Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102319**

ID профиля: **89875**

Вариант 22

Чистовик

№1

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} = a_1 + a_1 + q + \ldots + a_1 + 14q = \frac{(2a_1 + 14q)15}{2} = (a_1 + 7q)15$

$\begin{cases} a_7 a_{16} = (a_1 + 6q)(a_1 + 15q) > S - 24 \\ a_{11} a_{12} = (a_1 + 10q)(a_1 + 11q) < S + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1q + 90q^2 > 15a_1 + 105q - 24 \\ a_1^2 + 21a_1q + 110q^2 < 15a_1 + 105q + 4 \end{cases}$

$a_1^2 + 21a_1q + 90q^2 + 28 > 15a_1 + 105q + 4 > a_1^2 + 21a_1q + 110q^2$

$28 > 20q^2$

$7 > 5q^2$

$q^2 < \frac{7}{5}$

так как все числа прогрессии - целые, то $q = a_{i+1} - a_i = \mathbb{Z} - \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

Значит, $q = \{-1; 0; 1\}$

так как прогрессия возрастающая, то $a_{i+1} > a_i \Leftrightarrow a_i + q > a_i \Rightarrow q > 0$

Значит, $q = 1$. Подставим.

$\begin{cases} S = 15a_1 + 105 \\ a_7 a_{16} = a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \\ a_{11} a_{12} = a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109 \end{cases}$

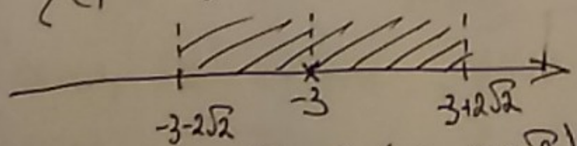
$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$

$-5 > -3 - 2\sqrt{2} > -6$

$0 > -3 + 2\sqrt{2} > -1$

$\begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ (a_1 + 3)^2 - (2\sqrt{2})^2 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 \neq -3 \\ (a_1 + 3 - 2\sqrt{2})(a_1 + 3 + 2\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$



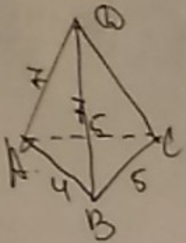
$\Rightarrow a_1 \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3) \cup (-3; -3 + 2\sqrt{2})$

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 = \{-5; -4; -2; -1\}$

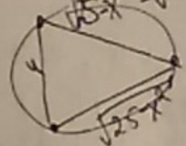
Ответ: $-5; -4; -2; -1$

цилиндра никак не

Черновик №2



$\sqrt{25-x^2}=\sqrt{49-(CD-x)^2}$



$\sqrt{25-x^2}=\sqrt{49-CD^2+2x\,CD-x^2}$

$25-\cancel{x^2}=49-CD^2+2x\cdot CD-\cancel{x^2}$

$24+2x\cdot CD-CD^2=0$

Рассмотрим BCD:

Найти: BK=?

$BC=5;\ BD=7$

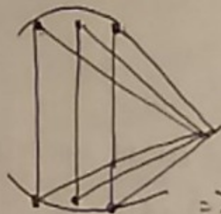
$CD=y$

$P(BCD)=6+\frac{y}{2}$

$S(BCD)=\sqrt{\left(6+\frac{y}{2}\right)\cdot\left(6-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y}{2}+1\right)\left(\frac{y}{2}-1\right)}$

$BH=\frac{2S(\triangle BCD)}{CD}=\frac{2S}{y}=\frac{2\sqrt{\left(3y+6+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}\right)\left(3y-6+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{4}\right)}}{y}$

$CD=DH+HC$ или $CD=DH-HC$



$25-x^2=16$

$x=3$

$\Rightarrow \triangle AHB$ - р/с

$BH=4=AH$

Черновик | $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = 15a_1 + \dots$

$a_7 a_{16} = (a_1 + 6d)(a_1 + 15d)$

$a_{11} a_{12} =$

Черновик

№2

Черновик | $a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} = 15a_1 + q + 2q + \ldots + 14q = \frac{(2a_1 + 14q) \cdot 15}{2} = S$

$a_7 a_{16} = (a_1 + 6q)(a_1 + 15q) > S - 24$ $\qquad S = (a_1 + 7q)15$

$a_{11} a_{12} = (a_1 + 10q)(a_1 + 11q) < S + 4$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1q + 90q^2 > 15a_1 + 105q - 24 = 15a_1 + 105q + 4 - 28 \\ a_1^2 + 21a_1q + 110q^2 < 15a_1 + 105q + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1q + 90q^2 + 28 > 15a_1 + 105q + 4 \\ 15a_1 + 105q + 4 > a_1^2 + 21a_1q + 110q^2 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1q} + 90q^2 + 28 > \cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1q} + 110q^2$

$28 > 20q^2$

$7 > 5q^2$

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ по усл. $\Rightarrow q \in \mathbb{Z}$

$q^2 < \frac{7}{5}$

$q = \{0, 1, -1\}$ $\Rightarrow q = \pm 1$

q не м.б.

$a_{i+1} > a_i \Rightarrow q > 0$

$q = 1$

$\Rightarrow S = (a_1 + 7)15 = 15a_1 + 105$

$$\begin{cases} a_7 a_{16} = (a_1 + 6)(a_1 + 15) > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_{11} a_{12} = (a_1 + 10)(a_1 + 11) < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

$D = 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2$

$a_1 = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ (a + 3 + 2\sqrt{2})(a + 3 - 2\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$$

$-3 - 2\sqrt{2} < -3$

$-1 < -3 + 2\sqrt{2} < 0$

$-3 - 2\sqrt{2} \lor -6$

$-2\sqrt{2} \lor -3$

$3 \lor 2\sqrt{2}$

$9 > 8$

$-3 - 2\sqrt{2} \lor -4$

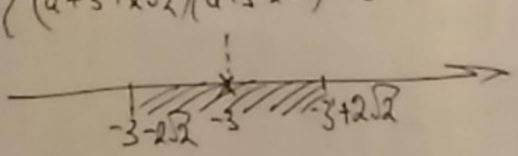
$-2\sqrt{2} \lor -1$

$1 \lor 2\sqrt{2}$

$-3 - 2\sqrt{2} \lor -5$

$-2\sqrt{2} \lor -2$

$2 < 2\sqrt{2}$



$a_1 = -5; -4; -2; -1$

черновик | №3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,\ 50)\end{cases}$$

1) $$\begin{cases}7a+b<25\\ (x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 14a+2b\ (3) <50\end{cases}$$

$a^2+b^2-14a-2b<0$

$\varnothing$

3: $a^2-14a+49+b^2-2b+1\le 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$ ← круг с центром $(7;1)$ и радиусом $5\sqrt{2}$

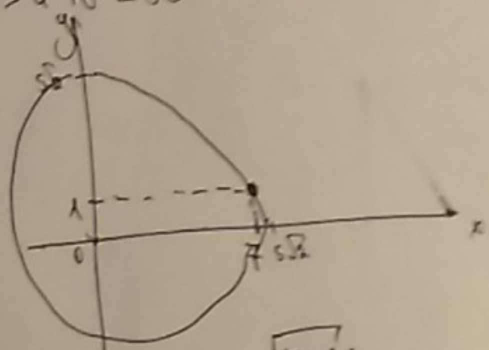
2) ~~7a+b~~

$7a+b<25 \Rightarrow 14a+2b<50 \Rightarrow a^2+b^2<50$

$x^2+y^2-ax-by<0$

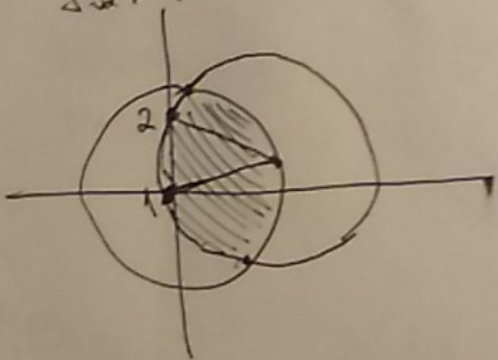
$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

$a^2+b^2<50$



$\sqrt{49+1}=$

$5\sqrt{2}>7$



$\Leftarrow 7a+b\ge 25$

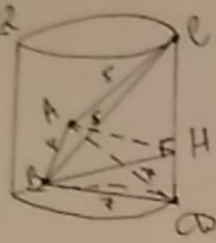
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\\ 7a+b\ge 25\end{cases}$$

$a^2+b^2\le 50\le 14a+2b$

$$\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\end{cases}$$

Чистовик

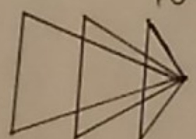
№2



Так как высота цилиндра никак не влияет на радиус окружности основания, то отсечём цилиндр так, чтобы максимальное количество вершин тетраэдра лежало на основаниях цилиндра, при сохранении целостности тетраэдра. То есть при данном случае обрезаем до того, как точки C и D стали лежать на основаниях.

Так как $AC = BC = 5$ и $AD = BD = 7$, CD — общая сторона, значит, что $\triangle CAD = \triangle CBD$. Проведём высоты в этих треугольниках: AH и BH_1. По т. Пифагора $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25 - AH^2} = \sqrt{25 - BH_1^2} = \sqrt{BC^2 - BH^2} = CH_1$. Так как высоты треугольников соответственно равны (из рав-ва $\triangle CAD$ и $\triangle CBD$). Значит, точки H и H_1 совпадают. Т.е. $CH \perp BH$ и $CH \perp AH$. Значит, $CH \perp (ABH)$ по признаку. Так как $CD \parallel$ оси цилиндра, то плоскость (ABH) — плоскость сечения цилиндра, параллельная плоскостям его оснований. Значит, сечением этой плоскостью цилиндра будет круг. (т.е. $\triangle ABH$ вписан в ...) Значит, радиус основания цилиндра зависит от $\triangle ABH$.

Даны равнобедренные треугольники AHB с фиксированным AB. Нужно найти минимальный радиус описанной около него окружности.



Угол $\angle AHB$ лежит на промежутке $(0; 180^\circ)$. Радиус описанной окружности можно найти из обобщ. т. синусов

$$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R$$

$\Rightarrow R = \min$ когда $\sin\angle AHB$ — максимальный. То есть $\angle AHB = 90^\circ$ т.к. $\sin\angle AHB \in (0; 1]$ и $\sin 90^\circ = 1$

Значит, $AH\sqrt{2} = AB = 4 \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}$

Отсюда по т. Пифагора в $\triangle BCH$ и $\triangle BHD$:

$\triangle BCH$: $\sqrt{25 - 8} = \sqrt{17} = CH$

$\triangle BDH$: $\sqrt{49 - 8} = \sqrt{41} = DH$

В задаче присутствует 2 случая в связи с расположением точек C и D относит. точки H (по одну сторону / по разные)

Ответ: $DC = DH \pm CH = \sqrt{41} \pm \sqrt{17}$

Часть 2

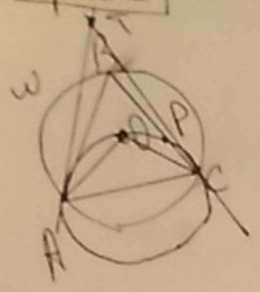
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

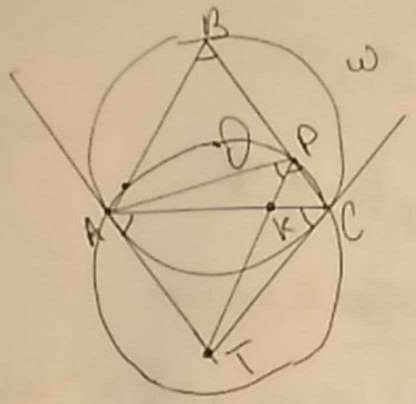
Шифр: **21102319**

ID профиля: **89875**

Вариант 22

Черновик





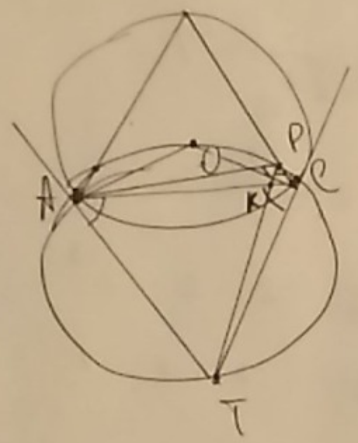
$S_\triangle(APK)=7$

$S(\triangle CPK)=5$

$\angle AOC=2\angle ABC$

$\angle ATC=180^\circ-2\angle ABC$

$\Rightarrow AOCT$ - вписан.



$S=\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\alpha$

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AO\cdot OB}{CO\cdot OD}$

$$\frac{S(\triangle APK)}{S(\triangle KPC)}=\frac{AP\cdot PK}{PK\cdot PC}=\frac{AP}{PC}=\frac{7}{5}$$

~~S(CPK)~~ $\frac{KC}{CP}=\frac{AK}{AP}$ $\qquad \frac{AK}{KC}=\frac{AP}{CP}=\frac{7}{5}$

$\frac{AC-KC}{KC}=\frac{7}{5}$

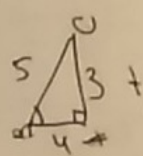
$\frac{AC}{KC}=\frac{12}{5}$ $\qquad KC=\frac{5}{12}AC$

$\triangle KPC\sim\triangle ABC$

$\Rightarrow S(\triangle ABC)=k^2\cdot S(\triangle KPC)=\frac{144}{25}\cdot 5=\frac{144}{5}=$

$=28{,}8$

$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. $AC=?$



$tg=\frac{3}{4}$

$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}AC\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot AB^2 tg\angle BAC=\frac{3}{8}AB^2=28{,}8$

Черновик

НОД $(a;b;c) = 14$

НОК $(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

$14 = 2 \cdot 7$

1) $2\cdot7 \quad 2\cdot7 \quad 2\cdot7 \quad \ldots 2^{14}\cdot7^{15}$

~~3 · кол-во вариантов различных~~

~~$abc = НОК \cdot НОД = 2^{16} \cdot 7^{13}$~~ ?

$2^{16}\,7^{18}$

$2\cdot7;\ 2^{17}\cdot7;\ 2\cdot7^{18}$

$3\cdot3$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right),\ \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2,\ \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$6\cdot(16\cdot17)+3\cdot$

~~$a = b = c + 1$~~

~~$a = \frac{1}{2\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{x}{2}+1\right)}$~~ ~~$b =$~~

по 2: $2 \quad 2 \quad 2^{18}$

по 7: $7 \quad 7 \quad 7$

$a = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$

$b = \frac{3x}{2} - 6$

$c = \frac{x}{2} + 1$

$a, b, c \neq 1$

$a, b, c > 0$

$4 \cdot 36 \cdot 16 \cdot 17$

$\log_{c^2} a,\ \log_{\sqrt{a}} b^2,\ \log_{\sqrt{b}} c$

$\frac{\log_c a}{2},\ 4\log_a b,\ 2\log_b c$

1) $\frac{\log_c a}{2} = 4\log_a b$

$\frac{1}{\log_a c} = 8\log_a b$

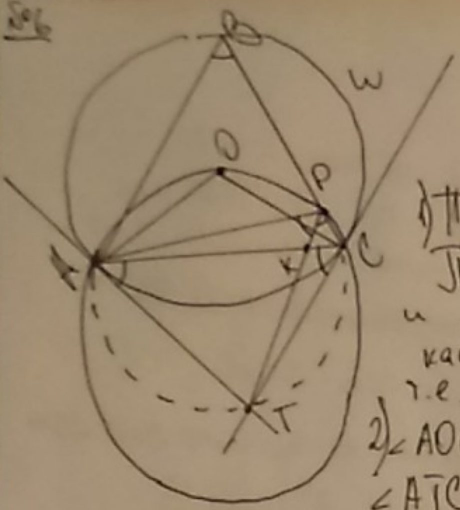
$\frac{1 - 8\log_a^2 b}{\log_a c} = 0$

```
  16
×17
 112
+16
 272
×36
1632
+816
9792
```

1)	1	2	3
2)	1	3	2
3)	2	1	3
4)	2	3	1
5)	3	1	2
6)	3	2	1

Чистовик

№6



$S(\triangle APK)=7$

$S(\triangle CPK)=5$

Решение:

1) Пусть $\angle ABC=\alpha$.

Тогда $\angle CAT=\angle ABC$ как угол между касательной и хордой. Также, $\angle ACT=\angle ABC$ как угол между касательной и хордой

т.е. $\angle CAT=\angle ACT=\alpha$

2) $\angle AOC=2\angle ABC=2\alpha$ как центральный угол в окр ω

$\angle ATC=180^\circ-\angle ACT-\angle CAT=180^\circ-2\alpha$ по сумме углов в $\triangle ATC$. Значит, $\angle AOC+\angle ATC=2\alpha+180^\circ-2\alpha=180^\circ$.

т.е. $AOCT$ – вписан. по признаку. (Точка T лежит на окр., опис. около $\triangle AOC$)

3) $\angle CAT=\angle CPT=\alpha$ как опир. на дугу $\smile CT$

$\angle APT=\angle ACT=\alpha$ как опир. на дугу $\smile AT$

Значит, $\angle APK=\alpha=\angle KPC$

4) Площади треугольников $\triangle APK$ и $\triangle KPC$ с равными углами $\angle APK=\angle KPC$ относятся как:

$$\frac{S(\triangle APK)}{S(\triangle KPC)}=\frac{AP\cdot \cancel{PK}}{\cancel{PK}\cdot PC}=\frac{AP}{PC}=\frac{7}{5}$$

5) По св-ву бисс. в $\triangle APC$:

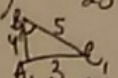
$$\frac{KC}{PC}=\frac{AK}{AP}\Rightarrow\frac{AP}{PC}=\frac{AK}{KC}=\frac{AC-KC}{KC}=\frac{AC}{KC}-1=\frac{7}{5}$$

$$\frac{AC}{KC}=\frac{12}{5}\Rightarrow\frac{KC}{AC}=\frac{5}{12}$$

6) $\angle KPC=\angle ABC=\alpha$; $\angle KCP\equiv\angle ACB\Rightarrow\triangle KPC\sim\triangle ABC$ по 2ум углам.

Значит, $\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle KPC)}=\left(\frac{AC}{KC}\right)^2=\frac{144}{25}\Rightarrow S(\triangle ABC)=\frac{144}{25}S(\triangle KPC)=\frac{144}{5}=28{,}8$

7) $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; $AC=?$



т.к. $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, то $\angle BAC=90^\circ$ из Пифагоровой тройки.

Тогда, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{\frac{1}{2}AC^2}{\operatorname{tg}\angle ABC}=\frac{1}{2}AC^2\operatorname{ctg}\angle ABC=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}AC^2=\frac{2}{3}AC^2=28{,}8$

$AC^2=14{,}4\cdot 3\Rightarrow AC=12\sqrt{0{,}3}=1{,}2\sqrt{30}$

Ответ: а) $S(\triangle ABC)=28{,}8$; б) $AC=1{,}2\sqrt{30}$

Чистовик

№5

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

пусть $a=\frac{x}{2}+1$; $b=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$; $c=\frac{3x}{2}-6$

тогда все 3 числа можно выразить через a, b и c:

$\frac{1}{2}\log_a b$, $4\log_b c$, $2\log_c a$

1) Пусть 1-е = 2-е = 3-е + 1

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c \ | \cdot 2\\ \frac{1}{2}\log_a b = 2\log_c a \ | \cdot 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_a b - 8\log_b c = 0\\ \log_a b - 4\log_c a = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{\log_b a} - 8\log_b c = 0\\ \log_a b - \frac{4}{\log_a c} = 0\end{cases}$$ Так можно сделать, т.к. $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$

$$\begin{cases}\frac{1-8\log_b^2 c}{\log_b c} = 0\\ \frac{\log_a^2 b - 4}{\log_a c} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\sqrt{2}\log_b c = \pm 1\\ \log_a b = \pm 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_b c = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\\ \log_a b = \pm 2\end{cases}$$

Перемножим и получим, что $\log_a c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

три числа:

$\frac{1}{2}\cdot \pm 2$; $4\cdot \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$; $2\cdot \pm\sqrt{2}$

то есть либо 2-е равно 3-му, но тогда 1-е не отличается на 1,

либо все 3 не равны.

Аналогичные операции проводим с 5-ю оставшимися случаями...

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 14 = 2\cdot 7 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

Так как НОК содержит только степени чисел 2 и 7, то и все числа a, b, c кратны только 1, 2 и 7. Так как НОД = 14 = 2·7, то каждое из чисел имеет делитель 2·7 ~~и в противном множителе одно число равно 14, так как в противном случае, все~~ Из НОК $= 2^{17}\cdot 7^{18}$ становится ясно, что наибольшая степень числа „2" в разложении на простые множители равна 17, а наибольшая степень числа „7" равна 18. Будем рассматривать числа по множителям, то есть какая степень такого простого (2 или 7) числа какую может иметь степень. Так как степени 2-ки не зависят от степеней 7-ки, то рассматриваем их по отдельности, а общее количество троек будет произведением количества случаев с 2-ками и 7-ми.

Двойки: Каждое число кратно 2-м => имеет в разложении минимум одну двойку. Причём одно из чисел имеет ровно одну двойку, иначе НОД будет больше, а другое из оставшихся имеет ровно 17 двоек, так как в противном случае НОК изменится.

a	b	c
2	2^k	2^{17}

У нас есть 6 способов выбрать 2 этих числа. У третьего числа степень k может быть равна от 1 до 17. Значит всего троек по числу „2" будет 6·17? Не совсем, так как мы посчитали повторения, когда $k=\{1;17\}$ (то есть случаи с $k=1$ и $k=17$ мы посчитали дважды) Всего таких ~~повторяющихся~~ дополнительно учтенных случаев по 3 для каждого k. Значит по множителю двойки всего $6\cdot 17-6 = 6\cdot(17-1) = 6\cdot 16$ случаев.

С множителем „7" аналогично, но с ним – $6((18-1)) = 6\cdot 17$ случаев.

Всего троек будет $6^2\cdot 16\cdot 17 = 9792$ комбинаций

Ответ: 9792 тройки