Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102114**

ID профиля: **96771**

Вариант 22

1

Чистовик

№1

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2a_7 \cdot a_{16} + 48}{15} - a_{15} > a_1 \\ \frac{2a_{11} \cdot a_{12} - 8}{15} - a_{15} < a_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{2a_{11} \cdot a_{12} - 8}{15} - a_{15} < a_1 < \frac{2a_7 \cdot a_{16} + 48}{15} - a_{15}$$

Пусть K-коэф. арифм. прогрессии $(K > 0)$:

$$\frac{2(a_1 + 10K)(a_1 + 11K) - 8}{15} - (a_1 + 14K) < a_1 < \frac{2(a_1 + 6K)(a_1 + 15K) + 48}{15} - (a_1 + 14K)$$

$$2(a_1^2 + 21 \cdot a_1 \cdot K + 110K^2) - 8 - 210K < 3a_1 \cdot 15 < 2(a_1^2 + 21K \cdot a_1 + 90K^2) + 48 - 210K$$

$$2a_1^2 + 42a_1 \cdot K + 220K^2 - 8 - 210K < 45a_1 < 2a_1^2 + 42a_1K + 180K^2 + 48 - 210K$$

$$40 < 45a_1 < 4a_1^2 + 84a_1K + 400K^2 - 420K$$

$$40 < a_1(\underset{11\frac{1}{4}}{45} - 4a_1) < 4K(21a_1 + 100K - 105)$$

$$a \in [1; 3) \quad 11\tfrac{1}{4}$$

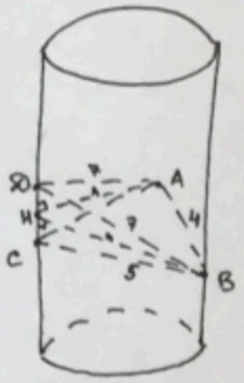
Ответ: $a \in [1; 3)$

②

Чистовик

№2

Решение:



1) Пусть имеется дек. систему коорд., где начало в т. C, а ось y идет вдоль ребра CD ⇒ т.к. $\triangle DAC = \triangle DBC$ ⇒ ⇒ точки A и B находятся на одинак. высоте (коорд. y совпадает)

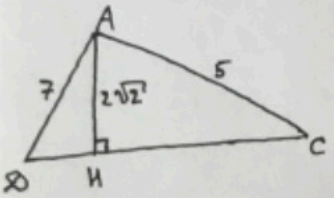
2) Значит ок-ть (перпенд. сег. цилиндра), проходящ. через A проходит и через B (ω). ω кас. DC в т. H. Перпендик. из A и B на DC тоже попадает на H (т.к $\omega \perp DC$).

3) Теперь ищем $\triangle BAH$. $AB = 4$. Чему равно $AH = BH = h$, если радиус ω должен быть мин. Теорема sin: $\frac{4}{\sin\angle AHB} = 2R \downarrow \min \Leftrightarrow \sin\angle AHB \uparrow \max \Leftrightarrow \sin\angle AHB = 1$

$\Rightarrow \angle AHB = 90° \Rightarrow AH = BH = h = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

4) Остается найти основание треуг. ACD. Высота $\triangle ACD = h = 2\sqrt{2}$.

$$DC = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{2})^2} + \sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{41} + \sqrt{17}$$



Ответ: $DC = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

P.S.: Единств. решения объясняется единственным максимум $\sin\angle AHB$ в теореме синусов.

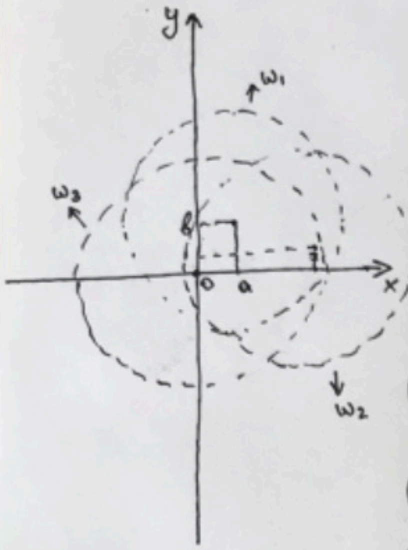
21102114 (U96771 M1300563)

3

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,\,50)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le(5\sqrt2)^2 & (1)\\ a^2+b^2\le 14a+2b & (2)\\ a^2+b^2\le(5\sqrt2)^2 & (3)\end{cases}$$



(1) $\Leftrightarrow$ $\forall$ (a,b) все решения (x,y) находится внутри круга ω_1 с центром в т. (a,b) и радиусом $5\sqrt2$

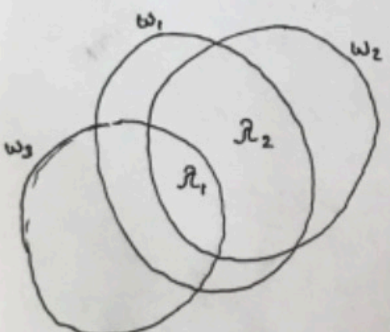
Поэтому найдем все такие пары (a,b) пунктам (2) и (3)

(3) $\Leftrightarrow$ т. (a,b) лежит в круге ω_3 с центром в т. (0,0) и радиусом $5\sqrt2$

(2) $\Leftrightarrow a^2+b^2-14a-2b+49+1\le 50 \Leftrightarrow (a-7)^2+(b-1)^2\le(5\sqrt2)^2$

$\Leftrightarrow$ т. (a,b) лежит в круге ω_2 с центром в т. (7,1) и радиусом $5\sqrt2$.

Имеем: ГМТ различ. точек (a,b) — пересеч. кругов ω_2 и ω_3, а решение системы — еще на $\sqrt2$ вокруг этой области.



Назовем область пересеч. ω_1 и ω_3 (ГМТ (a,b)) — Ω_1, а область, отстоящ. от Ω_1 на $5\sqrt2$ (искомое ГМТ(x,y)) назовем Ω_2. Формально Ω_2 получ. пересеч. двух ок-тей с $r=2\cdot5\sqrt2=10\sqrt2$ и ц. в тех же точках. (0,0); (7,1).

$$\Omega_2 = 4\cdot \int_{\frac{5}{\sqrt2}}^{10\sqrt2}\sqrt{20-x^2}\,dx = 4\cdot\left(\frac12 x\sqrt{200-x^2}+\arcsin\frac{x}{10\sqrt2}\right)\Bigg|_{\frac{5}{\sqrt2}}^{10\sqrt2} = 4\left(0+200\arcsin 1+\frac12\cdot\frac{5}{\sqrt2}\cdot\sqrt{187{,}5}-200\arcsin\frac14\right)$$

Ответ: $400\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac14\right)-5\sqrt2\cdot\sqrt{187{,}5}$.

Черновик

№1.

$S_{15} = \frac{1+15}{2} \cdot 15 = 120$

$a_2 - a_1 > 0$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, $n = 15$

$7 \cdot 16 > 120 - 24$

$11 \cdot 12 < 120 + 4$

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > \frac{15(a_1 + a_{15}) - 48}{2} \\ a_{11} \cdot a_{12} < \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15 + 8}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_7 \cdot a_{16} + 48 > 15(a_1 + a_{15}) \\ 2a_{11} \cdot a_{12} - 8 < 15(a_1 + a_{15}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2a_7 \cdot a_{16} + 48}{15} - a_{15} > a_1 \\ \frac{2a_{11} \cdot a_{12} - 8}{15} - a_{15} < a_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2a_{11} \cdot a_{12} - 8}{15} - a_{15} < a_1 < \frac{2a_7 \cdot a_{16} + 48}{15} - a_{15}$$

$\cancel{a_1 = a_2 - k}$ $\cancel{a_3 = a_1 + 2k}$

$$\frac{2 \cdot (a_1 + 10k) \cdot (a_1 + 11k) - 8}{15} - a_1 - 14k < a_1 <$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_1 + 10k \\ a_{12} = a_1 + 11k \\ a_{15} = a_1 + 14k \\ a_7 = a_1 + 6k \\ a_{16} = a_1 + 15k \end{cases}, \ k > 0$$

$$< \frac{2(a_1 + 6k)(a_1 + 15k) + 48}{15} - a_1 - 14k$$

$$\frac{2(a_1^2 + 21k \cdot a_1 + 110k^2)}{15} - a_1 - 14k$$

$\cancel{\frac{2a_1^2 + 42a_1 k + 220k^2 - 15a_1 - 210k}{15}}$ $\cancel{\frac{a_1^2 + 21k \cdot a_1 + 110k^2}{15} - 14k < a_1 <}$

$\cancel{< \frac{a_1^2 + 21k a_1 + 90k^2}{15} -}$

$$\frac{2(a_1^2 + 21k \cdot a_1 + 110k^2) - 210k - 8}{15} < 3a_1 < \frac{2(a_1^2 + 21k \cdot a_1 + 90k^2) - 210k + 48}{15}$$

$$\underbrace{2a_1^2} + \underbrace{42a_1 k} + 220k^2 \underbrace{- 210k}^{-8} < 45a_1 < \underbrace{2a_1^2} + \underbrace{42a_1 k} + 180k^2 \underbrace{- 210k}^{+48}$$

$\cancel{220k^2 < 45a_1 < 180k^2}$ $\cancel{220k^2 - 8 < 45a_1 < 180k^2 + 48}$ $\cancel{400k^2 > 45a_1 > 40}$

$\cancel{40k^2 < 45a_1 < 56}$ $\cancel{\Rightarrow a_1 = 1}$ $\cancel{80k^2 > 9a_1 > 8}$

21102114 (U96771 M1300563)

$4a_1^2 + 84a_1K + 400K^2 - 420K < 45a_1 < 40$

Черновик

$\cancel{(2a_1+10K)^2 + 4a_1K - 420K < 45a_1 < 40}$

$10 > 2^2+4$

$4(a_1^2 + 21a_1K + 100K^2 - 105K) < 45a < 40$

$\cancel{40 + 400K^2 - 420K \ge 45a_1 < a_1(4a_1+84K)}$

$\cancel{5 > 3+1}$

$\cancel{5-3+1}$

$5+2 < 10 < 4^2+1$

$5+2 < 10-1 < 4^2$

$40 < 45a_1 - 4a_1^2 < 84a_1K + 400K^2 - 420K$

$5+2 < 10 < 5^2 - 10$

$40 < a_1(45-4a_1) < 84a_1K + 400K^2 - 420K$

$5+2$

$40 < a_1(45-4a_1) < 4K(21a_1 + 100K - 105)$

$a \in [1;12]$

$\cancel{3+2 < 10 < 11+2}$

$2a_1^2 + 42a_1K + 220K^2 - 8 - 210K < 45a_1$

$220K^2 - 8 - 210K < 45_1 - 2a^2 + 12a_1K$

$5\sqrt{2} \vee 7$

$45 = 4a_1$

$a_1 = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102114**

ID профиля: **96771**

Вариант 22

1

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 14 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

Имеем: $a = 2^{x_1}\cdot 7^{y_1}$

$b = 2^{x_2}\cdot 7^{y_2}$

$c = 2^{x_3}\cdot 7^{y_3}$

При этом т.к. $НОД = 2^1\cdot 7^1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \text{ из } x_i = 1 \\ 1 \text{ из } y_i = 1 \end{cases}$

$НОК = 2^{17}\cdot 7^{18} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \text{ из } x_i = 17 \\ 1 \text{ из } y_i = 18 \end{cases}$

Пусть для определенности $y_1 \le y_2 \le y_3 \Rightarrow y_1 = 1$, $y_3 = 18$

1) Пусть $y_2 \ne y_1; y_3$, тогда y_2 может быть $2; 3; \dots; 17$, т.е. 16 вариантов

Пусть ~~также x_i~~ также x_i тоже попарно различные, т.е. $x_{(1)} = 1$; $x_{(2)} = 2; 3; \dots; 16$; $x_{(3)} = 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 15 вариантов. $x_{(i)}$ могут переставляться ($x_1 = x_{(2)}$; $x_2 = x_{(1)}$; $x_3 = x_{(3)}$ – пример).

($x_{(i)}$ – вариационный ряд, по возраст.)

Перестановок на 3 элементах – 6, т.е. всего вариантов: $16\cdot 15\cdot 6$ (x_i различны; y_i различны)

2) y_i различны; x_i – нет

т.е. $x_{(2)} = 1$ или $x_{(2)} = 17 = x_{(3)}$.

$x_{(2)} = 1 = x_{(1)}$ — вар. – $16\cdot 3$; $x_{(2)} = 17 = x_{(3)}$ — вар. – $16\cdot 3$

(Умножаю на 3, т.к. 3 вар.: 1; 1; 17
17; 1; 1
1; 17; 1)

Всего: $16\cdot 3\cdot 2$

3) x_i различны; y_i – нет

т.е. $y_2 = 1$ или $y_2 = 18 = y_3$

$y_2 = 1 = y_1$ — вар. $15\cdot 3$; $y_2 = 18 = y_3$ — вар. $15\cdot 3$

(15 вар. $x_{(2)}$ и 3 перестановки)

Всего: $15\cdot 3\cdot 2$

4) x_i <u>не</u> различ; y_i <u>не</u> различ

т.е. 4 случая:			
$x_{(2)} = 1$	$x_{(2)} = 17$	$x_{(2)} = 1$	$x_{(2)} = 17$
$y_2 = 1$	$y_2 = 1$	$y_2 = 18$	$y_2 = 18$
~~всего 1 вар~~	2 вар	2 вар	2 вар

21102114 (U96771 M1300564)

всего 2 в.:

1	1
1	1
18	17

и

1	1
1	17
18	1

Всего: 8 вар.

Эти 4 пункта не пересек и составляют в объединении 4 случая $\Rightarrow$ всего:

$16 \cdot 15 \cdot 6 + 16 \cdot 3 \cdot 2 + 15 \cdot 3 \cdot 2 + 8 = 1440 + 96 + 90 + 8 = 1634$

Мы подсчитали уникальные тройки. А теперь первые 3 пункта умножим на 6, а в 4) 36 вариантов. Тогда всего:

$1440 \cdot 6 + 96 \cdot 6 + 90 \cdot 6 + 36 = 9792$

Ответ: 9792

№5 Чистовик ③

(1) $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\log_{a^2} b$

(2) $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=\log_{\sqrt{b}} c^2$

(3) $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\log_{\sqrt{c}} a$

Пусть: $\left(\frac{x}{2}+1\right)=a$, причем: $a, b, c>0$

$\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=b$, $a, b, c\neq 1$

$\left(\frac{3x}{2}-6\right)=c$

Всего есть 3 случая (т.к. $C_3^2=3$): $\left[\begin{array}{l}(1)=(2)=(3)-1\\(2)=(3)=(1)-1\\(1)=(3)=(2)-1\end{array}\right.$

1) $\log_{a^2} b=\log_{\sqrt{b}} c^2=$ ~~…~~ $\log_{\sqrt{c}} a-1$

$\frac{\lg b}{\lg a^2}=\frac{\lg c^2}{\lg\sqrt{b}}$

21102114 (U96771 M1300564)

(4)

Чистовик

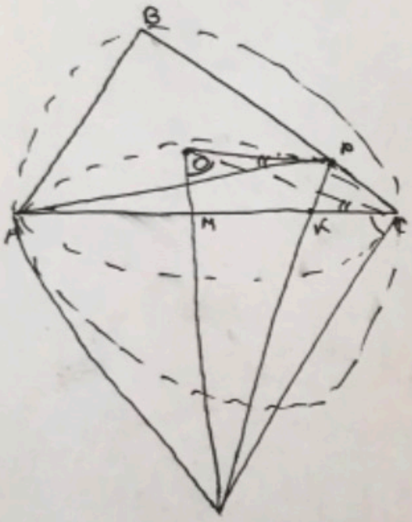
№6

а) CT – кас. к $\omega \Rightarrow \angle OCT = 90^\circ$
$\angle OAT = 90^\circ$ Пусть вторая ок-ть – Ω. $\angle OCT + \angle OAT = 180^\circ \Rightarrow$ AOCT – вписан. четырех. в Ω. $\Rightarrow$ A; O; P; C; T лежат на Ω.

Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle ACT = \alpha$ ($\angle$ между кас и хорд) $\Rightarrow \angle TOC = \alpha$ (т.к. $\triangle TOC$ – прямоугол и $\triangle CMT$ – прямоугол). M – сер. AC (т. пересеч. с OT). $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle TPC = \alpha$ (опир. на дугу TC ок-ти Ω) т.е. $\angle KPC = \angle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ и $\triangle KPC$ подобны $\frac{KC}{AC} = \frac{5}{5+7} = \frac{5}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{KPC} \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{5 \cdot 12^2}{5^2} = \frac{144}{5}$

Ответ: $\frac{144}{5}$



21102114 (U96771 M1300564)

№5 Черновик

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \log_{a^2} b \quad (1)$$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 = \log_{\sqrt{b}} c^2 \quad (2)$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = \log_{\sqrt{c}} a \quad (3)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\tfrac{x}{2}+1\right) &= a\\ \left(\tfrac{7x}{2}-\tfrac{17}{4}\right) &= b\\ \left(\tfrac{3x}{2}-6\right) &= c\end{aligned}}$$

$a, b, c > 0;\ \neq 1$

1) $(1) = (2) = (3) - 1$

2) $(2) = (3) = (1) - 1$

3) $(1) = (3) = (2) - 1$

1) $\log_{a^2} b = \log_{\sqrt{b}} c^2 = \log_{\sqrt{c}} a - 1$

~~$\log_{a^2} b = \log_{\sqrt{b}} c^2 = \log_{\sqrt{c}} \frac{a}{\sqrt{c}}$~~

~~$\sqrt{b}^{\log_{a^2} b} = c^2$~~

~~$b^{\frac{1}{2}\log_{a^2} b} = a^4 = c^2 \Rightarrow c = a^2$~~

~~$\log_{\sqrt{c}} a - 1 = \log_a a^{-1} = 1 - 1 = 0$~~

~~$\frac{3x}{2} - 6 = \left(\frac{x}{2}+1\right)^2$~~

~~$\frac{3x-12}{2} = \frac{x^2}{4} + x + 1$~~

~~$\frac{3x-12}{2} = \frac{x^2+4x+4}{4}$~~

~~$4(3x-12) = 2(x^2+4x+4)$~~

~~$12x - 48 = 2x^2 + 8x + 8$~~

~~$2x^2 - 4x + 56 = 0$~~

~~$\frac{3x-12}{2} = \frac{x^2+4x+4}{4}$~~

~~$\boxed{\begin{aligned}x&=4\\ x&=-2\end{aligned}}$~~

~~$\log_9 \left(14 - \frac{17}{4}\right) = \log \left(14 - \frac{17}{4}\right)$~~

~~$\frac{\lg b}{\lg a^2} = \frac{\lg c^2}{\lg \sqrt{b}}$~~

~~2) $\log_{\sqrt{b}} c^2 = \log_{\sqrt{c}} a = \log_{a^2} b - 1$~~

~~$\sqrt{c}^{\log_{\sqrt{b}} c^2} = a$~~

~~$c^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{b}} c^2} = \sqrt{b} = a \Rightarrow a^2 = b$~~

~~$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = 0$~~

~~3) $\log_{a^2} b = \log_{\sqrt{c}} a = \log_{\sqrt{b}} c^2 - 1$~~

~~$\log = 0$, если~~

~~$\log_a b = 0$ если $b = 1$, но $a, b, c \neq 1$~~

~~$\Rightarrow$ реш. нет.~~

$\log_{\sqrt{c}} a - 1 = b^{\log_{a^2} b}$

Черновик №4

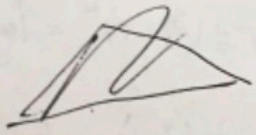
$НОД(a;b;c) = 14 = 2\cdot 7$

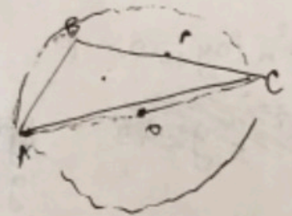
$НОК(a,b,c) = 2^{18}\cdot 7^{18}$

$$\frac{\lg b}{\lg a^2} = \frac{\lg c^2}{\lg\sqrt{b}} = \frac{\lg a}{\lg\sqrt{c}} - 1$$

$$\lg b\cdot \lg\sqrt{b} = \lg a^2\cdot \lg c^2 = \frac{\lg a}{\lg\sqrt{c}} - 1$$

$\cancel{\lg b\cdot \lg\sqrt{b}} =$





$$\begin{array}{r} \overset{2\,2}{1440} \\ \times\ 6 \\ \hline 8640 \end{array} + \begin{array}{r} \overset{3}{96} \\ \times\ 6 \\ \hline 576 \end{array} + 540 + 36 = 9792$$