Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102256**

ID профиля: **373295**

Вариант 22

Чистовик

1

1. $S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15})}{2} 15 = (a_1 + 7d) 15$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > (a_1 + 7d)15 - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < (a_1 + 7d)15 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1d_1 + 90d_1^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ -a_1^2 - 21a_1d_1 - 110d_1^2 > -15a_1 - 105d - 4 \end{cases}$$

$/ \mathrm{I} + \mathrm{II}: -20d^2 > -28$

$\Leftrightarrow 5d^2 < 7$

$|d| < \sqrt{1,4}$

Т.к. прогрессия возрастающая, а числа в ней целые: $\underline{d = 1}$

$$\begin{cases} (a_1 + 6)(a_1 + 15) > (a_1 + 7)15 - 24 \\ (a_1 + 10)(a_1 + 11) < (a_1 + 7)15 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a + 1 < 0 \end{cases}$$

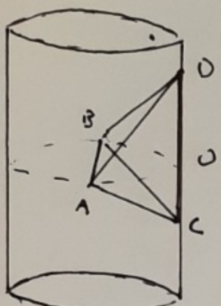
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_1 > -3 \\ a_1 < -3 \end{array} \right. \\ \frac{-6 - \sqrt{32}}{2} < a_1 < \frac{-6 + \sqrt{32}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ -5 < a_1 < 0, \text{ т.к. } a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $a_1 \in \{-4; -2; -1\}$.

Чистовик

②

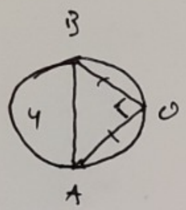
2.

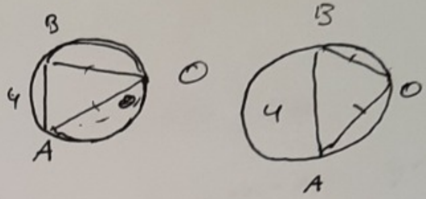


Рассмотрим пл-ть (AOB)

Отрезки AO и OB равны, как проекции равных отрезков OB и AO.

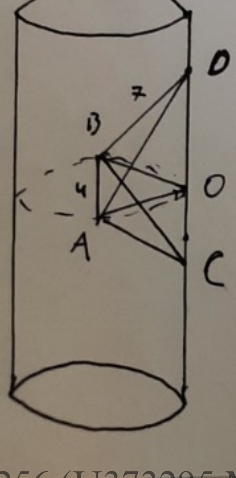
Рассмотрим $\triangle AOB$.

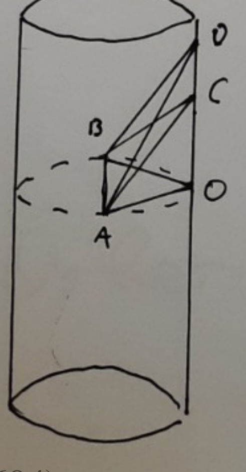




Нужно вписать его в окр-ть так, чтобы радиус был наименьшим.

Значит $\angle BOA$ - прямой, т.к. чтобы радиус окр-ти был наименьшим необходимо, чтобы ~~были~~ ~~из~~ угол, опирающийся на известную сторону был прямым, то есть AB - диаметр. (Это следует из соотношений углов и лежащих против них сторон, т.е. если $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow AB$ - наибольший отрезок, и значит и наибольшая хорда, если $AOB < 90^\circ \Rightarrow$ в окр-ти есть угол большей величины с большей хордой, если $\angle AOB > 90^\circ \Rightarrow$ есть прямой угол, т.е. есть хорда больше AB)





Тогда по т. Пифагора находим $AO = BO = \sqrt{8}$.

Тогда:
$$\left[\begin{array}{l} DC = \sqrt{25-8} + \sqrt{49-8} \\ DC = \sqrt{49-8} - \sqrt{25-8} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} DC = \sqrt{17} + \sqrt{41} \\ DC = \sqrt{41} - \sqrt{17} \end{array}\right.$$

Ответ: $DC = \sqrt{41} + \sqrt{17}$, или $DC = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

Чистовик № 3

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \end{cases}$

/ $a^2+b^2 \le 14a+2b \Leftrightarrow$

$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$ /

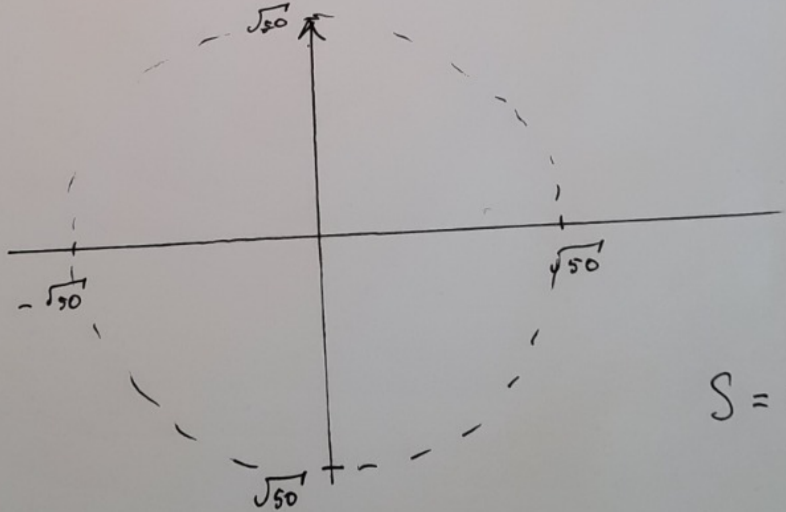
т.е. если $14a+2b \le 50$, то:

$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases}$. выполнимо для точек с $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ т.е. для $\begin{cases} x=\sqrt{50} \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y=\sqrt{50} \\ x=0 \end{cases}$

если $50 \le 14a+2b$, то!

$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$ - выполнимо для точек с $\begin{cases} a=\sqrt{50} \\ b=0 \end{cases}$ и до момента, пока $50 \le 14a+2b$,

т.е. с $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{50} \end{cases}$



$S=\pi r^2=50\pi$

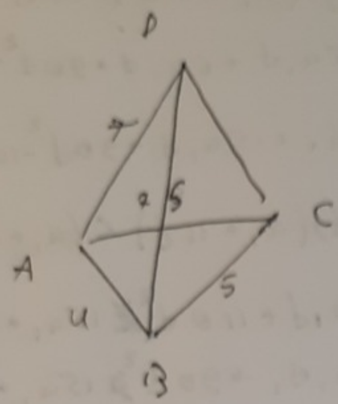
Ответ: 50π

21102256 (U373295 M1301684)

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 \le 50$

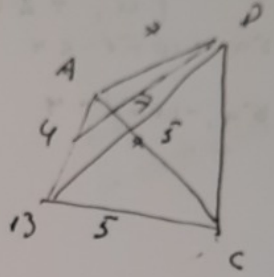
$a^2 + b^2 \le 50 - x^2 + 2ax + 2by - y^2$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 50 + 2(ax+by) - (x^2+y^2) \\ \left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 \le 14a + 2b \\ a^2 + b^2 \le 50 \end{array}\right. \end{cases}$$



$2ax + 2by - x^2 - y^2 \ge 0$

$50 + 2ax + 2by - 14a - 2b - x^2 - y^2 \ge 0$



$$\begin{cases} x(2a-x) + y(2b-y) \ge 0 \\ x(2a-x) + y(2b-y) - 14a - 2b \end{cases}$$

$a = -1 : S = 90$

$5 \cdot 14 > 90 - 24$ верно

$9 \cdot 10 < 90 + 4$ верно

$a = -2 : S = 75$

$4 \cdot 13 > 75 - 24$ - верно

$8 \cdot 9 < 75 + 4$ - верно

$a_1 = -3 \quad S = 60$

$3 \cdot 12 > 60 - 24$ - неверно

$a_1 = -4 \quad S = 45$

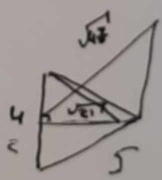
$2 \cdot 11 > 45 - 24$ верно

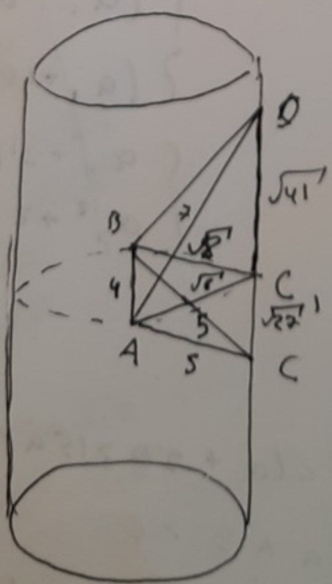
$6 \cdot 7 < 45 + 4$ верно

$14a + 2b \ge 0$

$7a \ge -b$

$b \ge 7a$





$3\sqrt{3} + \sqrt{41}$

$$S = \frac{(a_1 + a_{15})}{2} 15 = \frac{a_1 + a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d)15$$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$a_1 = ?$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > (a_1 + 7d)15 -$

$a_1^2 + 15a_1 d + 6a_1 d + 90d^2 > 15a_1 + 105$

$a_1^2 - 15a_1 + 15a_1 d + 90d^2 - 105d + 6a_1 d$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < (a_1 + 7d)15 + 4$

$$- \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \\ a_1^2 + 21a_1 d_1 + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d_1 + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ -a_1^2 - 21a_1 d_1 - 110d^2 > -15a_1 - 105d - 4 \end{cases}$$

$-20d^2 > -28$

d^2

$20d^2 < 28$

$10d^2 < 14$

$5d^2 < 7$

$d^2 < \frac{7}{5} = 1{,}4$

$-\sqrt{1{,}4} < d < \sqrt{1{,}4}$

т.к. числа целые

$\Rightarrow d \in \{\cancel{-1}; \cancel{0}; 1\}$

$d = 1$

$$\begin{cases} (a_1 + 6)(a_1 + 15) > (a_1 + 7)15 - 24 \\ (a_1 + 10)(a_1 + 11) > (a_1 + 7)15 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 > 15a_1 + 105 + 4 \end{cases}$$

$a_1^2 + 21a + 90 > 15a + 105 - 24$

$a_1^2 + 6a + 9 > 0$

$a_1 \neq -3, \; a_1 > 3$

$a_1^2 + 21a + 110 < 15a + 105 + 4$

$a_1^2 + 6a + 1 < 0$

$D = 36 - 4 = 32$

$a_1 = \frac{-6 - \sqrt{32}}{2}$

$a_2 = \frac{-6 + \sqrt{32}}{2}$

$\frac{-6 - \sqrt{32}}{2} < a_1 < \frac{-6 + \sqrt{32}}{2}$

1

$b = 2$

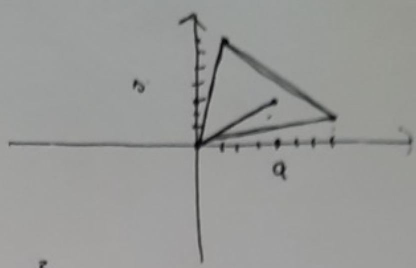
4

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{50} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \sqrt{50} \\ y = 0 \end{cases}$

$\sqrt{50}$ 0

$\sqrt{50}$ 0



$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$(\sqrt{50} - x)^2 + (0 - y)^2 \le 50$

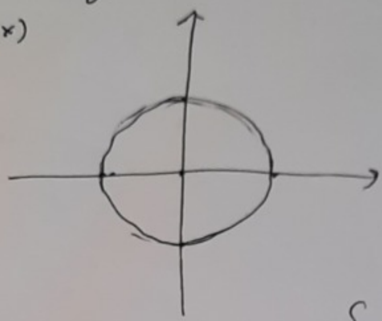
$(0 - x)$

$(1-7)^2 + (7-1)^2 \le 50$

$(1-1)^2 + (7-7)^2 \le 50$

$a^2 + b^2 \le 50$

$a^2 + b^2 \le 14a + 2b$



$2a^2 + 14a +$

$2(a^2 - 7a + 12{,}25) + (b^2 - 2b + 1)$

$14a \le 50 - 2b$

$7a \le 25 - b$ $\quad 7{,}5$

$-b \ge 7a - 25$

$b \le 25 - 7a$

$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 50 \\ a^2 - 14a + b^2 - 2b \le 0 \end{cases}$

$2a^2 - 14a + 2b^2 - 2b \le 50$

$a^2 - 14a + 49 + b^2 - 2b + 1 \le 50$

$\begin{cases} (a-7)^2 + (b-1)^2 \le 50 \\ a^2 + b^2 \le 50 \end{cases}$

$(a - x)^2 + (25 - 7a - y)^2 \le 50$

$(a - 7)^2 + (25 - 7a - 1)^2 \le 50$

$\Leftrightarrow (a - x)^2 + (25 - 7a - y)^2 \le 50$

$(a - 7)^2 + (24 - 7a)^2 \le 50$

$a^2 - 14a + b^2 - 2b - a^2 - b^2 \le 0$

$\begin{cases} (a-7)^2 + (b-1)^2 \le 50 \\ a^2 + b^2 \le 50 \\ (a - x)^2 + (b - y)^2 \le 50 \end{cases}$

$(a - x)^2 + (25 - 7a - y)^2 \le 50$

$\begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

6.15

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$

21102256 (U373295 M1301684)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102256**

ID профиля: **373295**

Вариант 22

Чистовик №4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

Т.к. числа a, b, c делятся на $14=2\cdot 7$, а также их $НОК = 2^{17}\cdot 7^{18}$, то значит, что числа a, b, c состоят только из 2 и 7, то есть являются их произведением в разл. степенях. ~~Из этого факта следует, что одним из чисел a, b, c точно будет являться НОК, так как~~ иначе.

Рассмотрим 1-й случай, когда одно из чисел это НОД, второе НОК, а третье это $2^x\cdot 7^y$, где $1\le x\le 17$, $1\le y\le 18$.

Получаем: $C^1_{17}\cdot C^1_{18}\cdot 6 = 1836$ троек.

2-й случай: одно из чисел: $2^{17}\cdot 7$, 2-е: $7^{18}\cdot 2$, 3-е: ~~либо $2^1\cdot 7^y$, либо $7^1\cdot 2^x$~~ $2^x\cdot 7^y$.

Таких троек: $6\cdot C^1_{17}\cdot C^1_{18} = 1836$.

3-й случай: 1-е число: $2^{17}\cdot 7^x$, 2-е: $7^{18}\cdot 2^z$, 3-е: 14.

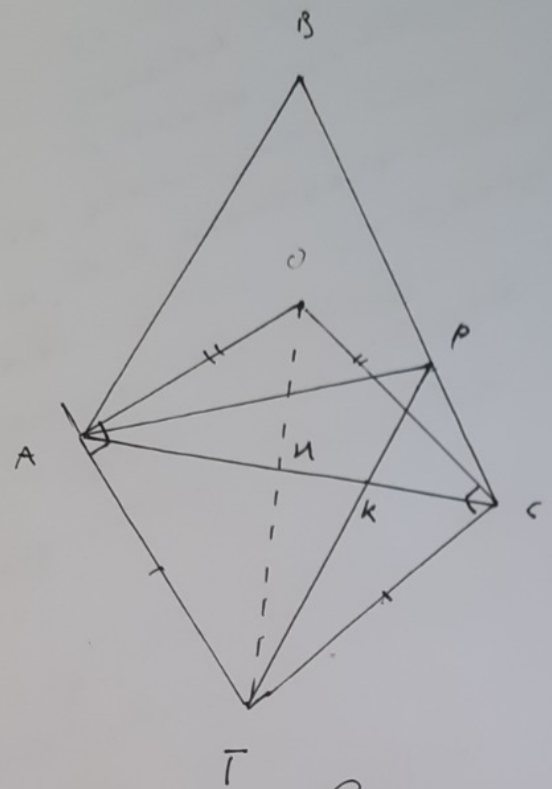
/ $1\le z\le 16$ / Таких троек: $6\cdot C^1_{17}\cdot C^1_{16} = 1632$.

На данный момент имеем: $1632+1836+1836=4304$

Ответ: 4304 троек

21102256 (U373295 M1301685)

Чистовик № 5



Дано: $\triangle ABC$ - остроуг.
(·) O - центр окр-ти ω
AT и CT - касательные
(·) $K = TP \cap AC$, $S_{\triangle APK} = 7$,
$S_{\triangle CPK} = 5$

а) $S_{\triangle ABC} = ?$
б) $\angle ABC = \arcsin \frac{3}{4}$, $AC = ?$

Решение

а) т.к. AT и CT - касательные $\Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow$
$\square AOCT$ - можно вписать в окр-ть, а т.к. через 3 точки можно пр-ти окр-ть и притом только одну $\Rightarrow$ т-ки A, O, P, C, T - лежат на одной окр-ти, тогда OT - диаметр.

~~$\triangle APK \sim \triangle TKC$ т.к. $\angle PKA = \angle CKT$ (верт), $\angle PTC = \angle PAC$ т.к. они опираются на одну дугу.~~

~~$\triangle AHT \sim \triangle OHC$ т.к. $\begin{cases} \angle AHT = \angle OHC \text{ (верт)} \\ \angle OTA = \angle OCA \text{ (опир на одну дугу)}, \end{cases}$~~

~~А т.к. OT - диаметр $\Rightarrow AC$ - тоже диаметр~~

~~В $\lozenge AOCT$ - диагонали перпендикулярны и делят AC точкой пересечения пополам.~~

$PT \parallel AB \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$, $k = \frac{12}{5}$, т.е $S_{\triangle}ABC =$
$= \frac{144}{25} S_{\triangle}PKC = \frac{144}{5} = 28{,}8$

О-вет: ...

~~Сначала~~

$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right),\ \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2,\ \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right).$

① Пусть $\left(\frac{x}{2}+1\right)=a,\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b,\ \frac{3x}{2}-6=c$

Имеем $\log_{a^2} b,\ \log_{\sqrt{b}} c^2,\ \log_{\sqrt{c}} a$

a) $\log_{a^2} b=\log_{\sqrt{b}} c^2,\quad \frac{1}{2}\log_a b=4\log_b c$

$\log_a b-\log_b c^8=\frac{1}{\log_b a}-\log_b c^8=\cancel{\frac{\log_b c^8(\log 1-\log_b)}{\log_b a\cdot\log_b c^8}}=0$

$\Leftrightarrow\ \log_b c^8(1-\log_b a\log_b c^8)=0$

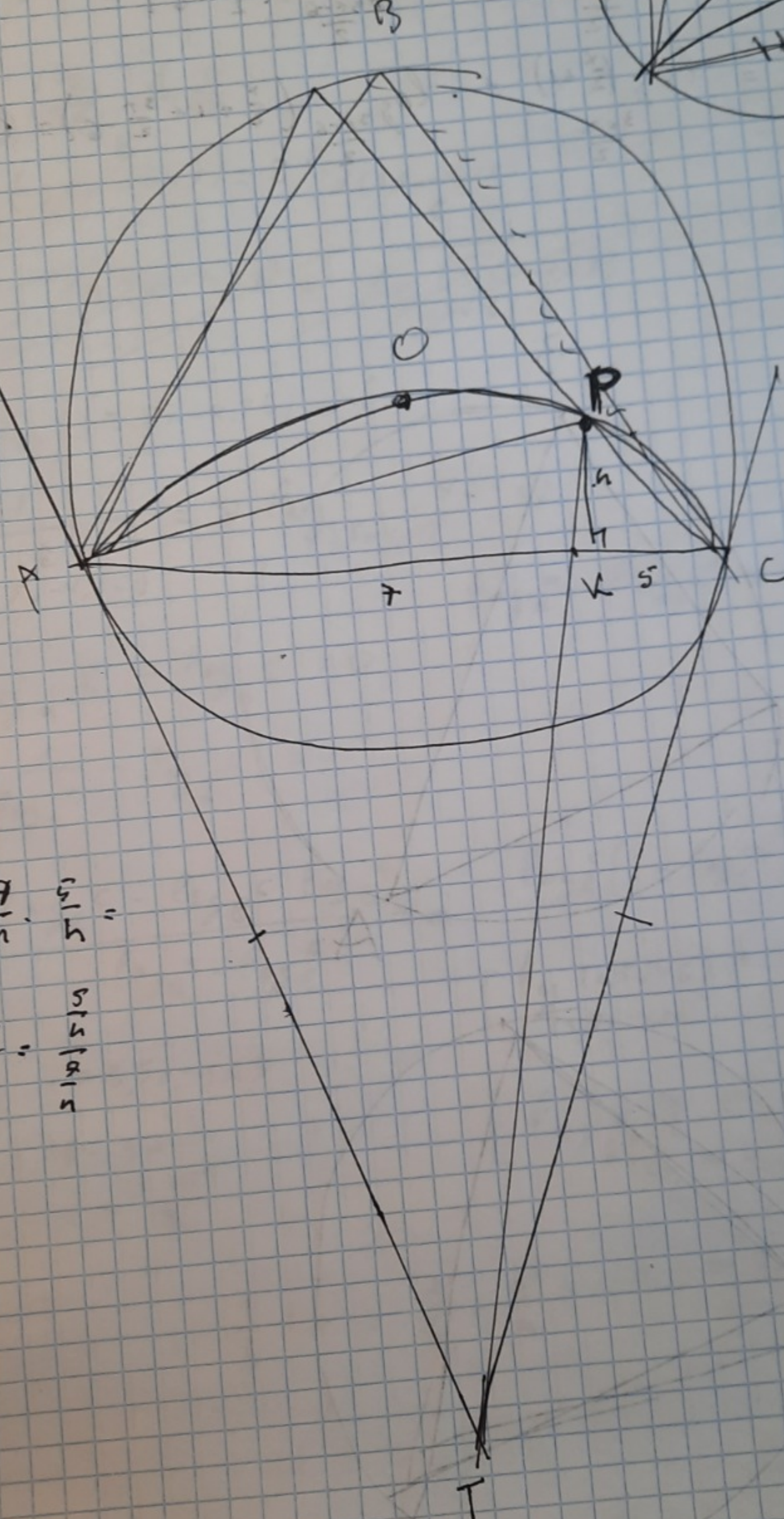
$\cancel{\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}(3{,}5x-4{,}25)=}$

$4\log_{3{,}5x-4{,}25}(1{,}5x-6)=2\log_{1{,}5x-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\frac{2}{\log_{1{,}5x-6}(3{,}5x-4{,}25)}=\log_{1{,}5x-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

21102256 (U373295 M1301685)

$2\log_{\frac{3x}{2}-6}\frac{x}{2}+1$



3 4 5

$4 \cdot \frac{7}{h} \cdot \frac{5}{h} =$

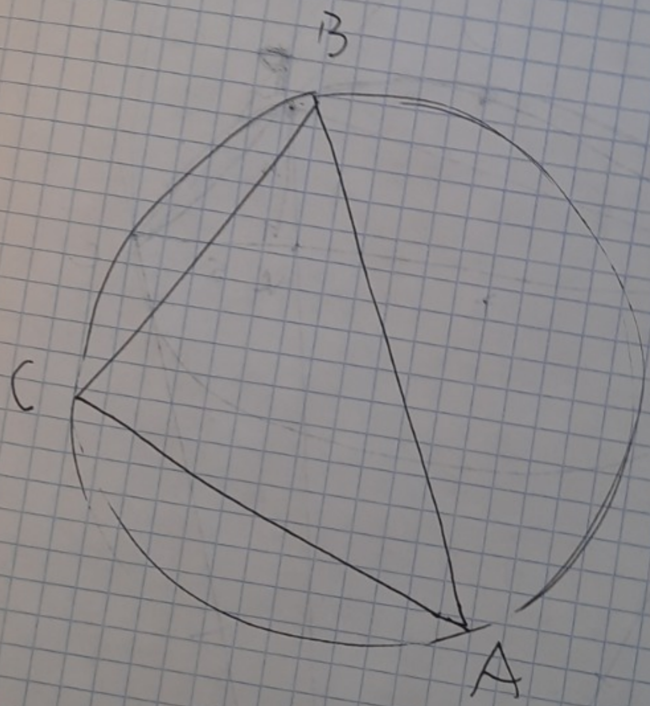
$\frac{PK}{KT} = \frac{\frac{5}{h}}{\frac{7}{h}}$

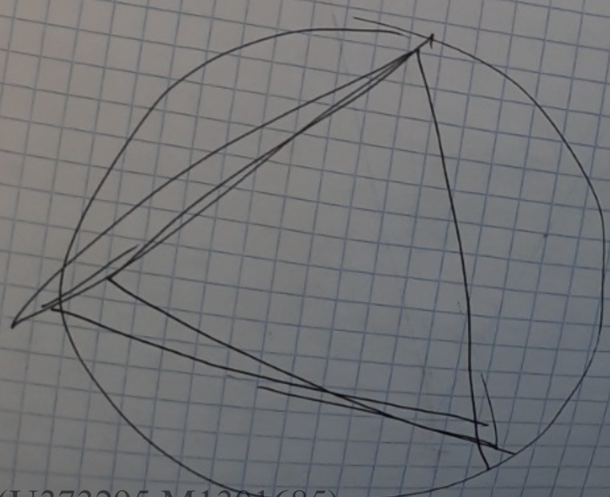
$-6)^2 \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}} (\frac{x}{2}+1$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}} \left(\frac{x}{2}+1\right) + 1 =$$

$$= 2\log_{\frac{3x-6}{2}} \left(\frac{x}{2}+1\right) + \log_{\frac{3x-6}{2}} \left(\frac{3x}{2}-6\right) =$$

$$= \log_{\frac{3x-6}{2}} \left(\frac{x}{2}+1\right) + \log_{\frac{3x-6}{2}} \left(\frac{x}{2}+1+\frac{3x}{2}-6\right) = \log_{\frac{3x-x}{2}} (3,5x-4)$$





$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right),\ \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2,\ \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=4\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{2}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$\cancel{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-4{,}25\right)}$

$\log_{\underset{a}{\left(\frac{x}{2}+1\right)}}\overset{b}{(3{,}5x-4{,}25)}=8\log_{(3{,}5x-4{,}25)}\overset{c}{(1{,}5x-6)}$

$\cancel{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}(3{,}5x-4{,}25)}=\cancel{\frac{8}{\log_{(1{,}5x-6)}(3{,}5x-4{,}25)}}$

$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}(3{,}5x-4{,}25)=b.$

$\frac{1}{\log_{(3{,}5x-4{,}25)}\left(\frac{x}{2}+1\right)}=8\log_{(3{,}5x-4{,}25)}(1{,}5x-6)$

$\log_a b-\log_b c=0 \qquad \log_b a\cdot\log_b c^8=1$

$\frac{1}{\log_b a}-\log_b c=0$

$\frac{\log_b c-\log_b c\,\log_b a}{\log_b a\cdot\log_b c}=0 \qquad \log_b c\left(1-\log_b a\right)=0$

$\frac{x}{2}+1=3{,}5x-4{,}25$

$5{,}25=3x$

$x=\frac{5{,}25}{3}$

$$\left[\begin{array}{l}\log_{(3{,}5x-4{,}25)}(1{,}5x-6)=0\\ \log_{(3{,}5x-4{,}25)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\frac{5{,}25}{3}\end{array}\right.$$

$\frac{1}{b}+a=\frac{1}{b}+\frac{a^2}{a}=\frac{a+a^2b}{ab}=a(1+ab$

21102256 (U373295 M1301685)

(4)

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

=> в каждом из a,b,c есть и 2, и 7, а также 2 числа не делятся на третье, но так как, в каждом числе есть только двойки и семёрки, => одно из чисел всегда 14

$2^{17}\cdot 7^{18}$

$2^{17}\cdot 7$, $7^{18}\cdot 2$, 14

$2^{17}\cdot 7$, $7^{18}\cdot 2$.

т.е. имеем

$2^{17}\cdot 7^{18}$, $2^{x}\cdot 7^{18}$, 14

Аналогично, т.к. в каждом числе есть только двойки и семёрки => одно из чисел должно является НОК

тогда имеем

НОК, $2^x\cdot 7^y$, НОД

НОК, НОД, $2^x\cdot 7^y$

НОД, НОК, $2^x\cdot 7^y$

$A_3^1=\frac{3!}{1!}=6$

$1\le x\le 17$ C_{17}^1

$1\le y\le 18$ C_{18}^1

$18\cdot 17\cdot 6=1836$

1	18
2	18
3	18

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 16 \\ \hline 102 \\ 17 \\ \hline 272 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18 \\ \times\ 17 \\ \hline 126 \\ 18 \\ \hline 306 \\ \times\ 6 \\ \hline 1836 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 272 \\ \times\ 6 \\ \hline 1632 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1836 \\ +\ 1836 \\ 1632 \\ \hline 4304 \end{array}$$