Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102107**

ID профиля: **284046**

Вариант 22

№1 чистовик стр.1

Пусть d - разность прогрессии $\Rightarrow S = 15a_1 + \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot d = 15(a_1 + 7d)$

d - натуральное т.к. $d = a_2 - a_1$ и $a_2 > a_1$ $a_1; a_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} (a_1 + 6d) \cdot (a_1 + 15d) > 15a_1 + 105d - 24 \\ (a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 11d) < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} ① \; a_1^2 + 21da_1 + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ ② \; a_1^2 + 21da_1 + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

сложим 2 неравенства, перевернув второе

$$a_1^2 + 21da_1 + 90d^2 + 15a_1 + 105d + 4 > a_1^2 + 21da_1 + 110d^2 + 15a_1 + 105d - 24$$

$$28 > 20d^2$$

$$d^2 < \frac{28}{20}$$

$$d^2 \leq 1$$

$$0 < d \leq 1$$

$\Downarrow$

$d = 1$ т.к d - натуральное

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \\ a^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

21102107 (U284046 M1303092)

№ ~~2~~ 1 (продолжение) чистовик стр. 2

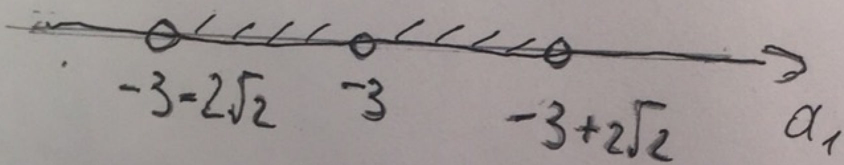
$$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

метод интервалов

$D = 36 - 4 = 32$

$a_1 = \dfrac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$2 < 2\sqrt{2} < 3$



$\Downarrow$ т.к $a_1 \in \mathbb{Z}$

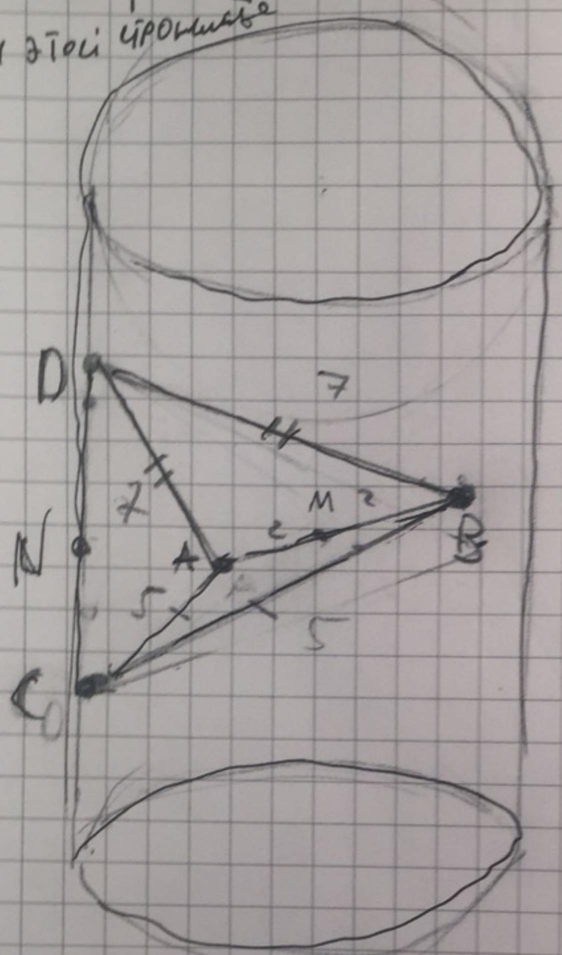
$a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

Ответ:

чистовик стр.3

№ 2

только рисунок
на этой странице



Если проецировать $\triangle ABC$ на основание цилиндра то он уменьшит и будет вписан в окр. основания

$\Downarrow$

$R_{ABC} \geq r$ ← радиус основания

R – радиус описан. окр. ABC

r - минимальна когд $r = R_{\triangle ABC}$

~~cos ADB~~ ⇒ Т. кос для $\triangle ABC$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cos ACB \cdot AC \cdot BC$

$16 = 50 - 50 \cdot \cos\angle ACB = 50(1 - \cos\angle ACB)$

$1 - \cos\angle ACB = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$

$\cos\angle ACB = \frac{17}{25}$

$\sin\angle ACB = \sqrt{1 - \cos^2\angle ACB} = \sqrt{\frac{25^2 - 17^2}{25^2}} = \frac{16}{25}$

по обобщ. Т. син. одина ACB

$r = R_{ACB} = \frac{AB}{2 \cdot \sin\angle ACB} = \frac{4}{2} : \frac{32}{25} = \frac{100}{8} = \frac{25}{8}$

Т.к. $R_{ACB} = r$ то ACB - параллелен основанию цилиндра

Черновик стр. 4

№2 (продолжение)

Т.к. AB, Пусть M середина AB =>

пл. CDM ⊥ AB => CD ⊥ AB => AB

AB параллельно плоскости основания

цилиндра => r цилиндра ≥ $\frac{AB}{2} = 2$

т.е. радиус минимален когда AB - диаметр!

Пусть MN высота опущенная на CD

=> $MN = r = 2$

по т. Пиф. $DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{45}$

$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{21}$

$DN = \sqrt{DM^2 - NM^2} = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

$CN = \sqrt{CM^2 - NM^2} = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

⇓

$CD = DN + CN = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{41} + \sqrt{17}$

21102107 (U284046 M1303092)

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 50 & (1) \\ a^2+b^2 \leq 50 & (2) \\ a^2+b^2 \leq 14ab+2b & (3) \end{cases}$$

(1) неравенство задает внутренню часть окружности с центом $O=(a;b)$ и радиусом $\sqrt{50}$

(2) неравенство задает координаты точки O т.к. внутреннея часть окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{50}$

(3) $a^2-14a+49+b^2-2b+1 \leq 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50$

задает координа точки – внутреннея часть окружности с центром $(7;1)$ и радиусом $\sqrt{50}$

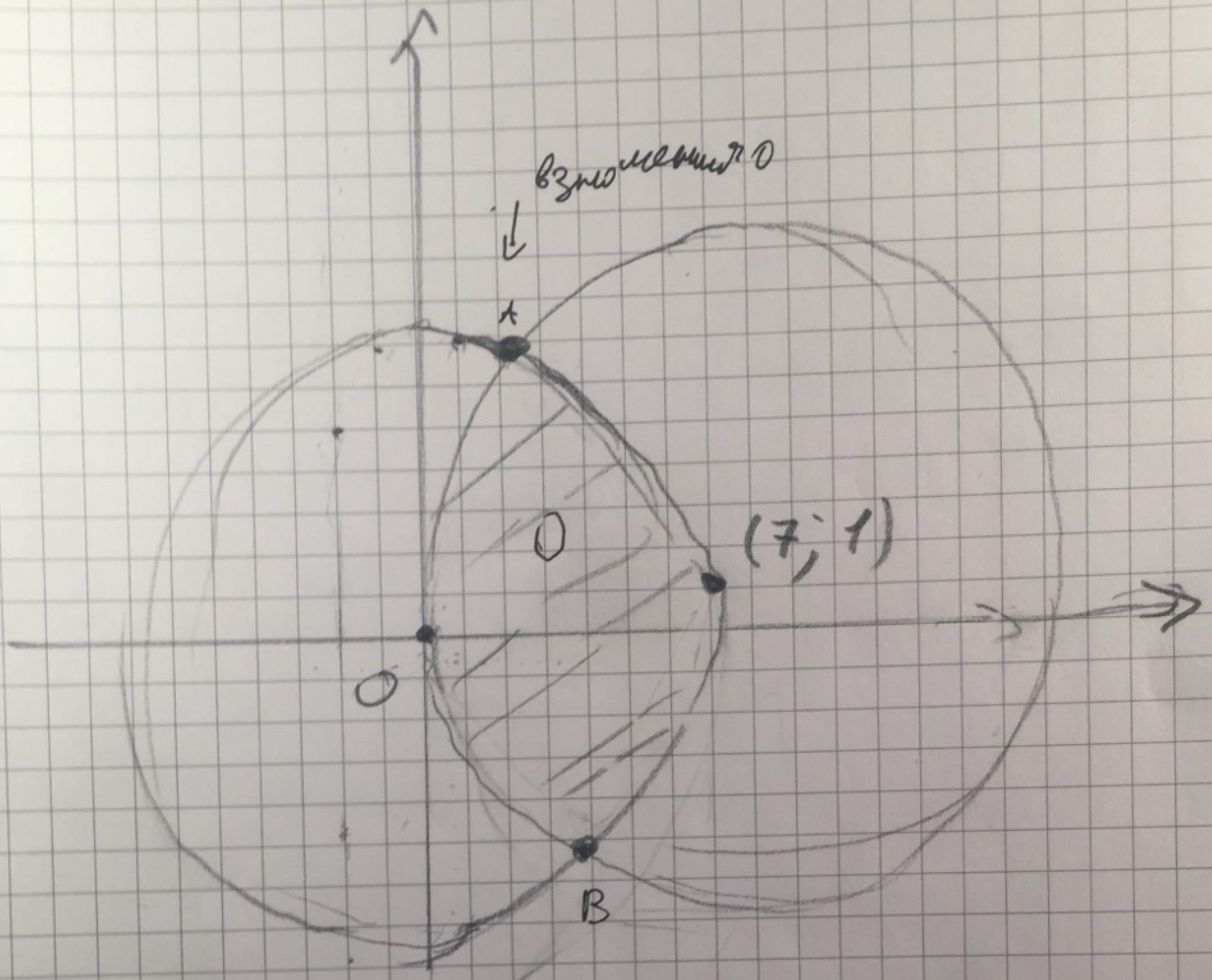
$\Downarrow$

все возможные значения O -> внутр. часть пересечения двух окружностей

21102107 (U284046 M1303092)

чистовик чр. 6

№.3 (продолжение)



для того чтобы найти точки A и B нужно подставить $b^2 = \pm\sqrt{50-a^2}$ в 3 неравенство

$50 = 14a + 2b$

$25 = 7a + b = 7a$

$25^2 + 49a^2 - 350a = b^2 = 50 - a^2$

$50a^2 - 350a - 25^2 = 0$

$2a^2 - 14a - 25 = 0$

$D = 196 + 200 = 396 = 4(49 + 50) =$

$4 \cdot \sqrt{99}$

21102107 (U284046 M1303092)

№ 3 в продолжение

$$a = \frac{14 \pm 2\sqrt{99}}{4}$$

черновик

$$\frac{25^2-17^2}{25^2}=\frac{8\cdot 32}{25^2}=\frac{2^8}{}$$

21102107 (U284046 M1303092)

черновик

$$\begin{array}{r} \overset{3}{1}5 \\ \times\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

черновик

№2 (продолжение)

$\Downarrow$

$CD \perp$ пл. ABC т.к CD перпенд. OC

Пусть M - середина AB

$\Downarrow$

$\angle MCD = 90^\circ$

по т. пифагора

$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{25 - \cancel{4}\, 4} = \sqrt{21}$

$DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{49 - 4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$DC = \sqrt{DM^2 - CM^2} = \sqrt{45 - 21} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102107**

ID профиля: **284046**

Вариант 22

№4.

Т.к. $\text{нок}(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18}$ делится на каждое из чисел a, b, c

Т.о при разложении их на простые множители будут только степени двойки и семерки

Пусть $a = 2^x\cdot 7^m$, $b = 2^y\cdot 7^n$; $c = 2^z\cdot 7^q$

где $x; y; z; m; n; q$ – целые неотриц.

Т.к $\text{нод}(a;b;c) = 2^1\cdot 7^1$

$\Downarrow$

$\min(x;y;z) = 1$

$\min(m;n;q) = 1$

Т.к $\text{нок}(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18}$

$\Downarrow$

$\max(x;y;z) = 17$

$\max(m;n;q) = 18$

пусть $x < y < z$

$\Downarrow$

$x = 1$; $z = 17$; $1 < y < 17 \Rightarrow 2 \leq y \leq 16$

Таких вариантов $x;y;z$ ровно 15

При изменения порядка возрастания $x;y;z \to 3!\cdot 15 = 15\cdot 6 = 90$

N.4 (продолжение) Чистовик стр. 2 из 8

при $x = y < z \Rightarrow x = \cancel{y} = 1$; $z = 17 \rightarrow$ 1 вар

$\Rightarrow$ при изменении порядка $\rightarrow$ 3 вар

$\cancel{*)}$ при $1 = x < y = z = 17 \rightarrow$ 1 вар

при изменении порядка $\rightarrow$ 3 вар.

$\Downarrow$

Всего вариантов значения $x; y; z \rightarrow 90 + 3 + 3 = 96$

Аналогично для $m; n; q \rightarrow 3! \cdot 16 + 3 + 3 = 102$

Т.к. $(x; y; z)$ и $(m; n; q)$ независимы

$\Downarrow$

Всего вариантов $(a; b; c) \rightarrow 102 \cdot 96 = 9792$

Ответ: 9792

21102107 (U284046 M1303093)

№ 5

Пусть

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+1=a \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b \\ \frac{3x}{2}-6=c \end{cases} \Rightarrow$$

наши 3 числа

$$\begin{cases} m=\log_{a^2}(b)=\frac{\log_2 b}{\log_2 a^2} \\ n=\log_{\sqrt{b}}(c^2)=\frac{\log_2 c^2}{\log_2 \sqrt{b}} \\ q=\log_{\sqrt{c}}(a)=\frac{\log_2 a}{\log_2 \sqrt{c}} \end{cases}$$

$\Downarrow$

Обл. опред.
$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \\ a\neq 1 \\ b\neq 1 \\ c\neq 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$m=\frac{1}{2}\,\frac{\log_2 b}{\log_2 a}$$

$$n=\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot 4\cdot\frac{\log_2 c}{\log_2 b}$$

$$q=2\cdot\frac{\log_2 a}{\log_2 c}$$

$\Downarrow$

$$mnq=4=t^2\cdot(t-1)=t^3-t$$

$$t^3-t^2-4=0$$

$$(t-2)(t^2+t+2)=0$$

$\to D<0$

$\Downarrow$

$t=2$ ← двое из наших чисел $m; n; q$ равно 2 а третье 1

21102107 (U284046 M1303093)

№. 5 (продолжение)

I пусть $m = n = 2$; $q = 1$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 4\log_2 a = \log_2 b \\ \log_2 b = 2\log_2 c = \log_2 c^2 \\ \log_2 c = 2 \cdot \log_2 a = \log_2 a^2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} c = a^2 \\ b = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} - 6 = \frac{x^2}{4} + \cancel{3}x + 1 \\ \frac{7}{2}x - \frac{17}{4} = \frac{9x^2}{4} - 18x + 36 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 6x + 4 + 24 = 0 \\ 9x^2 - 72x - 14x + 144 - 17 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 28 = 0 \leftarrow D < 0 \\ \ldots \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\times$

Чистовик стр. 5 из 8

N.5 (продолжение)

II) ~~q=2 n=1~~ ~~q=n=2~~ $m = q = 2; \; n = 1$

$\Downarrow$

~~$4\log_2 a = \log_2 b \Rightarrow$ аналогично I случаю $D<2$~~

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 4\log_2 a = \log_2 b \Rightarrow b = a^{4} \\ \log_2 b = 4\log_2 c \Rightarrow b = c^4 \\ \log_2 c = \log_2 a \Rightarrow a = c \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\frac{x}{2} + 1 = \frac{3x}{2} - 6$

$\Downarrow$

$x = 7$

$\Downarrow$

$a = \frac{9}{2}$

$\Downarrow$

$b = \frac{49}{2} - \frac{17}{4} = \frac{81}{4} \neq a^4$

$\Downarrow$

$\times\times$

III) ~~m=n~~ $n = q = 2; \; m = 1$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2\log_2 a = \log_2 b \Rightarrow b = a^2 \\ \log_2 b = 2\log_2 c \quad b = c^2 \\ \log_2 c = \log_2 a \Rightarrow a = c \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x = 7$

$\Downarrow$

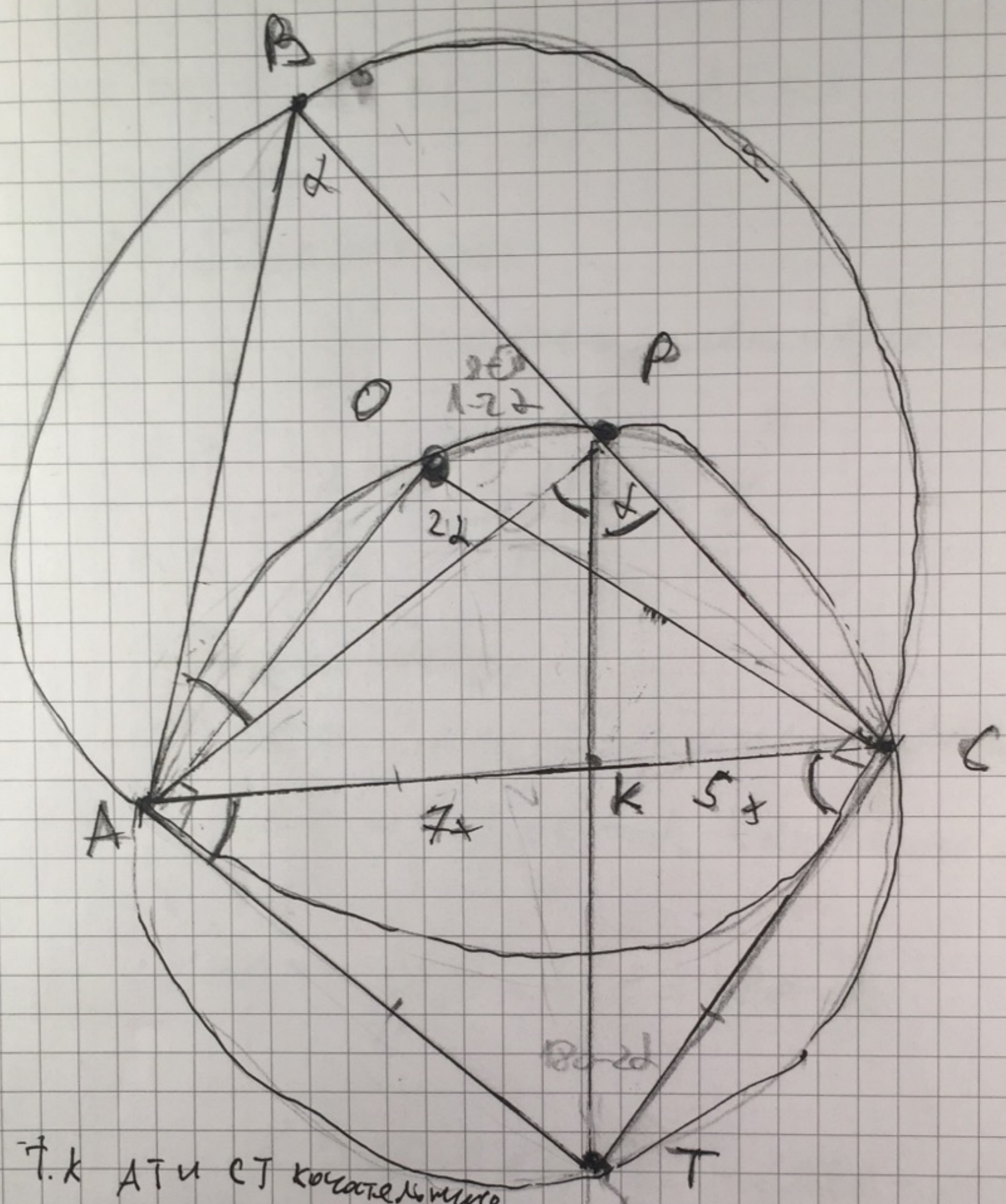
$c = a = \frac{9}{2}$.

$\Downarrow$

$b = \frac{81}{4} = a^2 = c^2$

Ответ: $x = 7$

№.6



т.к AT и CT касательные

$\angle OAT = \angle OCT = 90°$

⇓

OATC – вписанный

⇓

A O P ~~K~~ C T – лежат на 1 окружности

⇓ т.к AT = TC (касательные

⇓ ~~дуги~~ дуги равны

$\smile AT = \smile TC$

№6 (продолжение

$\Downarrow$

$\angle APT = \angle TPC = \frac{1}{2} \smile AT = \alpha$

$\Downarrow$ ~~по~~

PK - биссектриса

$\Downarrow$ по основному свойству биссектрисы

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{7}{5}$$

~~Т.к угол между~~

$\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$ как вписанные

$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \alpha$ как вписан. и центр,

$\Downarrow$

$\angle BPA = 180 - \angle APC = 180 - 2\alpha$

$\Downarrow$

$\angle BAP = 180 - \angle ABP - \angle BPA = \alpha$

$\Downarrow$

$\angle ABP = \angle PAB = \alpha$

$\Downarrow$

$\triangle ABP$ — равнобедренный

$\Downarrow$

$AP = BP$

$\Downarrow$

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{7}{5}$$

1. 6 (продолжение)

$$S_{ABP} = \frac{7}{5} S_{APC} = \frac{7}{5}\left(S_{APK} + S_{PKC}\right) =$$

$$= \frac{7}{\cancel{2}\,5} \cdot 12 =$$

$$\Downarrow$$

$$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = 12 + \frac{7}{5} \cdot 12 =$$

$$= \frac{12}{5} \cdot 12 = \frac{144}{5}$$

Ответ: $\frac{144}{5}$

черновик

$$t^3 + 0t^2 - t - 4 \mid t - 2$$
$$t^3 - 2t^2 \qquad t^2 + 2t$$
$$2t^2 - t$$
$$2t^2 - 2t$$
$$t - 4$$

$$t^3 - t^2 + 0t - 4 \mid t - 2$$
$$t^3 - 2t^2 \qquad t^2 + t + 2$$
$$t^2 + 0t$$
$$t^2 - 2t$$
$$2t - 4$$

$$98 - 17 = 81$$

$2c = 3x - 12$

$2a = \cancel{2}x + 2$

$2b = 7x - \frac{17}{2} =$

$b = 7a - \frac{45}{4}$

$c = \cancel{7a}\ 3a - 9$

$7 \cdot 4 = 28$

$\frac{\cancel{35}}{4}$

$18 \times 4 = 72$

$36 \times 4 = 144$

Черновик

N.4

~~Т.к. все числа $a \vdots b, c$ дел~~

~~Т.к. НОК $(a; b; c) \vdots a, b, c$~~

$6 \cdot 17$

$$\begin{array}{r} \overset{4}{1}7 \\ \times\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1\,1}{96} \\ \times\ 102 \\ \hline 192 \\ 96 \\ \hline 9792 \end{array}$$