{cases}$$

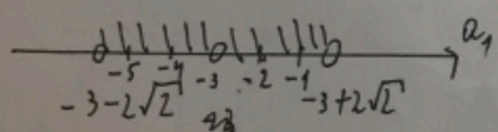
$$\begin{cases} -a_1^2-21a_1d-90d^2 < 24-S \\ a_1^2+21a_1d+110d^2 < S+4 \end{cases}$$

Складывая обе строчки получаем: $20d^2 < 28$ $\quad d^2 < \frac{14}{10}$ С учётом того, что d - целое и $d>0$, получаем, что $d=1$ единственно возможный вариант.

$$S = \frac{a_1+a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{a_1+a_1+14d}{2} \cdot 15 = (a_1+7d) \cdot 15 = (a_1+7) \cdot 15 = 15a_1 + 105$$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1+90 > 15a_1+105-24 \\ a_1^2+21a_1+110 < 15a_1+105+4 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2+6a_1+9 > 0 \\ a_1^2+6a_1+1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1^2+6a_1+1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1^2+6a_1+1 < 0 \end{cases}$$



Получается, что a_1 может принимать значения $-1; -2; -4; -5$

Ответ: $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

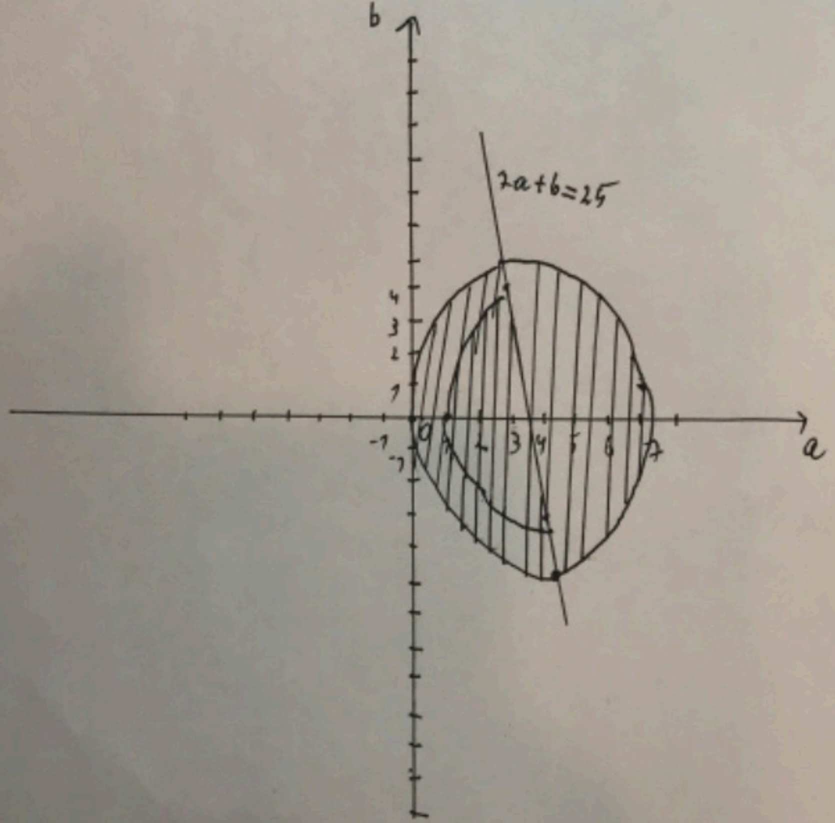
1

Чистовик

2

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;50) \end{cases}$

$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;50) \end{cases}$



Исходное утв. равносильно тому, что существует $x;y$ для которых выполнена система:

$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;50) \end{cases}$

Если $7a+b \le 25$, то система приобретает вид

$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases}$

Если ~~a~~ $7a+b > 25$, то система принимает вид:

$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$

чистовик 3

Получилась фигура, образованная двумя ~~полу~~ частичными окружностями

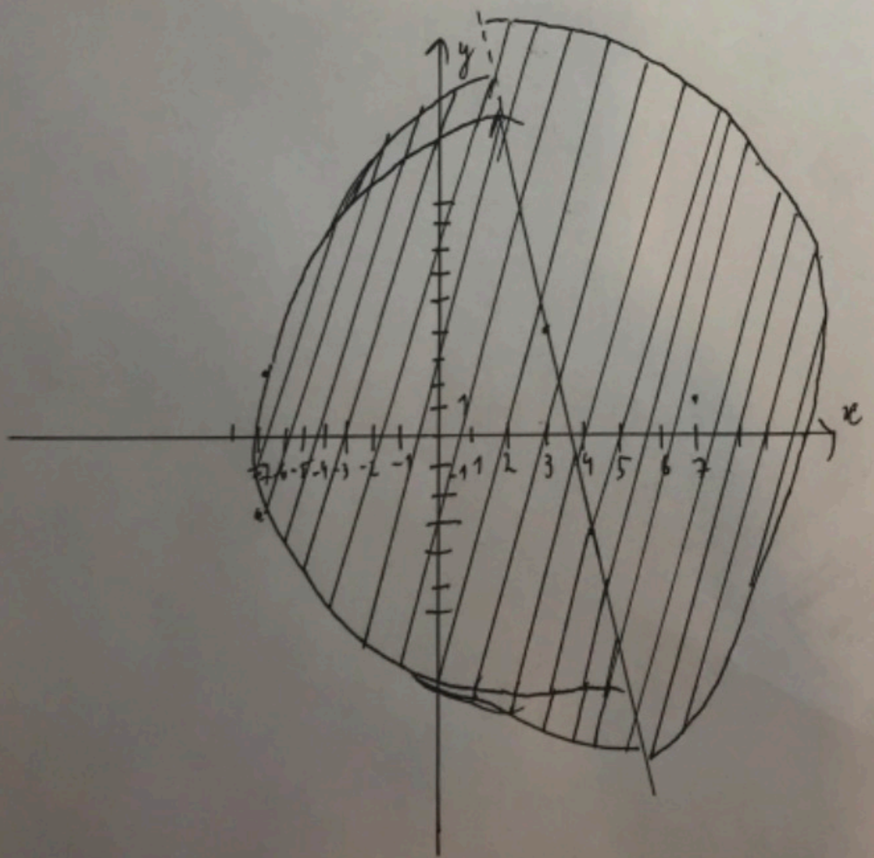
Для того, чтобы система имела 2 решения необходимо, чтобы окружность $(a-x)^2+(b-y)^2=50$ касалась или пересекала данную фигуру

Если две окружности касаются или пересекаются, то расстояние между их центрами $d \leq R_1+R_2$

I случай: окружность $w((a-x)^2+(b-y)^2=50)$ пересекает (или касается нижней ~~полу~~ частичн. окружности), тогда $(x-7)^2+(y-1)^2 \leq \cancel{20} (5\sqrt{2}+5\sqrt{2})^2$

$(x-7)^2+(y-1)^2 \leq 200$. В этом случае $7x+y \leq 25$

II случай окружность w пересекает (или касается) верхней ~~полу~~ частичн. окружности, тогда $x^2+y^2 \leq 200$ $7x+y>25$



Фигура, образованная двумя ~~полу~~ частич. окружностям является фигурой

черновик.

S - сумма первых 15 членов.

$a_1; a_2; a_3; \ldots\ a_{15}.$

~~[illegible]~~ $a_7 = a_1 + 6d \quad a_{16} = a_1 + 15d$

~~[illegible]~~ $a_7 \cdot a_{16} = (a_1+6d)(a_1+15d) =$

$a_1^2 + 15a_1d + 6a_1d + 9d^2$

$d > 0$

$S = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{a_1 + a_1 + 14d}{2} \cdot 15$

$(a_1 + 7d)\,15$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$a_7 \cdot a_{16} = (a_1+6d)(a_1+15d)$

$a_{11} \cdot a_{12} = (a_1+10d)(a_1+11d)$

$(a_1+6d)(a_1+15d) > (a_1+7d) \cdot 15 - 24$

$(a_1+10d)(a_1+11d) < (a_1+7d) \cdot 15 + 4$

$\boxed{a_7 \cdot a_{16} = a_1^2 + 21a_1d + 90d^2}$

$\boxed{a_{11} \cdot a_{12} = a_1^2 + 21a_1d + 110d^2}$

$a_1^2 + 11a_1d + 10a_1d + 110d^2 < 15a_1$

$S = \frac{a_1 + a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = 15(a_1 + 7d)$

$\boxed{a_{11} \cdot a_{12} > a_7 \cdot a_{16}}$

$S + 4 > a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$20d^2$

$d = 1$

$a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24$

$a_1^2 - 15a_1 + 21a_1d - 105d + 90d^2 > 0$

$a_1(a_1 - 15 + 21d)$

$a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 <$

$$\begin{cases} -a_1^2 - 21a_1d - 90d^2 < 24 - S \\ a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < S + 4 \end{cases}$$

$20d^2 < 28 \quad d^2 < \frac{28}{20} = 1{,}4$

$d = 1$

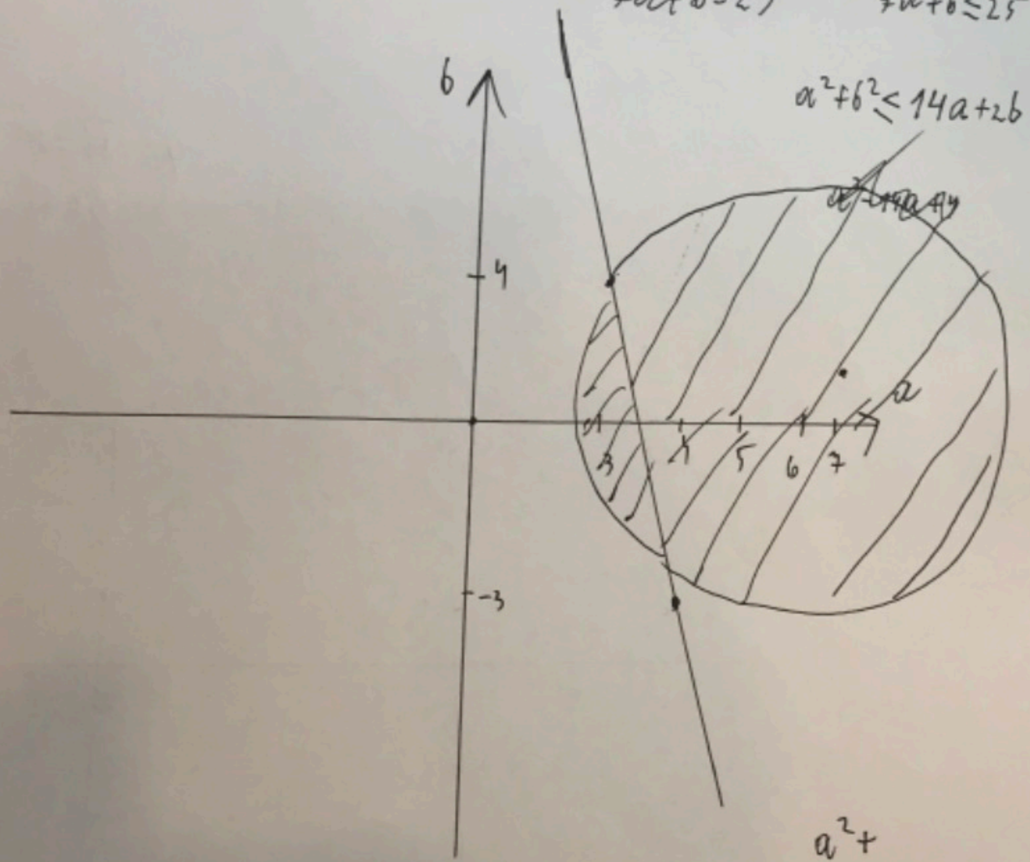
21102351 (U378006 M1300161)

Черновик

$14a+2b\le 50$

$7a+b=25$ $\qquad$ $7a+b\le 25$

$a^2+b^2\le 14a+2b$



a^2+

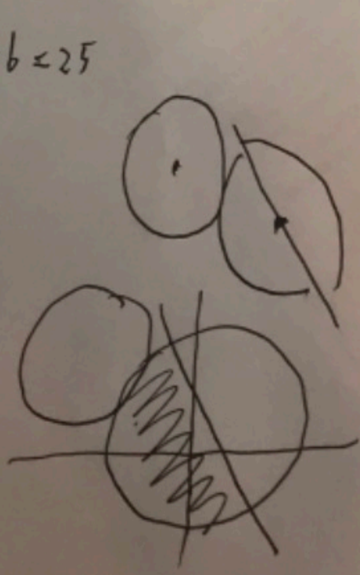
$$a^2-14a+49+b^2-2b+1\le 50$$

$$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50 \qquad 5\sqrt{2}<7{,}5$$

$$7a+b=25$$

$a=3$ $\qquad$ $b-1=\sqrt{34}$

$b=\sqrt{31}+1$



$(x-a)^2+(y-b)^2\le 50$

черновик.

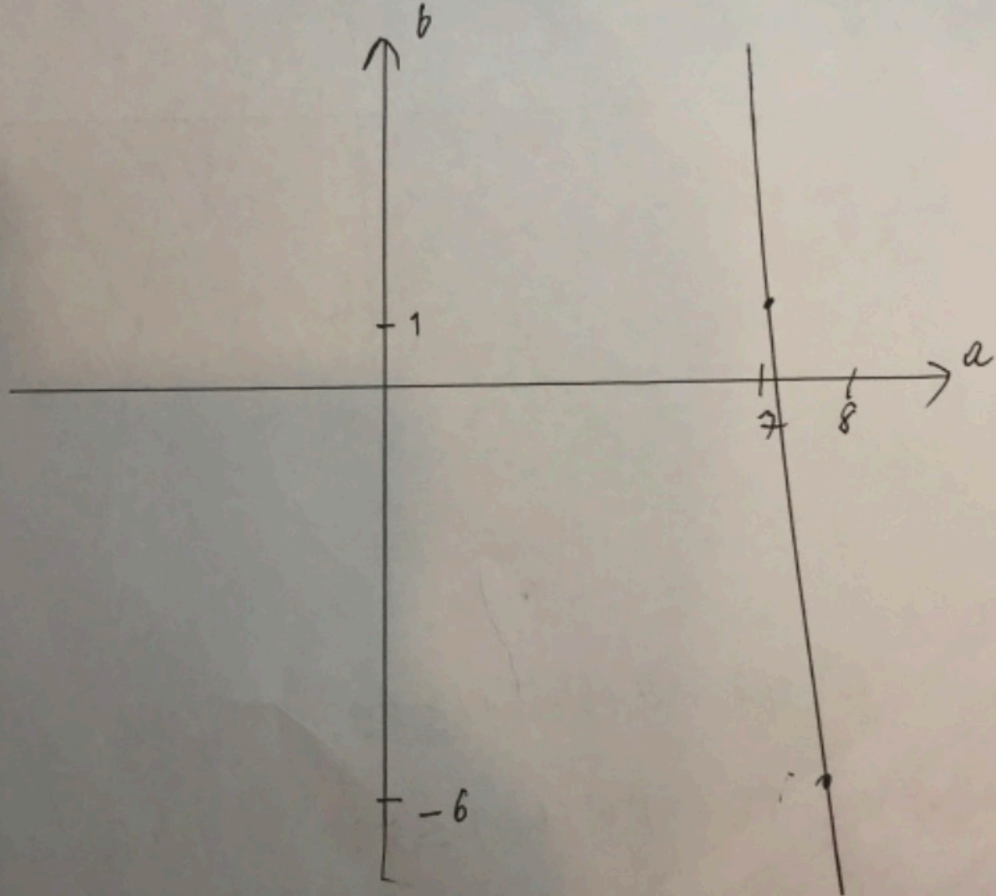
$a^2+b^2\le \min(14a+2b;50)$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b;50)\end{cases}$$

$14a+2b=50$

$7a+b-50=0$

$14a+2b$



черновик.

$a_n = a_1 + d(n-1)$

d - целое $\Rightarrow d \geq 1$

$a_7 \cdot a_{16} = (a_1+6d)(a_1+15d) = a_1^2 + 21da_1 + 90d^2$

$a_{11} \cdot a_{12} = (a_1+10d)(a_1+11d) = a_1^2 + 21da_1 + 110d^2$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$ $\boxed{-a_7 \cdot a_{16} < 24 - S}$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$S = \frac{a_1 + a_1 + 14d}{2} \cdot 15 =$

$(a_1 + 7d) \cdot 15.$

~~$-a_1^2 + 21a_1d$~~

$$\begin{cases} -a_1^2 - 21a_1d - 90d^2 < 24 - S \\ a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < S + 4 \end{cases}$$

$S = (a_1 + 7) \cdot 15 =$
$15a_1 + 105$

$20d^2 < 28$ $\quad d^2 < 1{,}4 \Rightarrow \boxed{d = 1}$

$$(1) \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109 \end{cases}$$

$105 - 24 =$
$100 - 24 + 5 =$
$86 + 5 = 91$

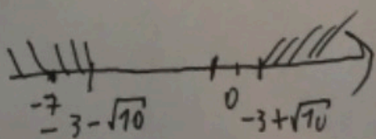
(1) $a_1^2 + 21a_1 > 15a_1 + 25 - 24 > 0$

$a_1^2 + 6a_1 - 1 > 0$

$D = 36 + 4 = (\sqrt{40})^2 = (2\sqrt{10})^2$

$a_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{10}}{2} = -3 + \sqrt{10}$

$a_2 = -3 - \sqrt{10}$



$-3 - \sqrt{10} \vee -7$

$-\sqrt{10} \vee -4$

$-\sqrt{10} > \vee -4$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$ $\quad D = 36 - 4 = 32 = 4\sqrt{2}$

$a_1 = \frac{-6 + 4\sqrt{2}}{2} = -3 + 2\sqrt{2}$

$a_2 = -3 - 2\sqrt{2}$

черновик

$D = 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2$

$a_1 = \frac{-6+4\sqrt{2}}{2} = -3 + 2\sqrt{2} \approx -0,01.$

$a_1 = -3 - 2\sqrt{2} \approx -5,8$

$-1; -2; -4; -5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102351**

ID профиля: **378006**

Вариант 22

чистовик. ①

1.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14=2\cdot 7 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

Как известно, в НОК входят максимальная степень простых делителей чисел $a;b;c$, а значит, если одно из чисел $a;b;c$ содержало бы ненулевую степень простого числа p^{v} (отличного от 2 или 7); то p в этой степени входило бы в НОК (в макс. степени, если таковых чисел несколько), а т.к. в $НОК(a;b;c)$ входят только степени двойки и семёрки, то числа $a;b;c$ имеют в разложении на простые множители только степени 2 и 7.

Пусть $a=2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$; $b=2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$; $c=2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$ $(\alpha_1;\alpha_2;\beta_1;\beta_2;\gamma_1;\gamma_3\in \mathbb{Z}$; $\alpha_1;\alpha_2;\beta_1;\beta_2;\gamma_1;\gamma_2\geqslant 0)$

Тогда по условию $min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1$; $min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1$ $max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=17$; $max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=18$

* Рассмотрим числа $\alpha_1;\beta_1;\gamma_1$; По условию два из этих чисел уже заданы (1 и 17), а значит задать два числа с фиксированным значением можно $3\cdot 2=6$ способами. При этом третье число может принимать целые значения из промежутка $[1;17]$, а значит всего троек $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ $6\cdot 17$ (~~[illegible]~~) При этом заметим, что наборы троек в которых два числа равны 2 или 17 мы посчитали дважды (когда „зафиксировали" первое число и когда „зафиксировали" второе число), а значит разных троек $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ $6\cdot 17-12=6\cdot(17-2)=90$

Похожими рассуждениями получаем, что разных троек $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ $18\cdot 6-12=$ $=6(18-2)=6\cdot 16=96.$

Значит всего [illegible] $96\cdot 90$ **Ответ**: $96\cdot 90=8640$

Чистовик. 2

№5.

Пусть два равных числа равны a, тогда третье число равно $(a-1)$

Заметим, что произведение всех трёх чисел равно 4; значит

$a\cdot a(a-1)=4$ $\quad a^3-a^2-4=0$ $\quad (a-2)(a^2+a+2)=0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}(a-2)=0\\ (a^2+a+2)=0\end{array}\right.$$

Уравнение $a^2+a+2=0$ не имеет корней ($D=1-8<0$); значит одно из чисел обязательно равно ~~2~~. 1 $((a-1)=2-1=1)$

1) $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=1$

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$$

$$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$$

$$x^2+4x+4=14x-17$$

$$x^2-10x+21=0$$

$$\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=7\end{array}\right.$$

При $x=3$ $\quad \frac{3x}{2}-6<0$, а значит $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ не определён.

При $x=7$ получаются числа

$\log_{(\frac{9}{2})^2}\left(\frac{9}{2}\right)^2$; $\log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{9}{2}\right)^2$; $\log_{\sqrt{\frac{9}{2}}}\left(\frac{9}{2}\right)$; значит $x=7$ подходит чистовик 3

2) $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{3x}{2}-6$

$x^2+4x+4=6x-24$

$x^2-2x+28=0$

$D=4-4\cdot 28<0$ решений нет.

3) $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=1$ Тогда либо $\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2$; либо $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2$;

во втором случае:

$\frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6$

$-x=-7$ $x=7$ – решение

в первом случае: $\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\left(\frac{x}{2}+1\right)^4$ и $\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\left(\frac{3x}{2}-6\right)^4$

Значит

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}+1=-\frac{3x}{2}+6 \quad (1)\\ \frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6 \quad (2)\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2x=5 \quad (1)\\ x=7 \quad (2)\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\ x=7\end{array}\right.$$

в (1) случае $\frac{3x}{2}-6=\frac{15}{4}-\frac{24}{4}<0 \Rightarrow \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ не определён.

Ответ: $x=7$

черновик.

$НОД(a;b;c) = 14 = 2\cdot 7$ $\qquad a;b;c \vdots 14$

$НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18}$ $\qquad a;b;c$

~~НОК(a;b)~~

$18\cdot 6 - 12 =$

$6(18-2) = 6\cdot 16 = 96$

1) случай $\quad a \vdots 2^{17}$. $\quad a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2} \quad b = 2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2} \quad c = 2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$

$НОД(a;b;c) = 14 = 2\cdot 7$ $\qquad \alpha_1 = 17 \quad \boxed{\beta_2 = 18}$

$a = 2^{17}\cdot 7^{\alpha_2}$ $\qquad 2^{17}\cdot 7^{18}$.

$\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1) = 1$

$\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2) = 1$ $\qquad \alpha_1 = 17 \quad \beta_2 = 18$.

max

$2 \vdots \alpha_1;\beta_1;\gamma_1$

$7 \vdots \alpha_2;\beta_2;\gamma_2$

$a = 2^{17}\cdot 7^{\alpha_2} \quad b = 2^{\beta_1}\cdot 7^{18} \quad c = 2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$.

$\alpha_2 \in \{1;2;3;\ldots 18\}$

$3\cdot 2\cdot 17$ $\qquad 3\cdot 2$

$\beta_1 \in \{1;2;3;\ldots 17\}$

$3\cdot 2\cdot 18$

$6^2\cdot 17\cdot 18$ $\qquad 6\cdot 17^2\cdot 18^2$

$\gamma_1 = \{1\ldots 17\}$

$\gamma_2 \in \{1\ldots 18\}$ $\qquad \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{17}$

$6\cdot 2 = 12$ $\qquad 2\ \underline{2}\ \underline{17}$

2 2 17 $\qquad$ 2 2 17 $\qquad 6\cdot 2 = 12$

2 2 17

2 17

2 2 17 $\qquad$ ~~6+6~~ $\qquad$ 2 2 17

17 2 2

17 2 2 $\qquad$ 2 2 17

21102351 (U378006 M1300162)

черновик.

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})$

$98-17=8$

$4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}(\frac{3x}{2}-6)$

$(\frac{9}{2})^2=\frac{81}{4}$

$a\ ;\ a\ ;\ (a-1)$

$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{3x}{2}-6.$

$2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}(\frac{x}{2}+1)$

$x^2+4x+4=6x-24$

$\log_a b \quad \log_b c \quad \log_c a.$

$x^2-2x+28=0$

D

$3x>12$

$x>4$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}) \quad 4\log$

$\frac{21}{2}-6=\frac{9}{2}.$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)}\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}} \quad 2\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}(\frac{3x}{2}-6) \quad 2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}(\frac{x}{2}+1)$

$D=1-8<0$

$a\ ;\ a\ ;\ a-1$

$(a^2+a+2)(a-2)$

$a^2(a-1)=4$

$a^3+a^2+2a-2a^2-2a-4$

D

$a^3-a^2-4=0$

a^3-a^2-4

$a=2$

$a^3-a^2-4 \mid (a-2)$, $a^3-2a^2 \mid a^2$

$8-4-4=0$

$a^3-a^2+0\cdot a-4 \mid (a-2)$

$a^3-2a^2 \mid a^2+a+2$

$39+17$

$a^2+0\cdot a$

a^2-2a

$2a-4$

$2a-4$

0

$14=\frac{56}{4}$

$(\frac{3x}{2}-6)^2=\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}$

$t>2$

$a=\sqrt[3]{\frac{7}{81\cdot 4}}$

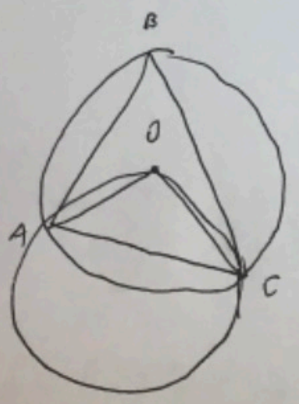
$(3t-6)^4=7t-\frac{17}{4}$

$81(\frac{t}{3}-2)^4=7(t-2)+\frac{39}{4}$

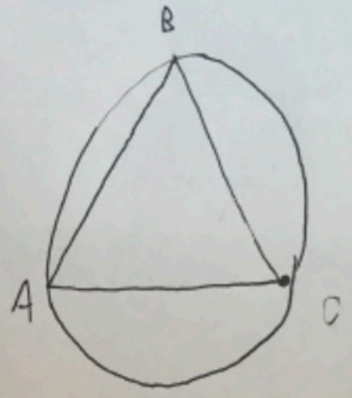
$4\cdot 81a^3-7$

21102351 (U378006 M1300162)

черновик.



$$\begin{array}{r} \overset{5}{96} \\ \times\ 90 \\ \hline 864 \end{array}$$



$96 \cdot 9 = (100-4) \cdot 9 =$

$000 - 36 =$

864

8640

$96 \cdot 90 =$

$(100-4) \cdot 90 =$

$9000 - 360 =$

8640