Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102024**

ID профиля: **321232**

Вариант 22

Чистовик (1)

№ 1.

$d > 0$

a_1 – I член, d – разность; – $\mathbb{Z}$ числа $\Rightarrow d \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1, a_2, \ldots$

$$S = a_1 + \ldots + a_{15} = 15a_1 + \frac{15 \cdot 14}{2} d = 15a_1 + 105d$$

$$a_7 a_{16} = (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) = a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2$$

$$a_{11} a_{12} = (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2$$

$\Rightarrow$ Из условия: $\begin{cases} a_7 a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases}$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > (15a_1 + 105d) - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 < (15a_1 + 105d) + 4 \end{cases} \ominus$$

$$\Rightarrow 20d^2 < 28 \Rightarrow d^2 < \frac{28}{20}; \; d \in \mathbb{Z}; \; d > 0$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Из (1): $a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + \overset{81}{105 - 24}$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \Rightarrow (a_1 + 3)^2 > 0$

$\Rightarrow a_1 \neq -3$

Из (2): $a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + \overset{109}{105 + 4}$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$; $D = 36 - 4 \cdot 1 = 32$

$\Rightarrow a_1 \in \left(\frac{-6 - \sqrt{32}}{2}; \frac{-6 + \sqrt{32}}{2}\right)$, т.е

$a_1 \in (-3 - \sqrt{8}; -3 + \sqrt{8}) \Rightarrow a_1 \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2})$

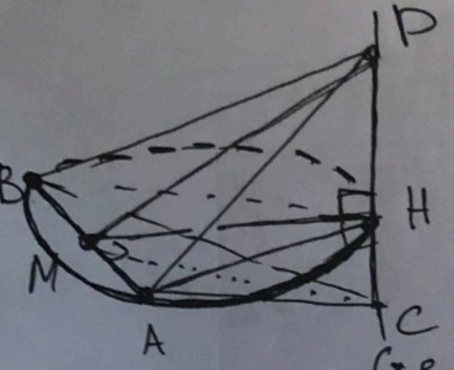
(1), (2) $\Rightarrow$ ~~Ответ: $a_1 \in (-3-2\sqrt{2})$~~ $a_1 \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3) \cup$

$\cup (-3; -3 + 2\sqrt{2})$; $a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

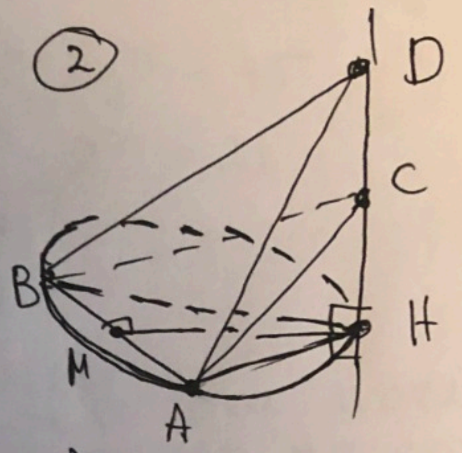
$\Rightarrow$ Ответ: $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

№2.

①



②



Возьмём ⊥ сечение искомого цилиндра (т.е. оно ⊥ оси), содержащее AB. Оно также содержит т. $H \in$ $\in$ пр CD. Заметим: 1. $\triangle BHA$ – равноб, т.к. $\triangle BDC = \triangle ADC$ по 3 сторонам и $\triangle HBD = \triangle HAD$ по 2 ст. и $\angle$ между ними.

2. Т т. M – середина AB $\Rightarrow$ т.к. $\triangle BAH$ – равноб, то $HM \perp AB$.

3. Т.к. сечение $\perp$ оси $\Rightarrow MH \perp DC$, т.е MH - высота $\triangle DMC$.

4. R опис $\triangle BHA = R$ цил.

Теперь используем всё это. Пусть $MH = h$; $BH = AH = a$. $BM = AM = \frac{AB}{2} = 2$; $AB = 4$

$$S = \frac{a \cdot a \cdot 4}{4R} \Rightarrow S = \frac{a^2}{R} \Rightarrow R = \frac{a^2}{S} = \frac{a^2}{\frac{h \cdot 4}{2}} =$$

$$= \frac{a^2}{2h} = \frac{h^2 + 2^2}{2h} = \frac{h}{2} + \frac{2}{h} \geq 2 \Rightarrow R_{min} = 2 \text{ при}$$

$h = 2$ (т.е. BHA – равноб ⊾ $\triangle$)

Чистовик (3)

№2 (прод)

$\Rightarrow MH = 2. \Rightarrow MH^2 = 4$ Из Т. Пифагора.

В $\triangle DMC$: $MD^2 = 7^2 - 2^2 = 45$

$MC^2 = 5^2 - 2^2 = 21$

$DH = \sqrt{MD^2 - MH^2} = \sqrt{41}$

$HC = \sqrt{MC^2 - MH^2} = \sqrt{17}$

$\Rightarrow DC = DH \pm HC$ (высота могла находиться на отр DC, а могла нет: 1 и 2)

$\Rightarrow DC_1 = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

$DC_2 = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Ответ: $CD_1 = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

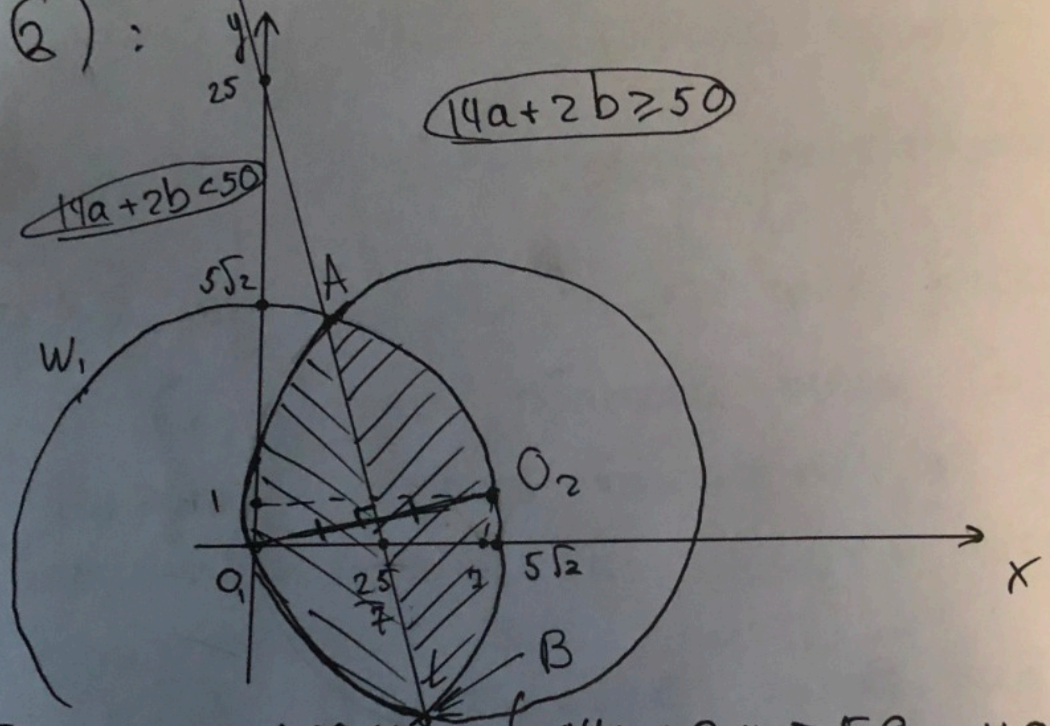
$CD_2 = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Чистовик (4)

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b; 50) & (2)\end{cases}$$

1) Найдем множество т. $(a;b)$ удовлетворяющих (2):



Разделим прямой $l: 14x+2y \ge 50$ на 2 области:

- При $14x+2y \ge 50$: $a^2+b^2 \le 50$ – часть круга, обрезанная пр. l. Круг W_1: $O_1(0;0)$; $R_1 = 5\sqrt{2}$
- При $14x+2y < 50$: $a^2+b^2 \le 14a+2b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2-14a+49+b^2-2b+1 \le 50 \Leftrightarrow (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$ – круг, обрезанный пр l; Круг W_2: $O_2(7;1)$; $R_2 = 5\sqrt{2}$

Заметим: 1. $O_1 \in W_2$; $O_2 \in W_1$, т.к $O_1O_2 = 5\sqrt{2}$

2. Пусть $W_1 \cap W_2 =$ т. A и т. B. $l \ni$ т A и т. B (т.к. $l \perp O_1O_2$, l делит O_1O_2 пополам)

21102024 (U321232 M1299485)

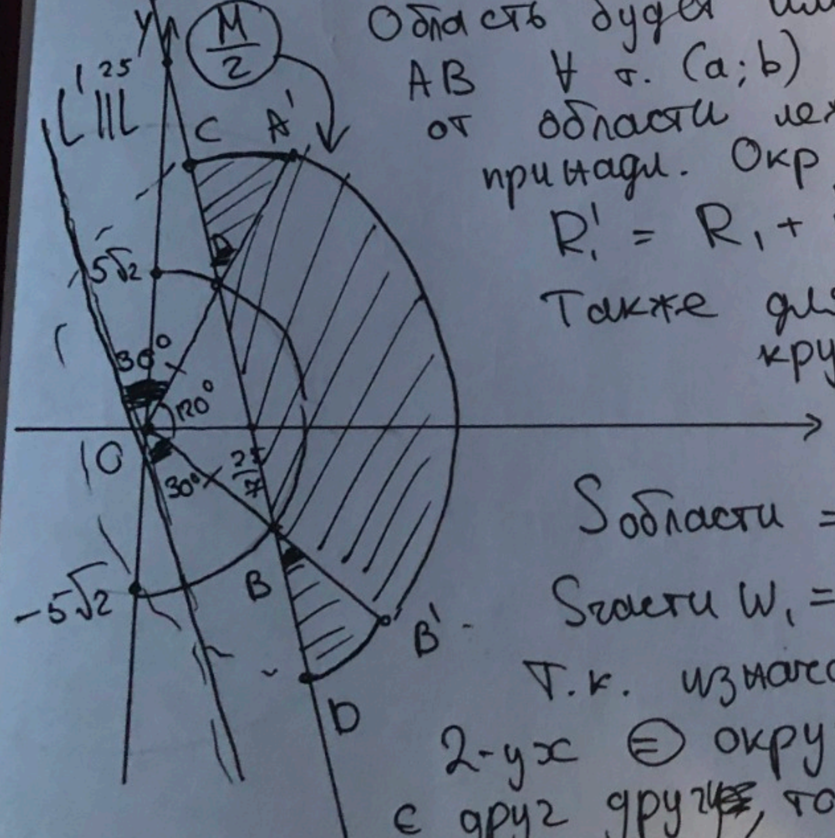
№3 (прод)

Таким образом искомая область для т $(a;b)$ – 2 малых равных сектора кругов W_1 и W_2 при меньших дугах AB.

~~2) Из (1) ⇒ что расстояние до ∀~~

2) Из (1) ⇒ что min расстояние от т. $(x;y)$ до области точек $(a;b) \le \sqrt{50}$

Найдем область таких т. $(x;y)$ с одной стороны от прямой L, т.к. ситуация симметрична отн. пр L.



Область будет иметь вид: На дуге AB ∀ т. $(a;b)$ max удалённая т. $(x;y)$ от области лежит на дуге A'B', принадл. Окр W_1'; O_1' и O_1 совпадают, $R_1' = R_1 + \sqrt{50} = 2R_1$

Также для т. A и B: сектора кругов с центрами в т A и т B и с $R = \sqrt{50} = R_1$

$$S_{\text{области}} = S_{\text{части } W_1'} + 2S_{\text{секторов}}$$

$$S_{\text{части } W_1} = k \cdot \pi R_1'^2 - S_{\triangle AOB}$$

Т.к. изначально т A и B – т. ⑪ 2-ух ⊖ окружностей, центры которых ∈ друг другу, то $\angle BOA = 120^\circ \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow S_{\text{части } W_1'} = \frac{\pi}{3} \cdot 4 \cdot 50 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \sin 120^\circ = \frac{200}{3}\pi - \frac{25}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{\text{секторов}} = \frac{\pi}{2 \cdot 6} \cdot R_1^2 = \frac{\pi}{12} \cdot 50 = \frac{\pi}{6} \cdot 25$$

Чистовик (6)

№3 (конец)

$\Rightarrow S_{области} = \frac{200\pi}{3} - 25\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 25 =$

$= \frac{200\pi}{3} + \frac{25\pi}{3} - 25\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{225\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S_{итог} = 2 S_{области} = \frac{450\pi}{3} - 25\sqrt{3}$

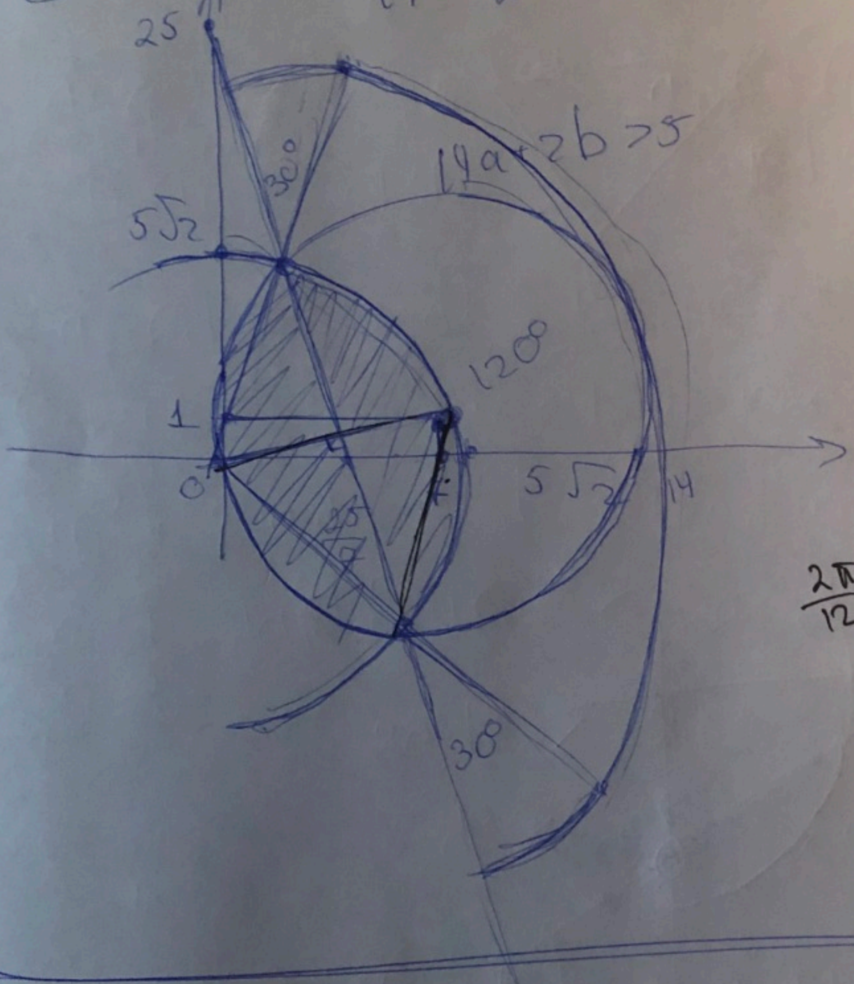
Ответ: $S = \frac{450\pi}{3} - 25\sqrt{3}$

③

Черновик

$\times 2$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;\ 50) \end{cases}$$



$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$

$S = \pi R^2$

$\frac{2\pi}{12}$

$\sin 120^\circ =$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

②

$S = \frac{abc}{4R}$

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a^2 c}{4 \cdot \frac{ch}{2}} =$

$= \frac{a^2}{2h} = \frac{h^2+4}{2h} =$

$= \frac{h^2}{2h} + \frac{4}{2h} = \frac{h}{2} + \frac{2}{h}$

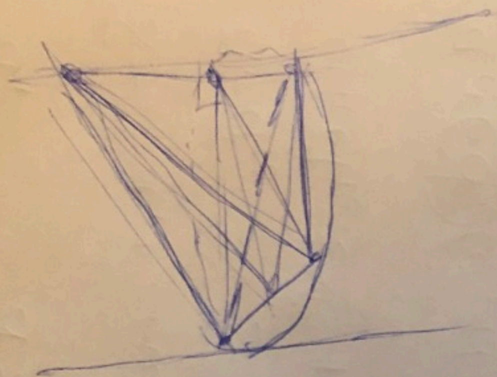
$\Rightarrow R_{min} = 2;\ h = 2$

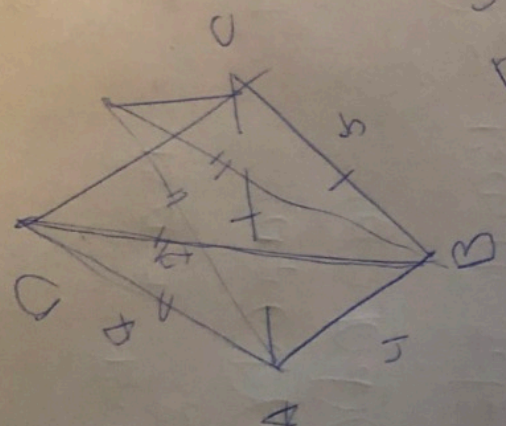
Считать CD

$20 \cdot 2$

№2

$AB=4$
$AC=CB=5$
$AD=DB=7$
$CD \parallel O_1O_2$





$S=\frac{abc}{4R}$

$R=\frac{abc}{4S}$

$R=\frac{abc}{2hc}=$

$=\frac{ab}{2h}=$

$=\frac{a^2}{2h}=$

$=\boxed{\frac{h^2+4}{2h}}=$

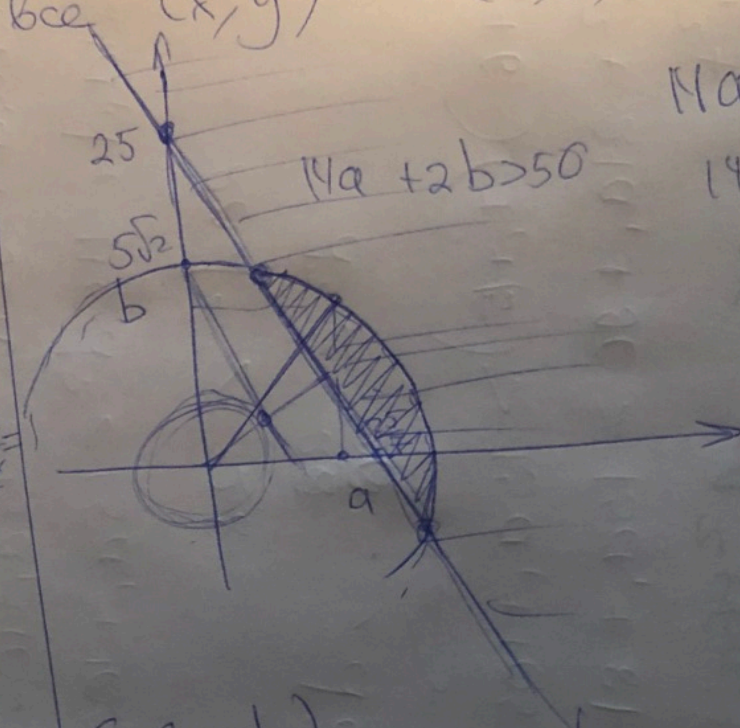
$=\frac{h}{2}+\frac{2}{h}\geq 2$

$h=2$

③

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 50 \\ a^2+b^2 \leq \min(14a+2b;\, 50)\end{cases}$$

все $(x;y)$ $\exists\,(a;b)$



$14a+2b>50$

$14x_0+2y_0>50$

$7x_0+y_0>25$

$y_0>25-7x_0$

$x_0>\frac{25}{7}$

Черновик

$C(a;b)$
$Z(x;y)$

$|CZ|\leq 50$

$|C|\leq \min(14a+2b;50)$

$a^2+b^2\leq 14a+2b$

$a^2-14a+b^2-2b\leq 0$

$(a-7)^2+(b-1)^2\leq 49+1=50$

№3 (ко

$15 \cdot 7 = 105$

$S_{обл}$

$\frac{.00\pi}{3}$

$S_{ито}$

№1

$d \in \mathbb{Z}$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 \quad d > 0 \quad \in \mathbb{Z}$

$S = a_1 + \ldots + a_{15} = 15a_1 + \frac{15 \cdot 14}{2} d = 15a_1 + 105d$

$a_7 a_{16} > S - 24 \qquad (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > S - 24$

$a_{11} a_{12} < S + 4 \qquad (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < S + 4$

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 15a_1 + 105d - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

$20d^2 < 28$

$d^2 < \frac{28}{20}$; $d \in \mathbb{Z}$; $d > 0$

$\Rightarrow d = 1$

$\Rightarrow (a_1 + 6)(a_1 + 15) > 15a_1 + 105 - 24$

$a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \qquad D = 36 - 4 \cdot 1 =$

$a_1^2 + \qquad a_1^2 + 6a_1 + 9 \qquad = 32$

$a = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} =$

$= -3 \pm \sqrt{8}$

$2 \cdot 1{,}41 =$

$= 2{,}81$

кв. ур-ние.

Черновик

21102024 (U321232 M1299485)

Часть 2

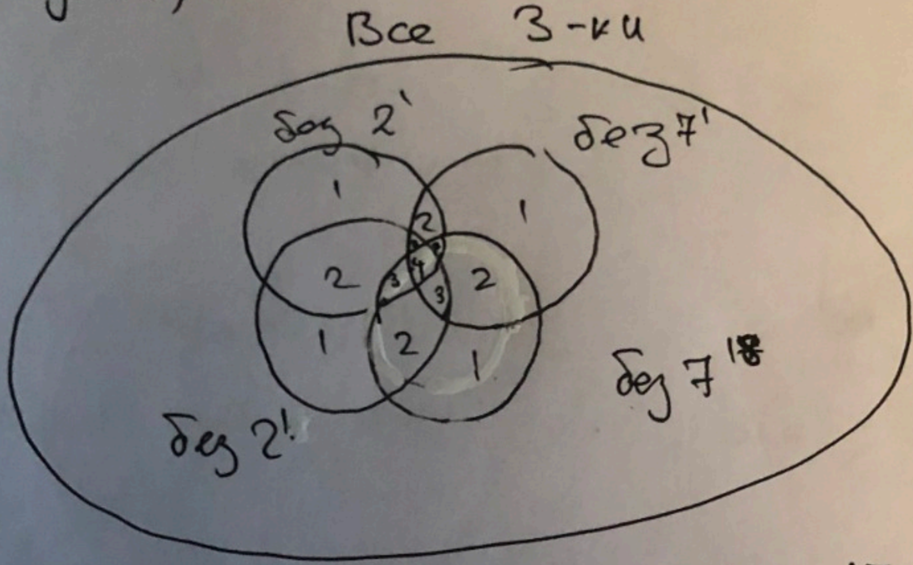
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102024**

ID профиля: **321232**

Вариант 22

~~№3~~ №4 (продолж)



Кол-во 3-ёк с $2^1, 2^{17}, 7^1, 7^{18}$:

Об. кол-во − ((без 2^1 + без 7^1 + без 2^1 + без 7^{18}) −
− (без 2^1 и 7^1 + без 2^1 и 7^{18} + без 2^{17} и 7^1 + без 2^{17} 7^{18} +
+ без 2^1 и 2^{17} + без 7^1 и 7^{18}) + без всех 4-ёх) =

$$= (17\cdot18)^3 - 2(16\cdot18)^3 - 2(17\cdot17)^3 + 4(16\cdot17)^3 + (15\cdot18)^3 + (17\cdot16)^3 - (15\cdot16)^3 =$$

$$\boxed{= (17\cdot18)^3 + 4(16\cdot17)^3 + (15\cdot18)^3 + (17\cdot16)^3 - 2(16\cdot18)^3 - 2(17\cdot17)^3 - (15\cdot16)^3}$$

Ответ:

Чистовик 3

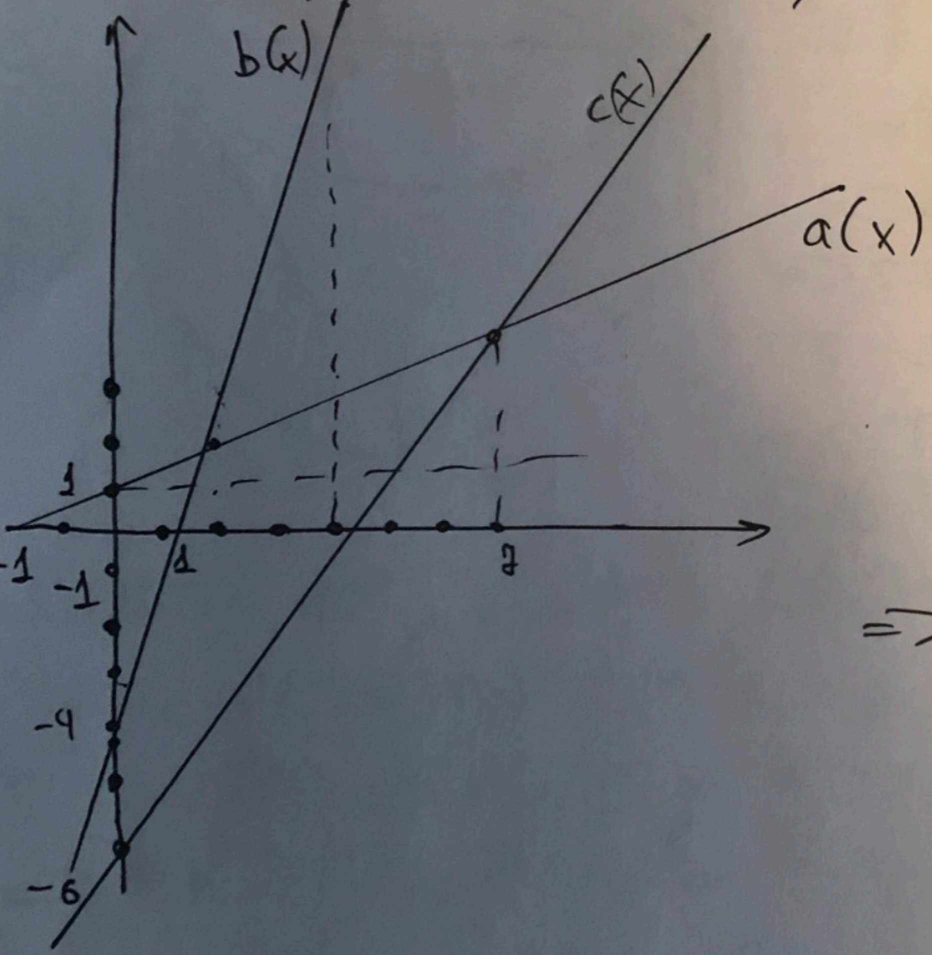
№ 5

7 $a=(\frac{x}{2}+1)$; $b=\frac{\cancel{8}7x}{2}-\frac{17}{4}$; $c=\frac{3x}{2}-6$

ОДЗ: $x>4$; $x\neq\frac{14}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_a b$; $4\log_b c$; $2\log_c a$

Посмотрим на $a(x)$; $b(x)$; $c(x)$:



$\Rightarrow b>a>1$

$b>c>1$

при $x>7$:

$c>a>1$

иначе :

$a>c>1$

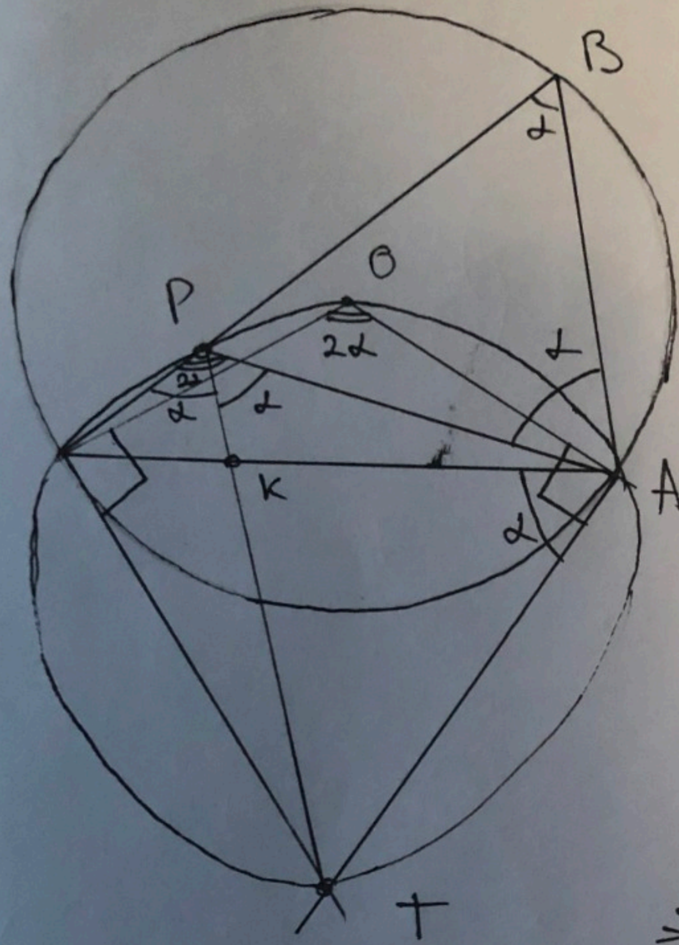
$\Rightarrow \log_a b>1$

$\log_b c<1$

$\log_c a>1$ при $x>7$

$\log_c a<1$ при $x<7$

~~№~~ № 6 а) Чистовик (4)



1) т. T ∈ опис окр △AOC, т.к. $CT \perp OC$, $OA \perp AT \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCT = \angle OAT = 90°$

$\Rightarrow$ OCAT – впис.

2) Пусть $\angle ABC = \alpha$

$\Rightarrow \angle COA = 2\alpha$

$\Rightarrow \angle CPA = \angle COA = 2\alpha$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle CPA$ внешний, то $\angle PBA + \angle PAB = \angle CPA \Rightarrow \angle BAP = \alpha$

$\Rightarrow$ △PBA – равноб.

$\angle OAT = 90°$; $\angle OAC = \frac{180-2\alpha}{2} = 90-\alpha$ (из △COA)

$\Rightarrow \angle CAT = 90-(90-\alpha) = \alpha$

$\Rightarrow \angle CPT = \angle CAT = \alpha \Rightarrow \angle CPK = \angle CBA \Rightarrow$

$\Rightarrow PK \parallel AB. \Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA$

Т.к. $\frac{S_{CPK}}{S_{KPA}} = \frac{CK}{KA} = \frac{5}{7} \Rightarrow k$ подобия $= \frac{CK}{AC} = \frac{5}{12}$

$S_{ABC} = \frac{1}{k^2} \cdot S_{CPK} = \cancel{\left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot 5} \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 5 =$

$= \frac{144}{5} = 28{,}8$ а) Ответ: 28,8

21102024 (U321232 M1299486)

Черн.

№ 4. $m \geq 1$ $n \geq 1$ $2^m \cdot 7^n$

НОД $(a;b;c) = H = 2 \cdot 7$ $\boxed{2^{17}}$ $\boxed{7^{18}}$

НОК $(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

a	b	c
$2 \cdot 7$	$2 \cdot 7$	$2 \cdot 7$

$\overset{2}{2 \to 16}$ $\overset{7}{2 \to 17}$

$$\frac{(15 \cdot 16)^3}{6}$$

$\cancel{2^{16}}$ $\cancel{7^{17}}$

2^{17} 7^{18} 2 7

2^m 7^n

2^{17}	2^m	2
2^{17}	2^{17}	2
2^{17}	2	2

№ 4

Игра. 8 случаев

$2^{17}\ 7^{18}$	$2^{17}\ 7^{18}$	$2\cdot 7$
$2^{17}\ 7^{18}$	$2^{17}\ 7$	$2\cdot 7^{18}$
$2^{17}\ 7^{18}$	$2^{17}\ 7$	$2\cdot 7$
$2^{17}\cdot 7$	$2^{17}\cdot 7$	$2\cdot 7^{18}$
$2^{17}\cdot 7^{18}$	$2\cdot 7^{18}$	$2\cdot 7$
$2^{17}\cdot 7$	$2\cdot 7^{18}$	$2\cdot 7^{18}$
$2^{17}\cdot 7^{18}$	$2\cdot 7$	$2\cdot 7$
$2^{17}\cdot 7$	$2\cdot 7^{18}$	$2\cdot 7$

C_3

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$

$2:1 \longrightarrow 17$

$7:1 \longrightarrow 18$

нет 7^{18} нет 2^{17}

нет 7 нет 2

1 1

17 18

$(17\cdot 18)^3 - ((17\cdot 17)^3$

$(17\cdot 18)^3 - ((17\cdot 17)^3 + (17\cdot 17)^3 +$

$+ (16\cdot 18)^3 + (16\cdot 18)^3 -$

$- 3\cdot(15\cdot 16)^3)$

№5. Черн.

$\log_{a^2} b^2$; $\log_b c^4$, $\log_c a$

$\log_a b$; $4\log_b c$; $\log_c a$

$b>0$
$c>0$

$\log_{a^2} b$; $\log_{\sqrt{b}} c^2$, $\log_{\sqrt{c}} a$

$\frac{7x}{2} > \frac{17}{4}$

$\frac{1}{2}\log_a b$; $4\log_b c$; $2\log_c a$

$7x > \frac{17}{2}$

$x > \frac{17}{14}$

$\frac{x}{2}+1 = \frac{3x}{2} - 6$

$2\frac{1}{\log_c a}$

$7 = x$

$x > 4$

$\log_a b = 8\log_b c$

$x \neq \frac{14}{3}$

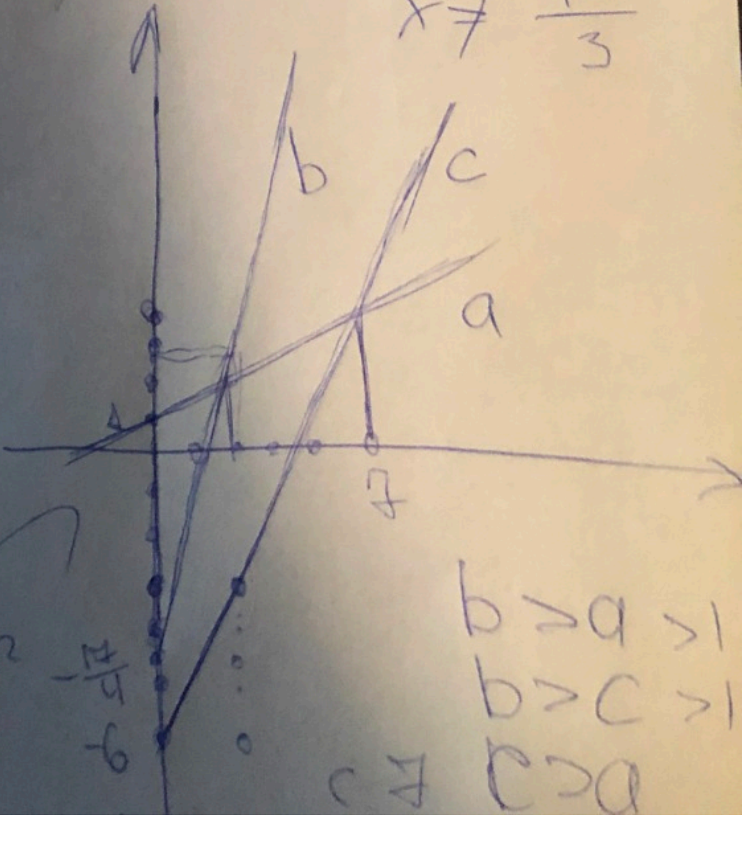
$\frac{1}{2}\log_{a^2} b = 4\log_b c$

$\log_{a^2} b = \log_b c^4$

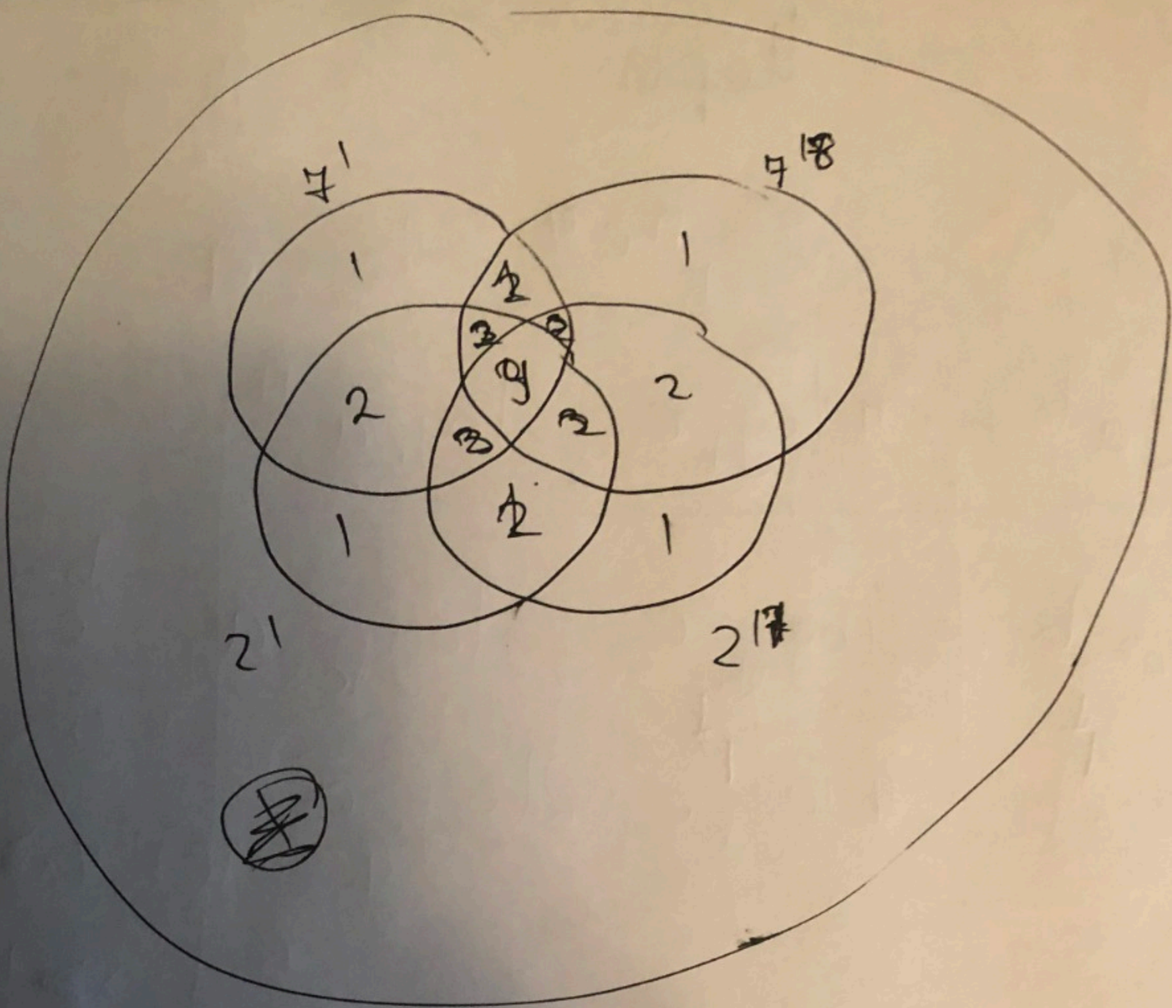
$\frac{1}{\log_b a^2} = \log_b c^4$

$(a^2)^{(\log_{a^2} b)^2}$

$b^{\log_{a^2} b} = c^4$ $a^{(\log_a b)^2}$

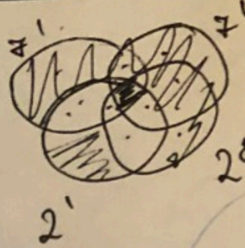


$b > a > 1$
$b > c > 1$
$c \neq$ $c > a$



Цер

№ 6 Черн -

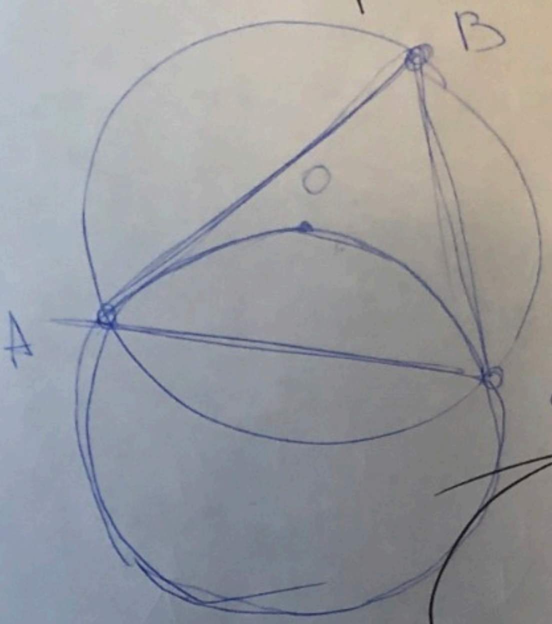


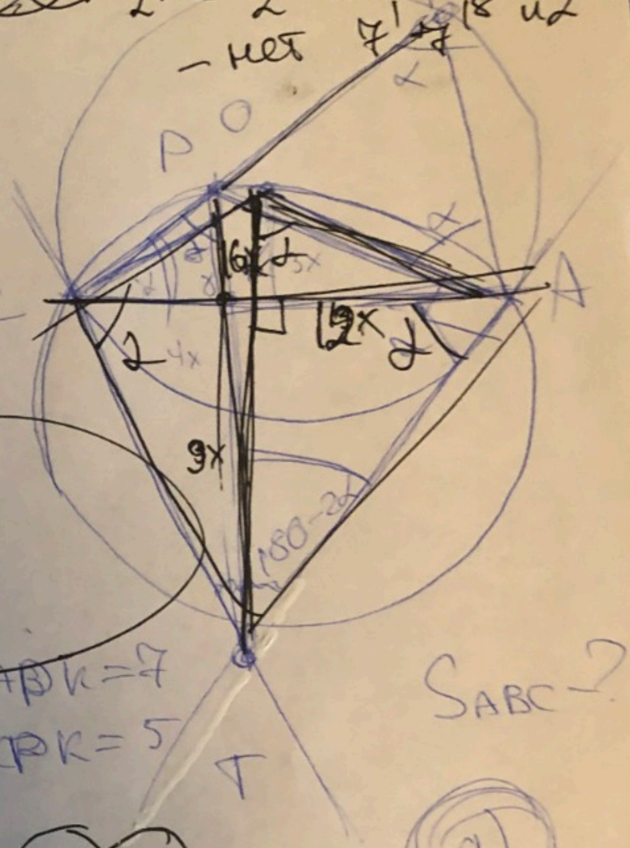
все – нет 2'

– 2' и нет 7'

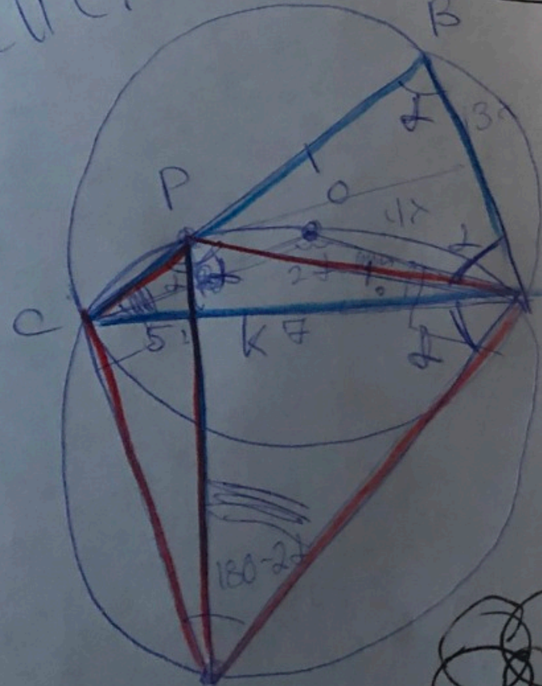
2^{17} – 2' и нет 2^{17}

– нет 7' 7^{18} и 2^{17}





PKUCA

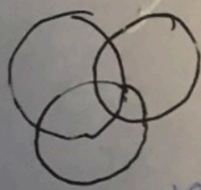


$S_{ABK}=7$

$S_{PBK}=5$

S_{ABC} ?

a)

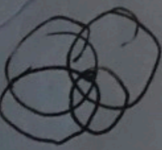


$\cancel{180-2\alpha-\beta}$

$\alpha-(90-\alpha)+90=$

$=\alpha+90-((180-\alpha-\beta)-$

$-(\alpha+90-\alpha))=$



$180-2\alpha-\beta+$

$+90-(90-\alpha)=$

$=180-\alpha-\beta$

$=\alpha+90-(90-180+\alpha+\beta)=$

$=\alpha+90-(\alpha+\beta-90)=180-\beta$

~~[scribble]~~ №4 Чистовик 1

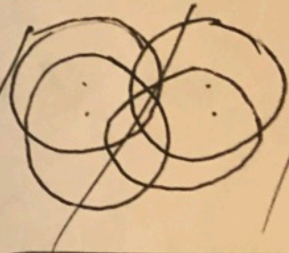
$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 2\cdot 7 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 1. Каждое из чисел a, b и c имеет вид $2^n \cdot 7^m$

2. min степень двойки $=1$, $\max = 17$
min степень 7-ки $=1$, $\max = 18$, числа с такими степенями 2 и 7 обязательно входят в $\forall$ тройку.

Всего троек возможно: $\underset{\text{ст. 2}}{(17}\cdot\underset{\text{ст 7}}{18)}^3$ — 3 числа

~~Тройки – без 2^1: $(16\cdot 18)^3$~~
~~– без 2^{17}: $(16\cdot 18)^3$~~
~~– без 7^1: $(17\cdot 17)^3$~~
~~– без 7^{18}: $(17\cdot 17)^3$~~
~~– без $2^1, 2^{17}, 7^1, 7^{18}$: $(15\cdot 15)^3$~~



Тройки: без 2^1: $(16\cdot 18)^3$
без 2^{17}: $(16\cdot 18)^3$
без 7^1: $(17\cdot 17)^3$
без 7^{18}: $(17\cdot 17)^3$

без 2^1 и 2^{17}: $(15\cdot 18)^3$
без 2^1 и 7^1: $(16\cdot 17)^3$
без 7^1 и 7^{18}: $(17\cdot 16)^3$
без 7^{18} и 2^{17}: $(16\cdot 17)^3$

без 2^1 и 7^{18}: $(16\cdot 17)^3$
без 7^1 и 2^{17}: $(16\cdot 17)^3$

без $2^1, 2^{17}, 7^1, 7^{18}$: $(15\cdot 16)^3$