Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102074**

ID профиля: **260661**

Вариант 22

№1, Вар-22) пусть $a_2 = a_1 + d,\ d>0$ $\quad S = 15a_1 + 15\cdot 7d$ (1) $\quad a_1 \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$

$a_7 \cdot a_{16} = (a_1+6d)(a_1+15d) = a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24$ (2)

$a_{11} \cdot a_{12} = (a_1+10d)(a_1+11d) = a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4$ (3)

Вычев из (3) но 28, получим со (2):

$a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 - 28 \Rightarrow 20d^2 < 28 \Rightarrow d = 1$

$\Rightarrow \begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix} \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

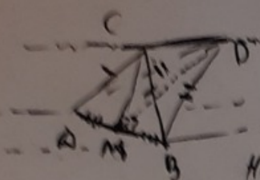
$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ (a_1 - (-3+2\sqrt{2}))(a_1 + 3 - 2\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$

$+$ $-3-2\sqrt{2}$ $-$ -3 $-$ $-3+2\sqrt{2}$ $+$ a_1

т.к. $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < 3$ то: $\quad a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

21102074 (U260661 M1299139)

№2 Вар 22 | $AB=4$; $AC=CB=5$; $AD=DB=7$

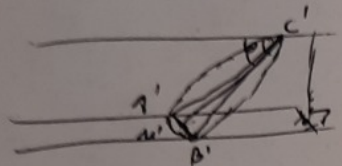


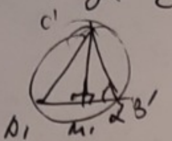
В р/б $\triangle CAB$ и $\triangle DAB$ высоты падают на середину основания $AB = M \Rightarrow (CMD) \perp AB$ и $\perp (CAB)$ и $\perp (DAB)$ и $CD \perp AB$.

Также заметим, что задачу можно переформулировать так: Нужно выбрать такой тетраэдр, что ~~ортогональная~~ проекция его грани ABC или DAB (переходят в один и тот же $\triangle$) "вдоль" CD имела минимальный радиус описанной окружности (A, B, C, D проецируются на окружность основ-я). ~~Задача~~ Необходимо понять для начала, какая окружность, пересекающая три прямые, имеет минимальный радиус (цилиндр может быть наклонным)

$CM = \sqrt{21}$; $DM = 3\sqrt{5}$.

Пусть окружность наклонена на φ к (CD), а $\rho(M, CD) = m = \rho(CD$, плоск. через $AB \parallel CD)$





тогда $C'M' = m/\sin\varphi = x$, $x > 0$

$M'B' = M'A' = 2 \Rightarrow$ Th. Пиф. $B'C' = C'A' = \sqrt{x^2+4}$

по Th. sin $\triangle A'B'C'$ если $\angle C'B'A' = \alpha$:

$$2R = \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sin\alpha} = \frac{x^2+4}{x} = x + 4/x \quad \left(\sin\alpha = \frac{C'M'}{C'B'}\right)$$

По нер-ву о средних $2R = x + 4/x \geq 2\sqrt{x \cdot 4/x} = 4$, и равенство при $x = 4/x \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow R = 2$. Получим $m/\sin\varphi = 2$. Поскольку $\sin\varphi$ мы вольны выбирать сами (наклон оси цилиндра), то ~~достаточно~~, необходимо выбрать те тетраэдры, для к-рых $m < 2$ (т.к. $\sin\varphi \leq 1$) $\varphi = 90°$ - не подойдёт

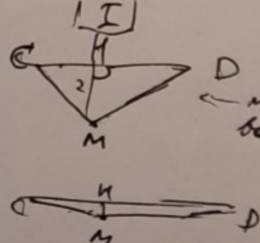
Т.О. в $\triangle MCD$ высота из M < 2 длина!

$\Leftrightarrow$ CD ограничено сверху и снизу нер-вами треугольника $CD < CM + CD = \sqrt{21} + 3\sqrt{5}$; $CD > MD - MC = 3\sqrt{5} - \sqrt{21}$

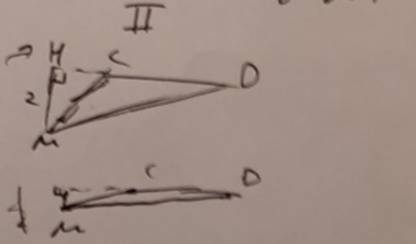
~~снизу такими треугольниками, что~~

и треугольниками с max высотой

(тупоугольный с $\angle C$ и с большим углом $\angle M$ случаи)



← max высоты



$CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \sqrt{17}$

$DH = \sqrt{DH^2 - MH^2} = \sqrt{41}$

~~Нужно проверить~~

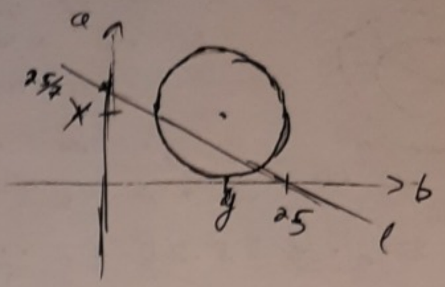
Т.к. $CM > 2$ и бывает высотой, то все случаи реализуемы

Ответ: $CD \in (\sqrt{21} + 3\sqrt{5}; \sqrt{17} + \sqrt{41}) \cup (\sqrt{41} - \sqrt{17}; 3\sqrt{5} - \sqrt{21})$

№3 Вар 22)

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b,\ 50) & (2) \end{cases}$$

Проверим, существует ли пара для (x,y)
Нарисуем график $a(b)$



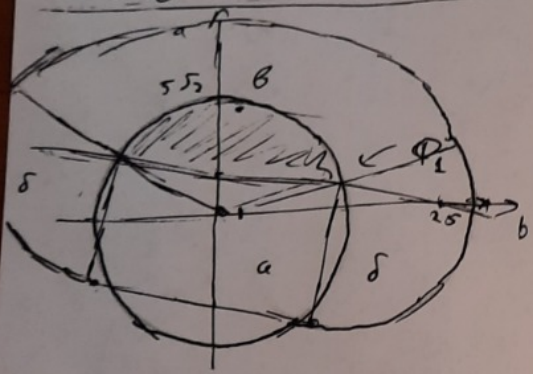
по (1) подходят все в круге $((y,x), 5\sqrt{2}) = \omega_x$
по (2) для каждой пары a, b надо понять $\min(14a+2b, 50)$

$14a+2b < 50 \Rightarrow a < \frac{25}{7} - \frac{b}{7}$ ← полуплоскость под прямой $a = \frac{25}{7} - \frac{b}{7}$ — l прямая

по второму условию нужно проверить, что
$\rho((0,0),(b,a)) \le \min(14a+2b, 50)$, $\rho = a^2+b^2$

I) Для начала рассмотрим все x, y, для каких $\exists (a,b)$: $a^2+b^2 \le 50$, $50 \le 14a+2b$
круг $((0,0), 5\sqrt{2}) = \omega_0$

Для этого дост. чтобы ω_x пересекло необх. область ω_0 под l — Φ_1

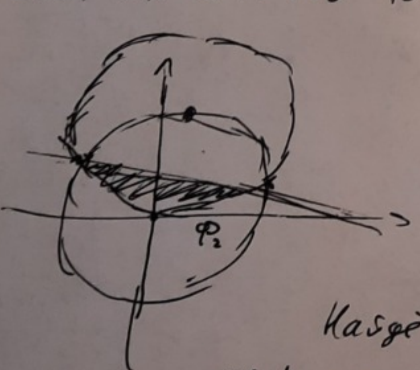


ГМТ (x,y) это всех центра кругов, кас фигуры Φ_1
а) по прямой l: отрезок $\parallel l$ и на $\rho = 5\sqrt{2}$ от нее
б) по дугу: $x\,y$ это дуга окр. с центром в углах и радиусом $5\sqrt{2}$
в) кас-е ω_0 т.е. x, y на окруж. с ц. O и $R = 2\cdot 5\sqrt{2}$
+ все точки внутри фигуры

II)
Если ω_x не $\cap$ ω_0 то $a^2+b^2 \le 14a+2b$; $a^2-14a+49+b^2-2b+1 \le 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$

ω_1 → круг $5\sqrt{2}$ с центром $(1;7)$
должен пересекать ω_x в области под l — Φ_2 ← вне ω_0



Найдём пересечения l с окруж. ω_0 и ω_1.

ω_0) $\frac{625}{49} - \frac{50}{49}b + \frac{b^2}{49} + b^2 = 50 \Rightarrow 2b^2-2b-73=0$

$b = \frac{1 \pm \sqrt{147}}{2}$

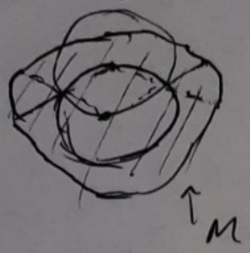
ω_1) $\left(-\frac{24}{7}+\frac{b}{7}\right)^2 + (b-1)^2 = 50$

$\frac{576 - 48b + b^2}{49} + b^2 + 1 - 2b = 50$

$\Rightarrow 2b^2-2b-73=0$
↓
те же самые точки $\Rightarrow$ рад. ось окружностей — l $\Rightarrow$ Φ_1 и Φ_2 симметричны отн. l

№7 вар 22

Необходимо посчитать площадь такой фигуры:



M – ~~окр~~ круг/ пересеч. пересечение двух кругов равных радиусов, центры на окруж-стях.

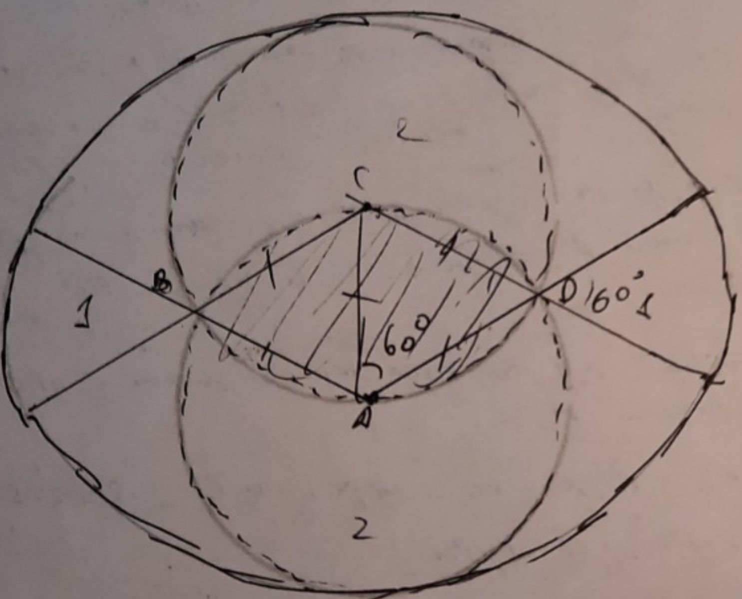
Две области: 1) на $R = \sqrt{2}$ от углов

2) на $2R$ от центров

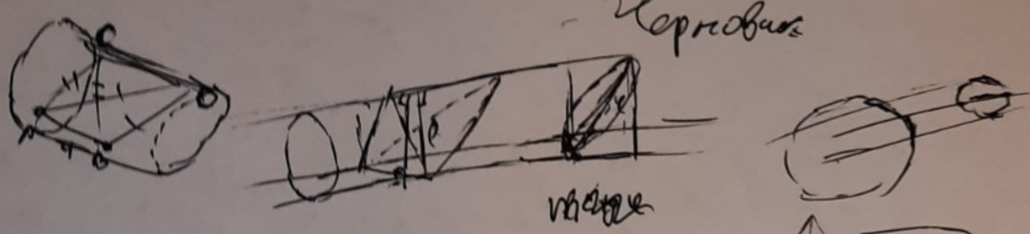
т.к. Δ р/с то угол $\angle BAD = 120°$

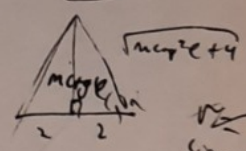
$$S = \underbrace{2\cdot\cancel{\tfrac{120}{360}}\tfrac{2}{3}\pi\cdot 4R^2}_{\text{обл. 2}} + \underbrace{2\cdot\tfrac{1}{3}\pi R^2}_{\text{обл. 1}} - 4\cdot\underbrace{R^2\sin 60°}_{\text{площ. ромб в центре}} = R^2\left(\tfrac{16}{3} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{2}\cdot\frac{12-\sqrt{3}}{2} =$$



Черновик



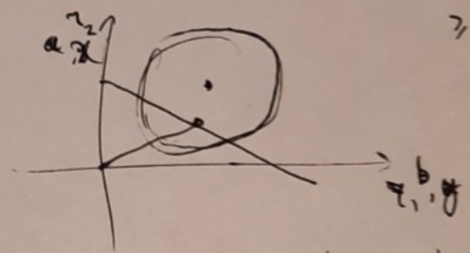


$(a-x)^2+(b-y)^2 \leq 50$

$2R = \frac{x}{\sin\alpha}$ $= \frac{PX}{...} + \frac{4}{PX}$

$5\sqrt{2}$

≥ 2



$14a + 2b \leq 50$

$a < \frac{25-b}{7}$

490

2450

480
576
24

1850
1825
175
75

$1 + 146$

$24/7$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102074**

ID профиля: **260661**

Вариант 22

№4 вар-27

Чистовик

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 2 \cdot 7 \quad (1) \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (2) \end{cases}$ => числа вида $2^{\alpha_i} \cdot 7^{\beta_i}$, причём $\alpha_i \geq 1$ (1) и $\beta_i \geq 1$ (2)

α_1 у a
α_2 у b
α_3 у c

и ∃ одно число у к-го $\beta = 1$; и то. у к-го $\alpha = 1$

$\max(\alpha_i) = 17$ (2); $\max(\beta_i) = 18$ (2)

перебрав все случаи степеней вхождения в abc двойки и семёрки независимо, эти кол-ва необходимо перемножить т.к. НОД(2, 7) = 1

α случаи

~~1.1) две α по 1: 3 случая, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 15$ или $\alpha_2 = 15$ или $\alpha_1 = 15$~~

~~1.2) одна $\alpha_i = 1$: $\alpha_k + \alpha_j = 16$, α_k от 2 до 14 → 13 случаев~~
~~можно выбрать 3 разными i => $N_{1.2} = 13 \cdot 3 = 39$~~

~~=> 42 вар-та распр-я 2^{α_i}~~

$\alpha_i \ \alpha_j \ \alpha_k$

$\alpha_i = 1$ => $\alpha_k = 17$ и α_j = от 1 до 17 => $\underbrace{2 \cdot 17}_{\text{выбор } (j,k)} - 1$ случая

два раза посчитан (1; 17; 17)

Всего случаев (выбор i) $3 \cdot (2 \cdot 17 - 1) = 99$

β случаи $\beta_i = 1$ => $\beta_k = 18$ => β_j от 1 до 18 => случаев $18 \cdot 2 - 1 = 35$
+ в завис. от выбора i $3 \cdot (18 \cdot 2 - 1) = 105$

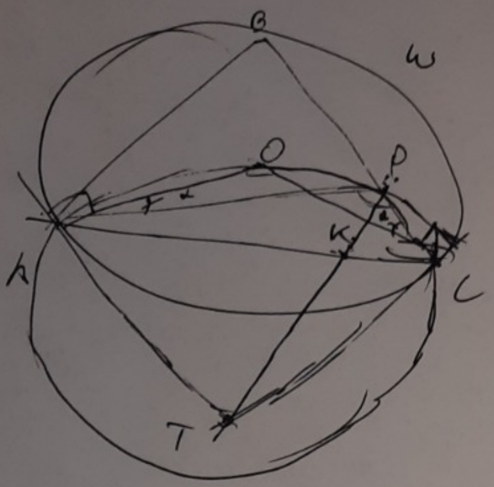
Ответ: $99 \cdot 105 = 945$

Лист 1

21102074 (U260661 M1299140)

Черновик

$$l^2 = (x-R)(x+R) = x^2 - R^2$$
$$x^2 = l^2 + R^2$$

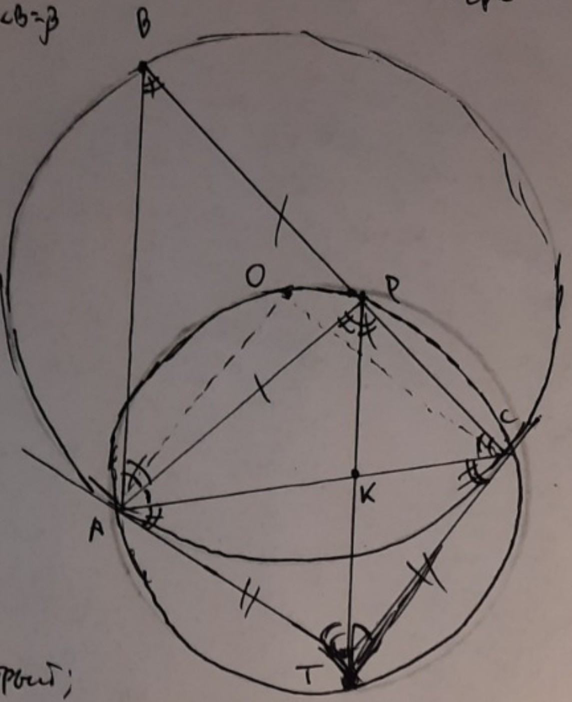


Лист 3

№6, вар 22) Чистовик

в $\triangle APC$ $\quad \dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \dfrac{AK}{CK} = \dfrac{7}{5}$

Пусть $\angle B = \beta$



(кас-е)
$\angle TAO + \angle TCO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
$\Rightarrow TCOA$ – впис $\Rightarrow T \in$ окружности опис о $\triangle AOC$
$\Rightarrow PCTA$ – впис.
Пусть $\angle BCA = \gamma$; $\angle PAC = \Theta$
тогда $\angle PTA = \gamma$ и $\angle PTC = \Theta$
$\Rightarrow \angle AOC = 180^\circ - \angle ATC = 180^\circ - (\gamma + \Theta) =$
$= 2\angle ABC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - \dfrac{\gamma+\Theta}{2}$
(впис угол ω)
$\Rightarrow \angle BAP = 180^\circ - \angle ABC - \gamma - \Theta =$
$= 90^\circ - \dfrac{\gamma+\Theta}{2}$
$\Rightarrow \triangle APB$ – р/б; $PA = PB$

по Th о внис. угле и кас-ых
$\angle ABC = \angle ACT = \angle CAT = \beta$
($AT = CT$ – отрезки кас-ых)
$\beta = \angle APT$ и $\angle CPT$ (впис. 4-х угольник)
$\Rightarrow PK$ – биссектриса $\angle APC$
$\Rightarrow \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{7}{5} \Rightarrow \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{7}{5}$
$\Downarrow$
$S_{ABC} = \dfrac{12}{5} \cdot S_{APC}$
$= \dfrac{12}{5} \cdot (7+5) = \dfrac{144}{5} =$
$= 28{,}8$

β острый;
$tg\beta = \dfrac{3}{4}$
$\Downarrow$
$\sin\beta = 3/5$
$\cos\beta = 4/5$
$\Downarrow$
$\cos 2\beta = 7/25$

$\angle APC$
$\downarrow$
$S_{PAC} = 12 = \frac{1}{2} PC \cdot PA \cdot \sin 2\beta =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} PA^2 \cdot 2\sin\beta\cos\beta$
$\Rightarrow PA^2 = \dfrac{12 \cdot 5}{7} \cdot \dfrac{25}{12} = \dfrac{125}{7}$; $PC = 5\sqrt{\frac{5}{7}}$
$\Rightarrow PA = 7 \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}$

$\Rightarrow$ по Th. cos $\triangle APC$: $AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC \cdot \cos 2\beta =$
$= \dfrac{125 + 245 - 2 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 7/25}{7} =$
$= \dfrac{370 - 98}{7} = \dfrac{272}{7}$
$\Rightarrow AC = 4\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{7}} = \dfrac{4\sqrt{77}}{7}$

лист 4

№5, Вар-22 Чистовик

если $\frac{x}{2}+1=a$; $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$ $\frac{3x}{2}-6=c$

то даны

$\log_{a^2} b$; $\log_{b^{1/2}}(c^2)$; $\log_{c^{1/2}}(a)$

или $0{,}5\log_a b$; $4\log_b c$; $2\log_c a$

или $0{,}5\log_a b$; $\frac{4\log_a c}{\log_a b}$; $\frac{2}{\log_a c}$

по ОДЗ

- $\frac{x}{2}+1>0$ и $\neq 1$
- $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0$ и $\neq 1$
- $\frac{3x}{2}-6>0$ и $\neq 1$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x>-2; \ x\neq 0 \\ x>\frac{17}{14}; \ x\neq \frac{3}{2} \\ x>4; \ x\neq \frac{14}{3} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$x>4$; $x\neq \frac{14}{3}$

$\Rightarrow a>3$

Заметим, что
- $b>a$ при $x>\frac{7}{4}$
- $b>c$ при $x>-\frac{7}{8}$
- $c>a$ при $x>7$

(угл. коэффициенты одних больше других)

т.о. с учётом ОДЗ $b>a$ и $b>c$ всегда

Разберём случаи: I) $0{,}5\log_a b=\frac{2}{\log_a c}$ и $\frac{1}{2}\log_a b=\frac{4\log_a c}{\log_a b}+1$

$\Rightarrow \log_a b\cdot\log_a c=4$ ~~потенцируем~~

$\log_a^3 b-2\log_a^2 b-32=0$

$(\log_a b-4)(\log_a^2 b+2\log_a b+8)=0$

нет реш-й

$c=a$ и $b=a^4\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6\Rightarrow x=7 \\ b=a^4\end{cases}$ $\to b=\frac{81}{4}\neq a^4$

$\Rightarrow$ случай нереализуем

II) $0.5\log_a b=\frac{4\log_a c}{\log_a b}$ и $0.5\log_a b=\frac{2}{\log_a c}+1$ $\Rightarrow \log_a c=\frac{4}{\log_a b-2}$

$\log_a^2 b=8\log_a c$ $\sim$ $\log_a^3 b-2\log_a^2 b=32$ $\Rightarrow$ точно так же

$\log_a b=4\Rightarrow \log_a c=2\Rightarrow \frac{3x}{2}-6=\frac{x^2}{4}+x+1\Rightarrow x^2-2x+28=0$

$x=\varnothing$

III) $\frac{4\log_a c}{\log_a b}=\frac{2}{\log_a c}$ и $0{,}5\log_a b=\frac{2}{\log_a c}-1$ $\Rightarrow \log_a b=\frac{4-2\log_a c}{\log_a c}$

$2\log_a^2 c=4\log_a b\Rightarrow 2\log_a^3 c=4-2\log_a c\Rightarrow \log_a^3 c+\log_a c-2=0$

$(\log_a c-1)(\log_a^2 c+\log_a c+2)=0$

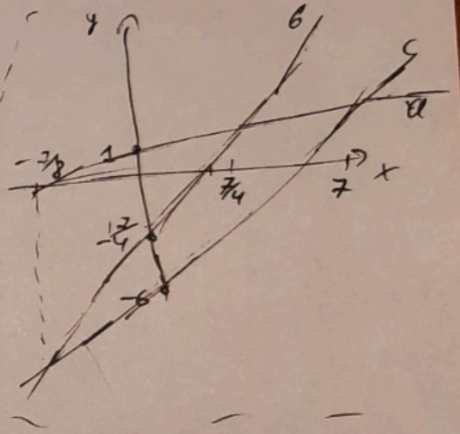
нет реш-й

$x=7\Leftarrow a=c\Rightarrow \log_a b=2$, $b=a^2$

$\Rightarrow a=\frac{9}{2}$

$b=\frac{81}{4}$ $\Leftarrow$ верно

т.о. Ответ: $x=7$



Лист 2