Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102066**

ID профиля: **846131**

Вариант 22

Черновик

S - сумма первых 15.

a_1, a_2, a_3 - состоят из целых чисел

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

12)

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$a_1 - ?$

$$\frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = S$$

$$\frac{a_1 + a_1 + 14q}{2} \cdot 15 = S$$

$$(a_1 + 7q)15 = S$$

$$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$$

$$(a_1 + 6q)(a_1 + 15q) > (a_1 + 7q)15 - 24$$

$$a_7 \cdot a_{16} + 24 > (a_1 + 7q)15 > a_{11} \cdot a_{12} - 4$$

$$(a_1 + 6q)(a_1 + 15q) + 24 > \text{---} > (a_1 + 10q)(a_1 + 11q) - 11$$

$$a_{11} \cdot a_{12} = a_{11}(a_{11} + q)$$

$$15a_1 + 7 \cdot 15q <$$

Черновик

$\frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15$

$\frac{a_1 + a_1 + 14q}{2} \cdot 15$

$15a_8 = S$

$(a_8 - q)(a_8 + 8q) + 24 > 15a_8 > (a_8 + 3q)(a_8 + 4q) - 4$

$a_8^2 + 8a_8q - qa_8 - 8q^2 + 24$

$a_8^2 + 7a_8q - 8q^2 + 24 > 15a_8 > a_8^2 + 7a_8q + \cancel{3a_8q} + 12q^2 - 4$

$a_8^2 + 7a_8q - 8q^2 + 24 - 15a_8 > 0$

$\cancel{3a_8q}$

$a_8^2 + 7a_8q - 15a_8 - 8q^2 + 24 > 0$

$D = (7q - 15)^2 - 4(-8q^2 + 24)$

$49q^2 - 210q + 15^2 + 32q^2 - 96 =$

$= 81q^2 - 210q + 225 - 100 + 4 =$

$= 81q^2 - 210q + 129$ $15 \cdot 15 = 150 + 75 =$

$129 = 3 \cdot 43$ $15 \cdot 15$

$3(27q^2 - 70q + 43)$ $225 - 96 =$

$= \cancel{135}$

$-20q^2 + 28$ $q \in Z$

$28 - 20q^2 =$

$= 4(7 - 5q^2)$

$7 - 5q^2 = 0$

$5q^2 = 7$

$q^2 = \frac{7}{5}$

$4\left(q - \sqrt{\frac{7}{5}}\right)\left(q + \sqrt{\frac{7}{5}}\right)$

$-20\left(q^2 - \frac{7}{5}\right)$

3 1

$20\left(\sqrt{\frac{7}{5}} - q\right)\left(\sqrt{\frac{7}{5}} + q\right)$

Черновик

$q \geq 0$

$q \in N$

$\frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = S$

$\frac{a_1 + 14q + a_1}{2} \cdot 15 = S$

$15 a_8 = S$

$a_7 \cdot a_{16}$

$(a_8 - q)(a_8 + 8q)$

$(a_8 - q)(a_8 + 8q) + 24 > 15 a_8$

$a_8^2 + 7a_8 q - 8q^2 + 24 - 15a_8 > 0$

$a_8^2 + 7a_8 q - 15q^2 - 8q^2 + 24 > 0$

$D = 81q^2 - 210q + 129$

$3(27q^2 - 70q + 43)$

$4900 - 4 \cdot 27 \cdot 43$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 43 \\ \hline 81 \\ 108 \\ \hline 1161 \end{array}$$

266

$1161 \cdot 4 = 4400 + 244 =$

$= 4644$

$266/3 =$

$\cancel{266}$ | $\cancel{3}$

$\cancel{26}$ | $\cancel{8}$

Черновик

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$a_7 \cdot a_{16} + 24 > S > a_{11} \cdot a_{12} - 4$

$\cancel{8b}$ $a_1 = 1$

$q = 1$

$4 \cdot 30 = 120 + 12$

135

$6 \cdot 16 + 24 > \cancel{8} > 11 \cdot 12 - 4$

$120 > 128$

$(a_8 - q)(a_8 + 9q) + 24 > 15a_8 > (a_8 + 3q)(a_8 + 4q) - 4$

$15a^8 > a_8^2 + 7a_8 q + 12q^2 - 4$

$a_8^2 - 15a_8 + 7a_8 q + 12q^2 - 4 < 0$

$\cancel{D} = (7q - 15)^2 - 48q^2 + 16$

$\cancel{49}q^2 - 210q + 225 + 16$

$q^2 - 210q + 241$

210^2 2300

$21 \cdot 21 \cdot 100 = 4 \cdot 241$

23100

$- 4 \cdot 241 =$

$=$

$241 \cdot 4 = 964$

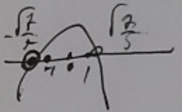
$22100 + 36 =$

$= 22136$

S ;

$-20q^2+25 \geq 7$

$4\left(q-\sqrt{\frac{7}{5}}\right)\left(q+\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$



$q=1$

$(*)$: $a_8^2 + 7a_8 - 8 + 24 > 15a_8 > a_8^2 + 7a_8 + 12 - 4$

$a_8^2 + 7a_8 + 16 > 15a_8 > a_8^2 + 7a_8 + 8$

$\cancel{15(a_1+7) > (a_1+7)^2 - i}$

$\cancel{a_8^2 - 8a_8 + 16 > 0}$

$\cancel{\frac{8 \pm}{2} = 4}$

$\cancel{(a_8 - 4)^2 > 0}$

$\cancel{(a_1+6)(a_1+15) > 15(a_1+7) - 24}$

$\cancel{a_1^2 + 15a_1 + 6a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24}$

$\cancel{a_1^2 + 6a_1 - 15 + 24 > 0}$

$\cancel{a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0}$

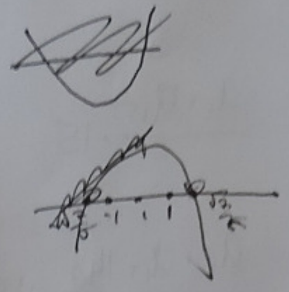
$\cancel{\frac{-6}{2} = -3}$

$\cancel{(a_1+3)^2 > 0}$

$4(7 - 5 \cdot 1) = 8$

$-20q^2+28$

Чернови



$a_1 \geq 0$

$-1 >$

$1 < \sqrt{\frac{7}{5}}$

-20 $\quad$ $20.$

$15 a_8 \in [-20; 20]$

$-20 \leq 15 a_8 \leq 20$

$-\frac{20}{15} \leq a_8 \leq \frac{20}{15}$

$-\frac{4}{3} \leq a_8 \leq \frac{4}{3}$

a_1+7q

21102066 (U846131 M1299169)

Черновик

$a_1 < 2$

$a_4 \cdot a_{12} < 3 \cdot 4$

$a_4 \cdot a_{12} - 15a_8 < 4$

$a_8 > 0$

$(a_8 + q)(a_8 + 4q) - 15a_8 < 4$

$a_8^2 + 5a_8q + 4q^2 - 15a_8 < 4$

$\frac{a_1 + a_2}{2} - a_2$

$a_8 > 0$

$a_{16} > 0$

$a_2 + a_{16}$ $a_{11} \cdot a_{12}$ $a_{11} \cdot a_{12} > 0$ $\frac{45}{110}$

$(a_{14} + 2q)$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 50 \\ a^2 + b^2 \leq \min(14a + 2b, 50) \end{cases}$$

Продолжение 2) Чистовик

$\Rightarrow H_1 = \sqrt{41}$

$2^2 + H_2^2 + 2^2 = AC^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow H_2 = \sqrt{17}$

Тогда CD - либо $H_1 - H_2 = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

либо $CD = H_1 + H_2 = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Ответ $\sqrt{41} - \sqrt{17}$ или $\sqrt{41} + \sqrt{17}$

Чистовик

2) Проведем серединную плоскость к отрезку AB (1)

$AC = CB = 5$

$AD = DB = 7$

Значит эта плоскость проходит через точки C и D

Обозначим ось цилиндра за L

$CD \parallel L$, $AB \perp L \Rightarrow AB \perp CD$

Проведем через т. A плоскость α перпендикулярную прямой L

Заметим B лежит в $\alpha \Rightarrow$

AB - хорда на окружности цилиндра

хорда по длине не превосходит диаметр, значит её половина не превосходит радиус

$R \geqslant \frac{AB}{2} = 2$

Существует цилиндр с $R = 2$

Отрезки BC и BD можно отложить в две стороны $\Rightarrow$ сущ. два варианта расположения точек C и D

Пусть высоты из т. C и D на плоскости, проходящ. через $AB \perp$ оси, обозначим H_1 и H_2,

тогда по т. Пифагора

$2^2 + H_1^2 + 2^2 = AD^2 = 49 \Rightarrow$

Черновик

q - разн. арифм. прогрессии

1) $S = \frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15 = \frac{a_1+a_1+14q}{2}\cdot 15 = a_8\cdot 15$

(3)

$a_7\cdot a_{16}+24 > S > a_{11}\cdot a_{12}-4$

$(a_8-q)(a_8+8q)+24 > S > (a_8+3q)(a_8+4q)-4$

(*) $a_8^2+7a_8q-8q^2+24 > 15a_8 > a_8^2+7a_8q+12q^2-4$

$a_7\cdot a_{16}+24 \in Z$ т.к. a_7

$q = a_{15}-a_{14}$, $a_{15}\in Z$; $a_{14}\in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow q\in Z$ (т.к. прогрессия возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow q\in N$)

$a_7 a_{16}+24 - a_{11}\cdot a_{12}+4 \in Z$

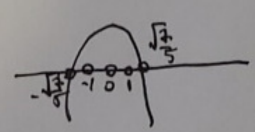
$\Downarrow$

$-8q^2-12q^2+24+4\in Z$

$-20q^2+28 \in Z$

$4(7-5q^2)$

$7-5q^2>0$



q может быть равно $-1;0;1$,

но по условию прогрессия

возрастает $\Rightarrow$ $q=1$

$a_8^2+7a_8-8+24 > 15a_8 > a_8^2+7a_8+8$

$a_8^2+7a_8+16 > 15a_8 > a_8^2+7a_8+8$

$0 < a_1^2+6a_1+9 < 8$

$-3-\sqrt{8} < a_1$

$0 < (a+3)^2 < 8$

$-\sqrt{8} < a+3 < \sqrt{8}$

$a+3\neq 0$

$-3-\sqrt{8} < a < -3+\sqrt{8}$

$-5 \le a \le -1$

$\Downarrow$

Ответ: a_1 либо -5

либо -4

либо -3 - не подх.

-2

21102066 (U846131 M1299169)

-1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102066**

ID профиля: **846131**

Вариант 22

Черновик

Знач. произведение данных логарифмов

$=$

$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right) \cdot \log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2} - 6\right) \cdot$

$\cdot \log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 4.$

Эти 3 логарифма $= y, y, y-1$, тогда

$y^3 - y^2 = 4$

$y^3 - y^2 - 4 = 0$

$(y-2)(y^2+y+2) = 0$

$y^2 + y + 2 = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$

$y = 2$

Получаем $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2$ (либо 1, когда это $y-1$)

$2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2$

$\Downarrow$

$\frac{3x}{2} - 6 = \frac{x}{2} + 1$

$\Downarrow$

$x = 7$

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{3x}{2}-6} = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x}{2} - 6 = \frac{x^2}{4} + x + 1$

$6x - 24 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 28 = 0$ – нет решений

21102066 (U846131 M1299170)

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=14 \\ НОК(a,b,c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

НОД · НОК = a·b·c

a ⋮ 14 b ⋮ 14 c ⋮ 14

$2^{17}\cdot 7^{18}$ $7\cdot 14^{17}$ ⋮ a, b, c

96·102 =

= 9600+192 =

= 9792

66

$9\cdot 18^2\cdot 17^2-8$.

18^2 =

$7^{18}\cdot 2^{17}$ – один член

$7^{[1...18]}$ $2^{[1...17]}$

$18^2\cdot 17^2\cdot 8$

$(18\cdot 17)^2$

$17\cdot 17$ =

C, C₂ $2^{[1...17]}$ $7^{[1;...18]}$

$\underline{17^3\cdot 18^3}$

$18^3\cdot 17^3-17^3\cdot 16^3=$

$=17^3(18^3-16^3)=$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2$

17^3

$(10+7)^3$

$1000+300\cdot 7+30\cdot 49+7^3$

$18^3\cdot 17^3-17^3\cdot 16^3$

$2^3\cdot 17^3(9^3-8^3)$

11+72=64

$8\cdot 17^3\cdot(729-512=$

$217\cdot 8\cdot 17^3$

21102066 (U846131 M1299170)

Церявин

Заметим, что A, B, C – делители. НОК

НОК = $2^{17} \cdot 7^{18}$.

Значит у чисел простыми делителями являются только степени простых 2 и 7

пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\varphi_1} \cdot 7^{\varphi_2}$,

тогда из условия НОД имеем для 2:

$\min(\alpha_1, \beta_1, \varphi_1) = 1$

из условия НОК:

$\max(\alpha_1, \beta_1, \varphi_1) = 17$

Получаем тройки вида:

$(k, 1, 17), (1, k, 17), (1, 17, k)$,

где $k \geq 1$ и $k \leq 17$ =>

=> без учета повторений имеем

$6 \cdot 17$, но

тройки $(1;1;17)$, $(1;17;1)$, $(17;1;1)$, $(17;17;1)$ $(17;1;17)$ и $(1;17;17)$

мы посчитали по 2 раза.
по правилу

Значит, всего вариантов выбрать 2

$3! \cdot 17 - 6 = 96$

Аналогично для 7, получаем:

$3! \cdot 18 - 6 = 102$

и т.к. степени 2 и 7 не связаны

то берем произведение

Ответ: $96 \cdot 102 =$
$= \underline{9792}$

21102066 (U846131 M1299170)

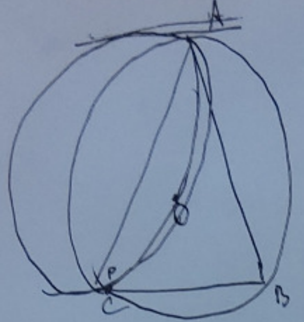
<u>Черновик</u>

$$\log_{\left|\frac{x}{2}+1\right|}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \log_{\left|\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right|}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$$

$$8\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6+\frac{x}{2}+1\right) = 1$$

$$8\log_{\dots}(2x-5) = 1$$

Черновик



$S_{\triangle ABC}$

$\angle ABC - arctg\, 3/4$

$AC - ?$

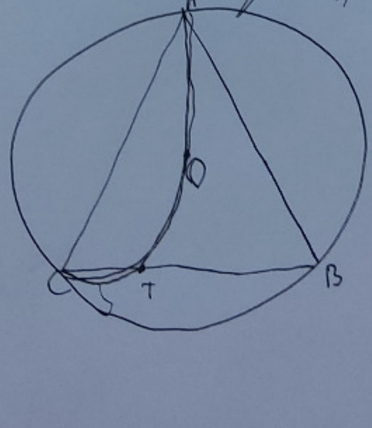
$$\cancel{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2}$$

$$\cancel{\log_{\frac{x}{2}+1}}$$

$$\cancel{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 8\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}$$

$$\cancel{1 = 8\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6+\frac{x}{2}+1\right) =}$$

$$\cancel{(x-5)}$$



Чистовик (3)

5) Продолжение:

Таким образом единственный ответ: $\underline{x=7}$

Подставим:

$\frac{x}{2}+1>0; \neq 1$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0; \neq 1$

$\frac{3x}{2}-6>0; \neq 1$

Значит все выражения существуют и >0

Ответ: 7

21102066 (U846131 M1299170)

Черновик

Таким образом единственный ответ $x=7$

подставим

$\frac{x}{2}+1>0; \neq 1$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0; \neq 1$

$\frac{3x}{2}-6>0; \neq 1$

Значит все выражения положительны и существуют

Ответ: $x=7$.

Чистовик

2

5) Рассмотрим произведение данных логарифмов:

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2\cdot\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)\cdot$$

$$\cdot\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=4$$

Эти 3 логарифма $= y, y, y-1$, тогда

$$y^3-y^2=4$$

$$y^3-y^2-4=0$$

$$(y-2)(y^2+y+2)=0$$

$$y^2+y+2=\left(y+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

$$\underline{y=2}$$

Получаем:

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2$$

(либо 1, когда это $y-1$)

$$2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x}{2}-6=\frac{x}{2}+1$$

$$\Downarrow$$

$$x=7$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=\frac{x}{2}+1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x}{2}-6=\frac{x^2}{4}+x+1$$

$$6x-24=x^2+4x+4$$

$x^2-2x+28=0$ – нет решений

Черновик

1) 4) Заметим, что a, b, c – это делители НОК

$НОК = 2^{17} \cdot 7^{18}$

Значит у всех простым делителем являются только степени простых 2 и 7

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$

$c = 2^{\varphi_1} \cdot 7^{\varphi_2}$

Тогда из условие НОД имеем для $\boxed{2}$:

$\min(\alpha_1; \beta_1; \varphi_1) = 1$

из условие НОК:

$\max(\alpha_1; \beta_1; \varphi_1) = 17$

Получаем тройки вида:

$(k;1;17), (1;k;17), (1;17;k),$

$(k;17;1), (17;k;1), (17;1;k).$

~~...~~ $\Rightarrow$

где $\underline{17 \geq k \geq 1}$ $\Rightarrow$

$96 \cdot 102 = \underline{9792}$

$\Rightarrow$ без учета повторений имеем

$6 \cdot 17$, но тройки:

$(1;1;17), (1;17;1), (17;1;1),$

$(17;17;1), (17;1;17), (1;17;17)$

мы посчитали дважды

Ответ: 9792

Значит всего ~~...~~ вариантов выбрать:

$3! \cdot 17 - 6 = \underline{6 \cdot 17 - 6 = 96}$

Аналогично для $\boxed{7}$, получаем:

$\underline{3! \cdot 18 - 6 = 102}$

И т.к. степени 2 и 7 не связаны, то берем произведение

21102066 (U846131 M1299170)