Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101910**

ID профиля: **289746**

Вариант 22

Чистовик лист 1.

№1.

Пусть d – разность прогрессии, причем, т.к. она возрастающая, то $d>0$, а, т.к. ~~прогрессия~~ $a_n \in \mathbb{Z}$; $a_1 \in \mathbb{Z}$; $a_2 \in \mathbb{Z}$; $a_2 = a_1 + d \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$. Т.к. $d>0$, то $d \in \mathbb{N}$.

$$S = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{a_1 + a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15.$$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} \geq S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > \cancel{S-24}\ 15a_1 + 105d - 24 \\ -(a_1+10d)(a_1+11d) > -(a_1+7d) \cdot 15 - 4. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 90d^2 + 21a_1 d > 15a_1 + 105d - 24 \\ -a_1^2 - 110d^2 - 21a_1 d > -15a_1 - 105d - 4 \end{cases} \oplus \Rightarrow -20d^2 > -28$$

$20d^2 < 28$

$d^2 < 1{,}4 < 4 \overset{d \geq 0}{\Rightarrow} d < 2$. Т.к. $d \in \mathbb{N}$; $d = 1$ – единственный возможный вариант.

Вернемся к системе, подставив вместо d 1:

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a + 9 \neq 0 \\ a_1^2 + 6a + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 & (1) \\ a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}). & (2) \end{cases}$$

$2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow -3-2\sqrt{2} > -6.$

$-3+2\sqrt{2} < 0.$

Тогда целые a_1, подходящие в (2):

$a_1 \{-5; -4; -3; -2; -1\}$. С учетом (1), ~~того, что~~

$a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$.

Ответ: $\{-5; -4; -2; -1\}$.

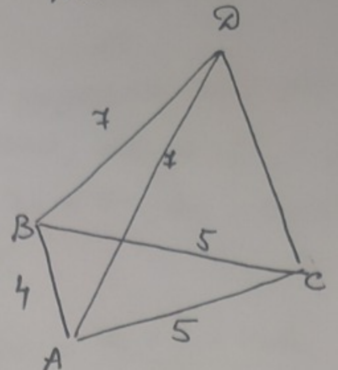
См. лист 2

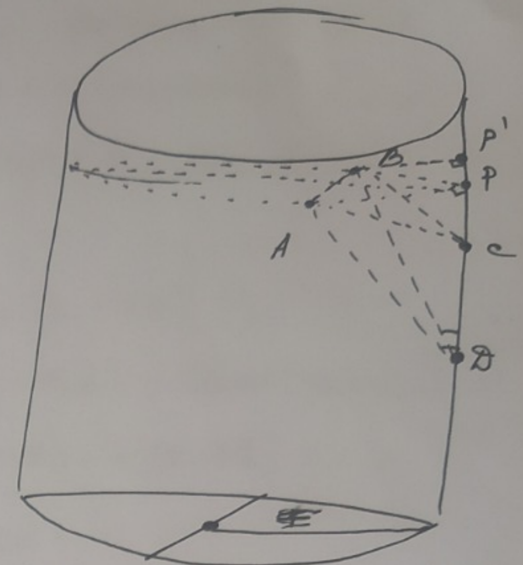
21101910 (U289746 M1303004)

Чистовик лист 2

№2.

Дано:
ABCD – тетраэдр
$AB = 4$
$AC = BC = 5$
$AD = BD = 7$



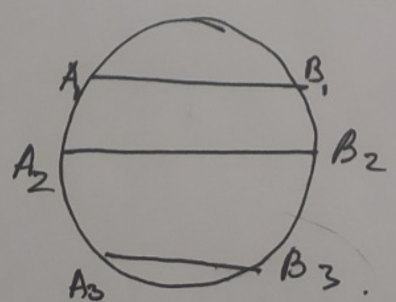


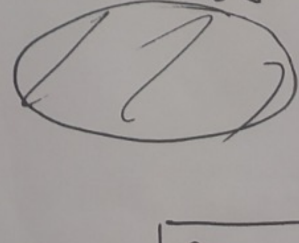
~~Пусть P – проекция точки A на CD, P' – проекция точки B. Тогда, т.к. $AD = BD$, $AP = BP'$. Рассмотрим $\triangle APD$ и $BP'D$: $AD = BD$; $AP = BP'$ ⇒ равны по двум катетам. Значит, $P'D = PD$ (как соотв. эл-ты) ⇒ P и P' совпадают. Тогда PD ⊥~~

P/м $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$: равны по 3-м сторонам.
Значит, $\angle ADC = \angle BDC$ (как соотв. эл-ты).

Пусть P – проекция точки A на CD; P' – проекция точки B.
P/м $\triangle APD$ и $\triangle BP'D$: $\angle ADP = \angle BDP'$ (по док.); $AD = BD$ ⇒
⇒ $\triangle APD = \triangle BP'D$ (по гипотенузе и острому углу) ⇒
⇒ $AD = P'D$ (как соотв эл-ты) ⇒ P совпадает с P'.
Тогда $PD \perp AP$; $PD \perp BP$ ⇒ DP ~~проек~~ ⊥ ABP
в т.ч. $PD \perp AB$. Значит, $CD \perp AB$ ⇒ AB ∥ ~~осн.~~ оси.

Значит, AB лежит в какой-либо плоскости, параллельной основанию, т.е. в кругу. Тогда ~~в случае~~ A_2B_2, или диаметром, обеспечит наим. радиус (т.к. $A_2B_2 > A_1B_1 > A_3B_3$)
$A_2B_2 = 2r$.





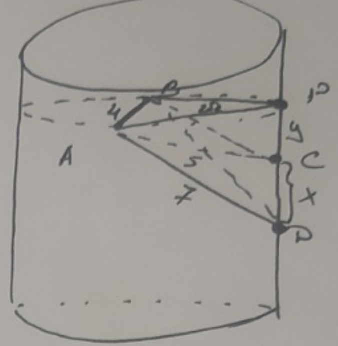
См. лист. 3

Чистовик лист 3.

Сл-но, AB - диаметр данного цилиндра => $r = 2$.

Рассмотрим такой цилиндр:

Т.к. $\triangle ADP = \triangle BDP$ (по док.) =>
$AP = PB$. $\angle APB = 90^\circ$ (т.к. опир. на диаметр) => $AP = BP = 2\sqrt{2}$



Пусть $CD = x$; $CP = y$.

Тогда по Т Пифагора для $\triangle ACP$,

$y^2 = 25 - 8 \Rightarrow y = \sqrt{17}$

По Т Пифагора для $\triangle ADP$,

$(x+y)^2 = 49 - 8$

$(x+y) = \sqrt{41} \Rightarrow x = \sqrt{41} - \sqrt{17} = CD$.

Ответ: $\sqrt{41} - \sqrt{17}$

N 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 50 \\ a^2 + b^2 \le \min(14a + 2b; 50) \end{cases}$$

$\forall x; y$, при которых $\exists a, b$ такие, что система верна

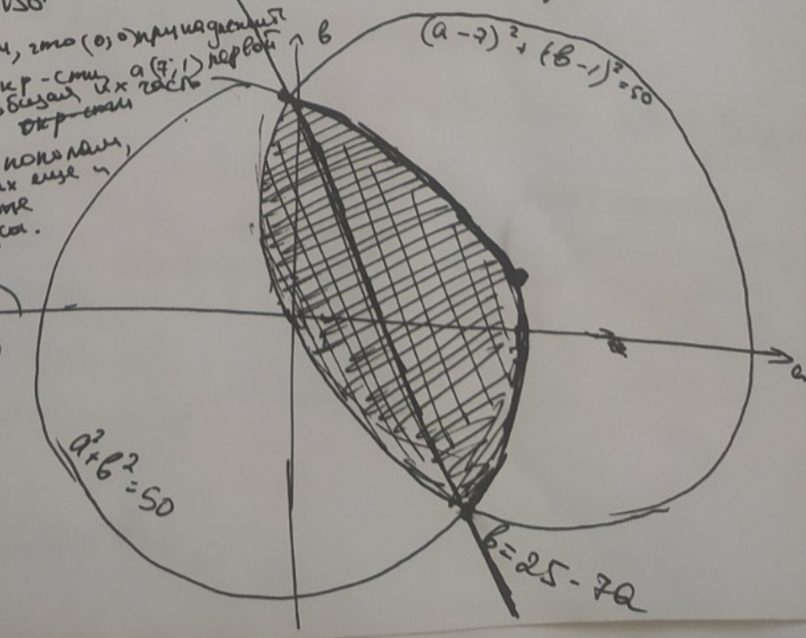
$$a^2 + b^2 \le \min(14a + 2b; 50) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \le 14a + 2b \\ a^2 + b^2 \le 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-7)^2 + (b-1)^2 \le 50 \\ a^2 + b^2 \le 50. \end{cases}$$

$(a-7)^2 + (b-1)^2 \le 50$ - круг с центром в точке $(7;1)$ и границей окружностью $r = \sqrt{50}$

$a^2 + b^2 \le 50$ - круг с центром в точке $(0;0)$ и границей окружностью $r = \sqrt{50}$

Решения системы заштрихованы

Заметим, что $(0;0)$ принадлежит второй окр-сти, а $(7;1)$ первой, значит общая их часть окр-сти делятся пополам, т.к. у них еще и одинаковые радиусы.



Рассмотрим $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 50$ как функцию относительно a и b и параметров $x; y$.

Тогда нужно найти такие $x; y$, при которых

$\boxed{\text{См лист 4}}$

Чистовик лист 4

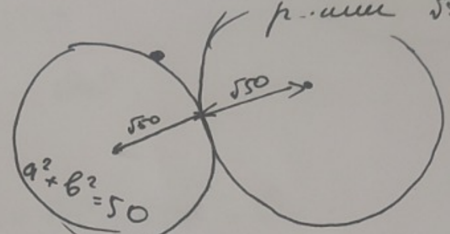
для $a; b$ из заштрихованной области будет хотя бы 1 решение.

~~Чтобы в всех~~

Нам необходимо рассмотреть только случай касания с ~~окру~~ границами заштрихованной области, т.к. в случае попадания $a; b$ ~~в такую обла~~ вовнутрь такой области ~~круг~~ граница круга $(a-x)^2+(b-y)^2=50$ точно захватит какие-либо точки оттуда.

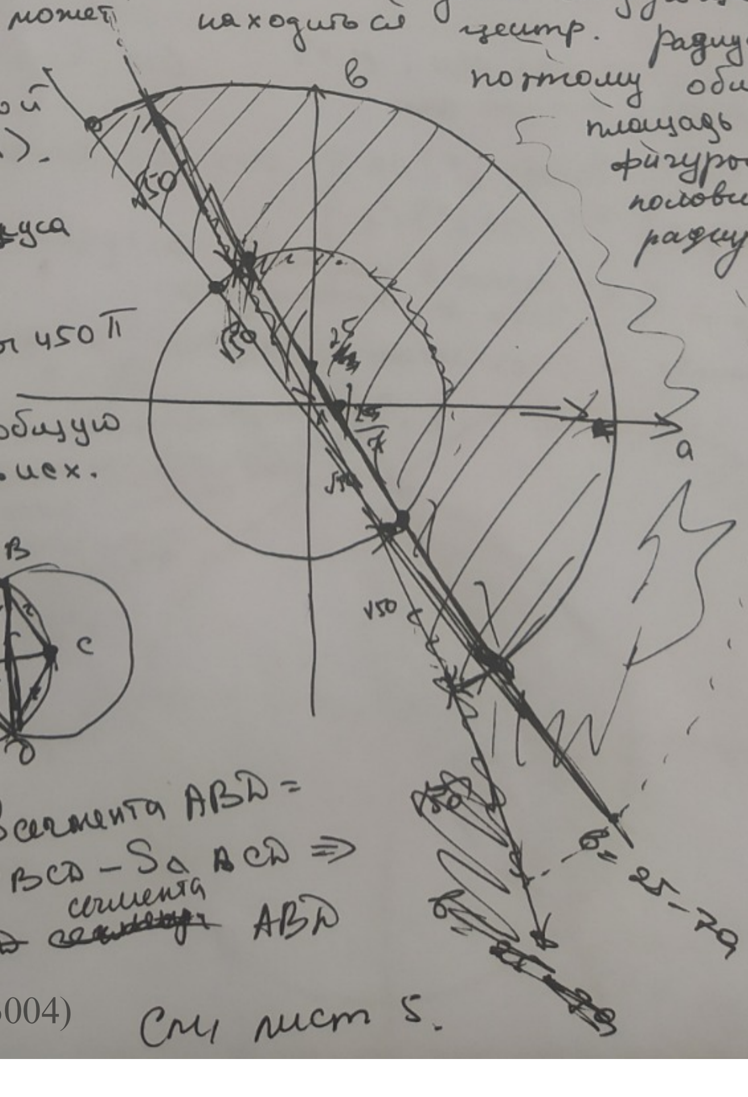
Итак, при $b \geq 25-7a$ это граница с $a^2+b^2=50$.

Р/м какой-либо круг: он может отстоять на р-ние не более, чем $\sqrt{50}$, т.к. граница на р-нии $\sqrt{50}$.



При этом все такие круги нам подходят, т.к. у них будет хотя бы одна общая точка с $a^2+b^2=50$.

Значит, при $b \geq 25-7a$ нам годится следующая область: это то место, где может находиться центр. Радиус еще $\sqrt{50}$, поэтому общая площадь полученной фигуры – это половина круга радиуса $3\sqrt{50}$ $= \frac{9\pi \cdot 50}{2} = 225\pi$.

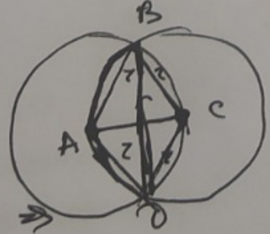


Аналогично для другой окружности (круга).

Половина круга радиуса $3\sqrt{50} \Rightarrow S = 225\pi$.

Также из их суммы 450π

Необходимо вычесть общую часть. Общая часть их кругов:



для такой конфигурации ABCD – ромб с углом в 120°, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~S_{ABD}~~ ~~сегмента~~ $S_{\text{сегмента } ABD} =$

$= S_{\text{сектора } BCD} - S_{\triangle BCD} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{общ.}} = 2S_{\text{сегмента } ABD}$

21101910 (U289746 M1303004)

См. лист 5.

Чистовик лист 5.

$S_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot S_{окр.} - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 120° =$

$= \frac{...}{3} \Rightarrow S_{общ.} = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 - r^2 \cdot \sin 120°.$

$S_{общ. нов} = 9\, S_{общ. старых}$, т.к

~~$S_{общ.}$ новых окр. в 9 раз > $S_{общ.}$ старых, т.к.~~

$r_{нов.} = 3\, r_{стар.} = 3\sqrt{50}.$

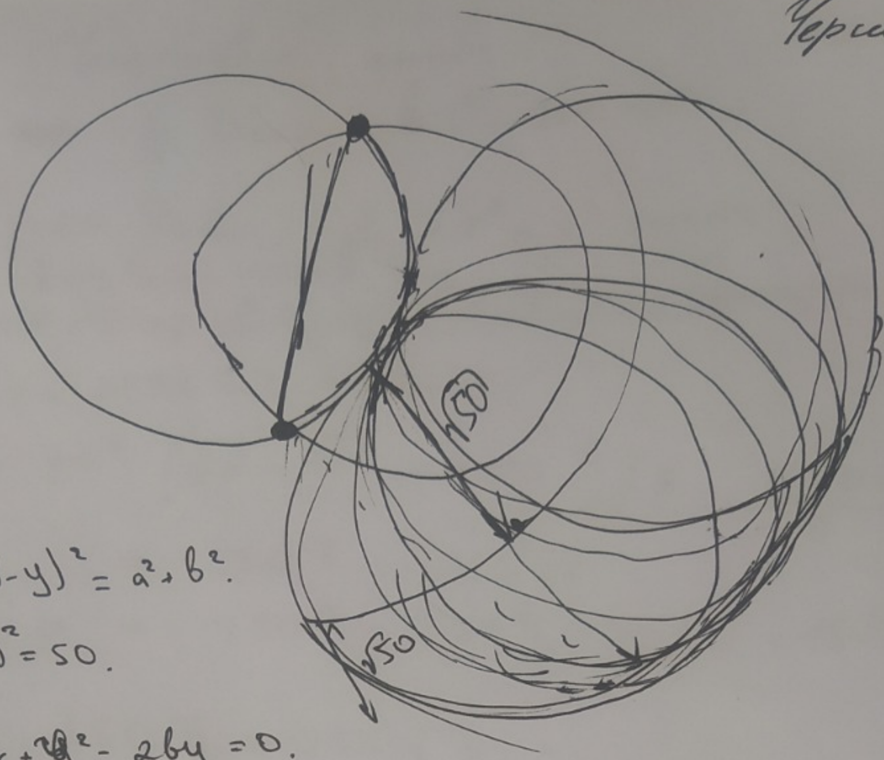
$S_{общ. нов} = 9r^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9 \cdot 50 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{9 \cdot 50\sqrt{3}}{2} =$

$= 300\pi - 225\sqrt{3}.$

Тогда $S_M = 450\pi - (300\pi - 225\sqrt{3}) = 150\pi + 225\sqrt{3}$

Ответ: $150\pi + 225\sqrt{3}$.

Черновик



$(a-x)^2+(b-y)^2=a^2+b^2.$

$(a-x)^2+(b-y)^2=50.$

$x^2-2ax+y^2-2by=0.$

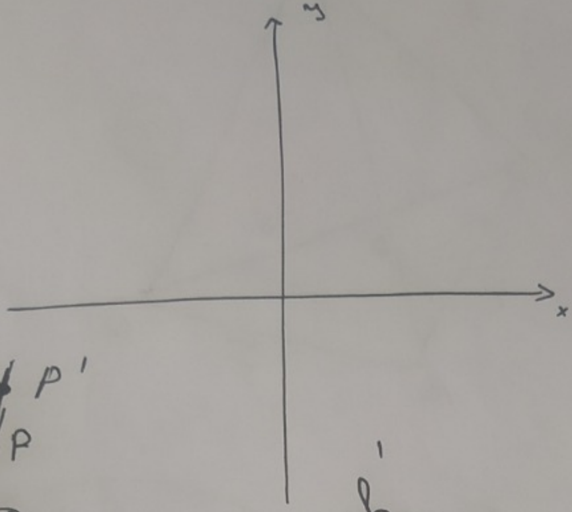
Черновик

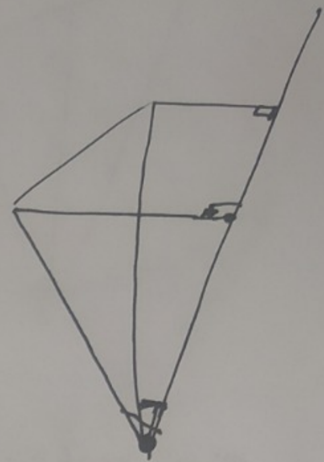
Окружность с центром в т. (a; b) радиуса 50.

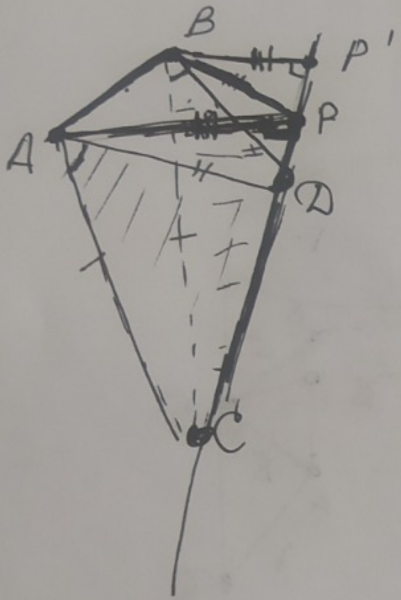
$(a-x)^2+(b-y)^2 \leq 50.$

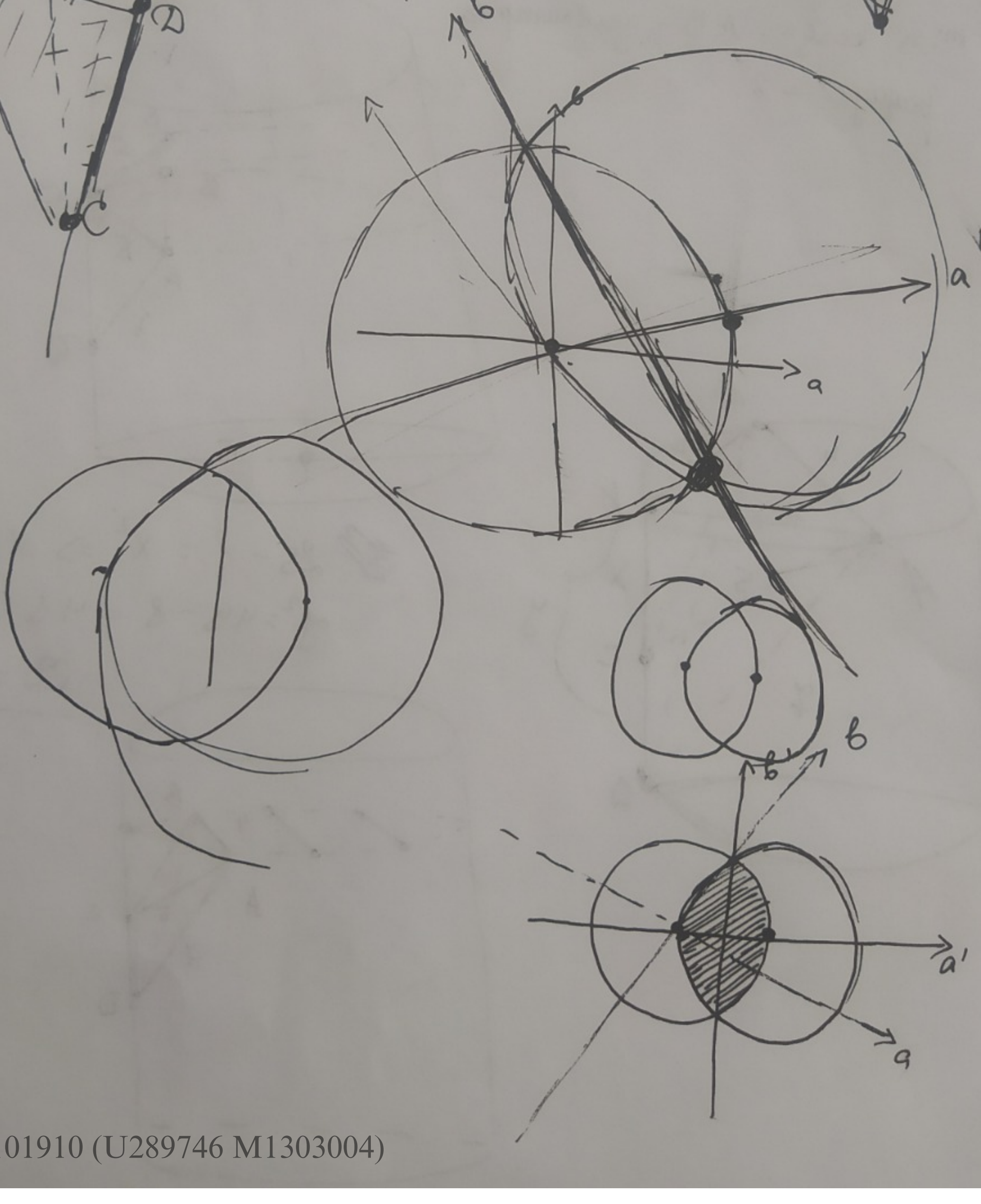
$(a-0)^2+(b-0)^2 \leq 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50.$

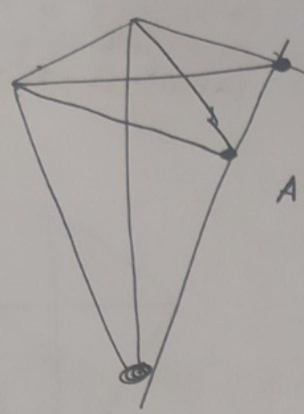


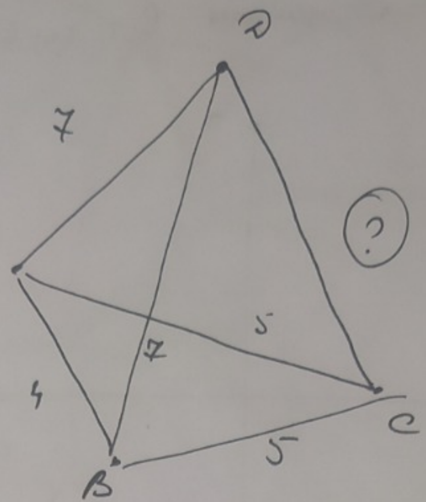




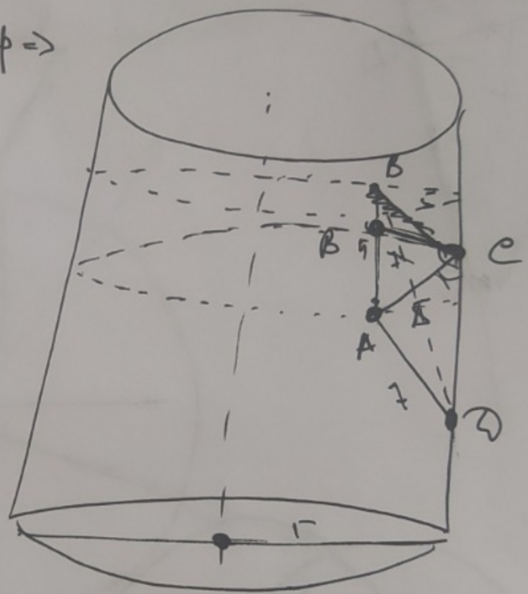


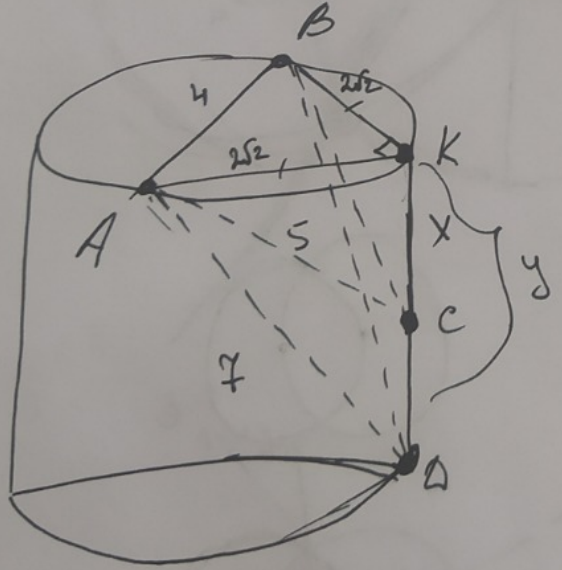
Черновик





т.к когда AB - диаметр =>
радиус = 2.

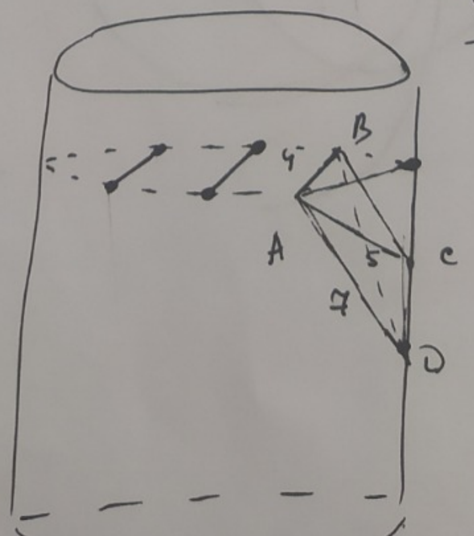




$25 - 8 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{13}$

$y^2 = 49 - 8 = 41 \Rightarrow y = \sqrt{41}$

$CD = \sqrt{41} - \sqrt{13}$



21101910 (U289746 M1303004)

Черновик

N 1.

$$\frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = S = (a_1 + 7d) \cdot 15$$

$$\begin{cases} (a_1 + 15d) \cdot (a_1 + 6d) > (a_1 + 7d) \cdot 15 - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < (a_1 + 7d) \cdot 15 + 4 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24$$

$$-a_1^2 - 21ad - 110d^2 > -15a_1 - 105d - 4$$

$$-20d^2 > -28 \qquad -24 - 4 = -28.$$

$$20d^2 < 28$$

$$d^2 < \frac{28}{20} = \frac{14}{10} \cancel{\approx} 2 \Rightarrow d^2 < 2$$

$$-\sqrt{2} < d < \sqrt{2}.$$

$a_1 \in \mathbb{Z}$; $a_2 > a_1 \Rightarrow d > 0$.

$a_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$; $d = 1$.

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 105 - 24 &= \\ &= 81 \\ 90 - 81 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \quad a_1 \neq -3 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \qquad 110 - 109 = 1.$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 1 = 8.$$

$$a_1 = -3 + 2\sqrt{2}$$

$$a_1 = -3 - 2\sqrt{2}$$

$a \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2})$

$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = -5; -4; -2; -1$

$$-3 + 2\sqrt{2} < 0$$

$$-3 - 2\sqrt{2} > -6.$$

$$2\sqrt{2} < 3.$$

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b;\ 50).\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 14a+2b\\ \underbrace{a^2+b^2\le 50}_{\text{~~окруж~~ круг.}}\end{cases}$$

все $x;y$ при которых $\exists a;b$ такие, что система выполнена

$$a^2-14a+\overset{49}{\cancel{\quad}}+b^2-2b+1\ \le\ \cancel{\quad}\,50$$

$$\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50.\\ a^2+b^2\le 50.\end{cases}$$

$7a+b\le 25$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

~~$(x-a)^2+(y-b)^2\le 50$~~

~~$2x^2-2ax+y^2-2by\le 0$~~

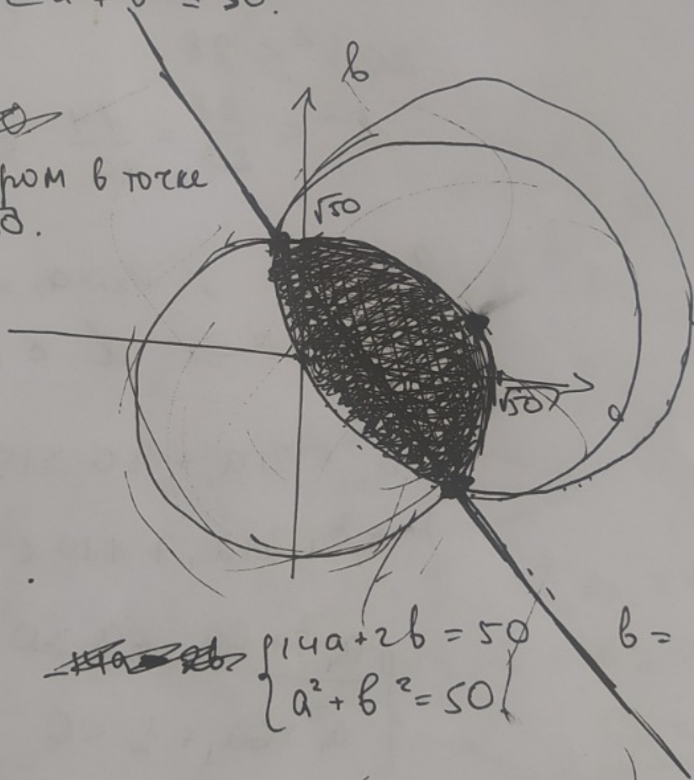
окружность с центром в точке $a;b$ и радиуса $\sqrt{50}$.

~~При этом граница~~

$14a+2b\le 50$

$b<25-7a.$

$b=0\Rightarrow a=\frac{25}{7}$



~~14a+2b~~ $\begin{cases}14a+2b=50\\ a^2+b^2=50\end{cases}$ $\quad b=25-7a$

$\cancel{a^2}+49\cancel{a^2}+625-350a=50.$

$50a^2-350a+575=0.$

$10a^2-70a+115=0.$

$2a^2-14a+23=0.$

$\frac{D}{4}=\cancel{\quad}\,49-46=3.$

21101910 (U289746 M1303004)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101910**

ID профиля: **289746**

Вариант 22

Чистовик лист 1.

№5.

Пусть ~~$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})=y$~~

$(\frac{x}{2}+1)=a$; $\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}=b$; $\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=c$

Тогда $\log_{a^2} b^2 \cdot \log_b c^4 \cdot \log_c a =$

$= 4\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 4$ (с учетом огр.).

Ограничения:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+1>0 \\ \frac{x}{2}+1\neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq\frac{14}{3} \end{cases}$$

Пусть какой-то из логарифмов равен y, тогда другой тоже y, а третий - $y-1$.

$y^2(y-1)=4$ $\quad y^3-y^2-4=0$. Заметим, что $y=2$ - решение.

$$\begin{array}{l|l} y^3-y^2-4 & y-2 \\ \hline -\;y^3-2y^2 & y^2+y+2 \\ \quad y^2-4 & \\ -\;y^2-4 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$y^2+y+2>0 \ \forall y$.

$\Downarrow$

$y=2$ - ед. решение.

Тогда 2 каких-то логарифма равны 2, а третий - 1.

$$\left[\begin{array}{l} \log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=1. \quad (1) \\ \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=1 \quad (2) \\ \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=1 \quad (3) \end{array}\right.$$

Если (1) или (2) верны, то $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x}{2}-6=\frac{x}{2}+1$; $x=7$

При $x=7$: $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\log_{\frac{9}{2}}\frac{9}{2}=1$

$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=\log_{\frac{9}{2}}\frac{81}{4}=2$ $\Rightarrow x=7$ подходит.

~~При (3)~~ Если (3) верно, то $\frac{3x}{2}-6=\frac{x^2}{4}+x+1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+7=0$; $x^2-2x+28=0$

$\frac{D}{4}=1-28=-27<0 \Rightarrow$

Случай (3) невозможен. $x=7$ удовл ограничениям $\Rightarrow$ подходит.

Ответ: 7

См. лист 2

21101910 (U289746 M1303005)

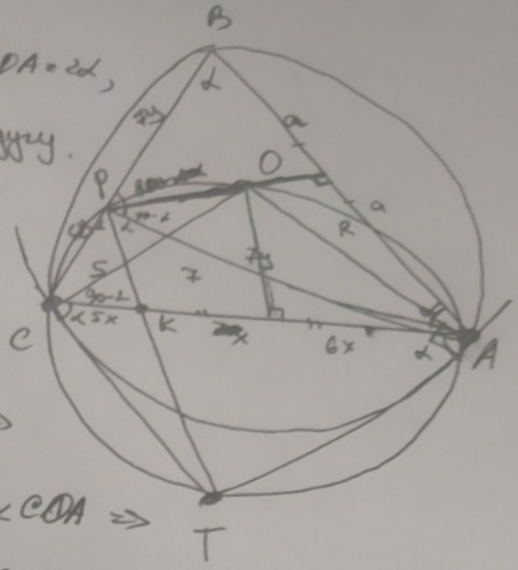
Чистовик лист 2.

Пусть $\angle B = \alpha$, тогда $\angle COA = 2\alpha$, как центр., опир на ту же дугу.

Тогда $\angle CPA = 2\alpha$, т.к. впис. и опир. на ту же дугу.

$\angle CAT = \angle ACT = \alpha$ (т.к. угол между хордой и каса.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CTA = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \angle COA \Rightarrow$



$OCTA$ – впис. Т.к. $OPCA$ – впис, а окр. задается тремя точками, T на окр-сти $OPCA$.

$\angle CPT = \angle CAT = \alpha$ (т.к. впис. и опир на одну дугу)

$\Rightarrow \angle TPA = \alpha$. значит, PT – бис-са в $\triangle CPA$.

$$\frac{S_{CPK}}{S_{KPA}} = \frac{CK}{KA} \text{ (т.к. общ. высота)} \Rightarrow CK = 5x;\ KA = 7x.$$

Т.к. PT – бис-са, $\frac{CK}{KA} = \frac{CP}{PA} \Rightarrow CP = 5y;\ PA = 7y.$

$\angle BPA + \angle CPA = 180^\circ \Rightarrow \angle BPA = 180^\circ - 2\alpha.$

По Т о сумме $\angle$ в $\triangle$, $\angle PAB = \alpha \Rightarrow \triangle PAB$ – р/б; $BP = PA = 7y$.

$$\frac{S_{CPK}}{S_{CBA}} = \frac{CP \cdot CK}{CA \cdot AB} = \frac{25}{144} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{144}{5}.$$

Ответ: а) $\frac{144}{5}$

См. лист 3

Чистовой лист 3.

б) $tg\,\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow tg\,2\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{3\cdot\cancel{16}^{8}}{7\cdot\cancel{2}} = \frac{24}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$

$S_{APC} = \frac{1}{2}\cdot 5y\cdot 7y\cdot \sin 2\alpha = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24 = 35y^2\cdot\frac{24}{25}$; $35y^2 = 25$; $y^2 = \frac{5}{7}$

По Т косинусов для $\triangle APC$,

$AC^2 = 25y^2 + 49y^2 - 2\cdot 35y^2\cdot\cos 2\alpha$

$AC^2 = y^2\left(25+49-\frac{\cancel{70}^{14}\cdot 7}{\cancel{25}_{5}}\right) = y^2\cdot\frac{272}{5}$

$AC^2 = \frac{272}{7}$; $AC = \sqrt{\frac{272}{7}}$

Ответ: б) $\sqrt{\frac{272}{7}}$

N1.

Т.к. НОД всех чисел $= 14$, каждое из них $\vdots\, 14$.

Обозначим $x = \frac{a}{14}$; $y = \frac{b}{14}$; $z = \frac{c}{14}$. Тогда

$НОД(x;y;z) = 1$; $НОК(x;y;z) = xyz = \frac{abc}{14^3}$

$НОК(a;b;c)\cdot НОД(a;b;c) = abc \Rightarrow$

$\Rightarrow НОК(x;y;z) = \frac{2^{17}\cdot 7^{18}\cdot 14}{14^3} = 2^{15}\cdot 7^{16}$.

Т.к. НОД полученных чисел $= 1$, то число 2 может встречаться максимум в двух числах, как и число 7.

См. лист 4

21101910 (U289746 M1303005)

Чистовик лист 4.

Пусть 2 встр. только в 1 числе и 7 тоже. Таких вариантов 9 штук.

Если 2 встречается в 2-х числах, 7 тоже в 2-х тех же числах, то такие числа представимы в виде $2^n \cdot 7^m$ и $2^{15-n} \cdot 7^{14-m}$

причем $n \in [1;14]$, $m \in [1;15]$, $n, m \in \mathbb{N}$ ⇒ $\frac{5}{7}$

Таких вариантов 14 · 15 · 6 штук

Если 2 встречается в 2-х числах, а 7 в одном числе, то таких вариантов

Все случаи: 2 в одном, 7 в одном

Черновик

~~$xyz = 2^{14} \cdot 7^{15}$~~

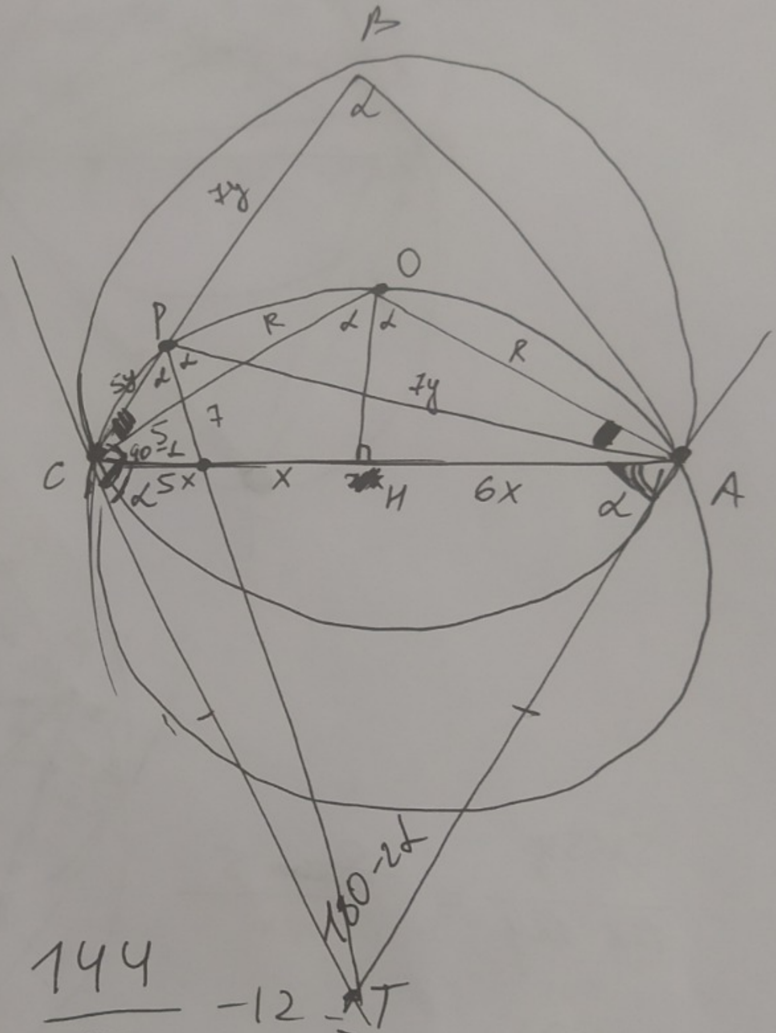
~~если двойки только у x, то~~

~~$x = 2^{14} \cdot 7^m$~~

$\frac{1}{2} 35y^2 \sin 2\alpha = 12$

$\frac{1}{2} 49y^2 \sin 2\alpha = \frac{84}{5}$

$\frac{272}{7}$



$74 \cdot 25 =$

$= 37 \cdot 50 =$

$= \frac{3700}{2} =$

$= 1850$

$\frac{144}{5} - 12 =$

$70 \cdot 7 =$

$= 490$

$74 \cdot 5 =$

$= 370$

$\frac{84}{5}$

$14 \cdot 7 = 98$

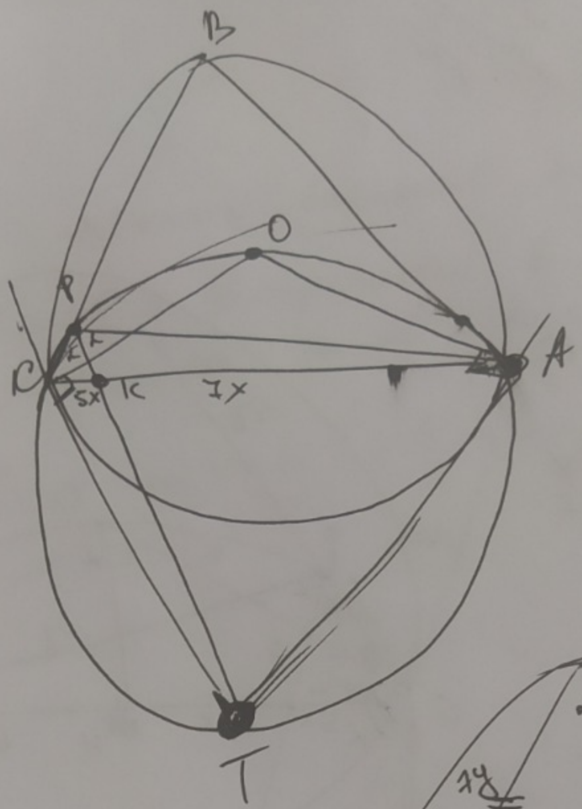
$370 - 98 = 272$

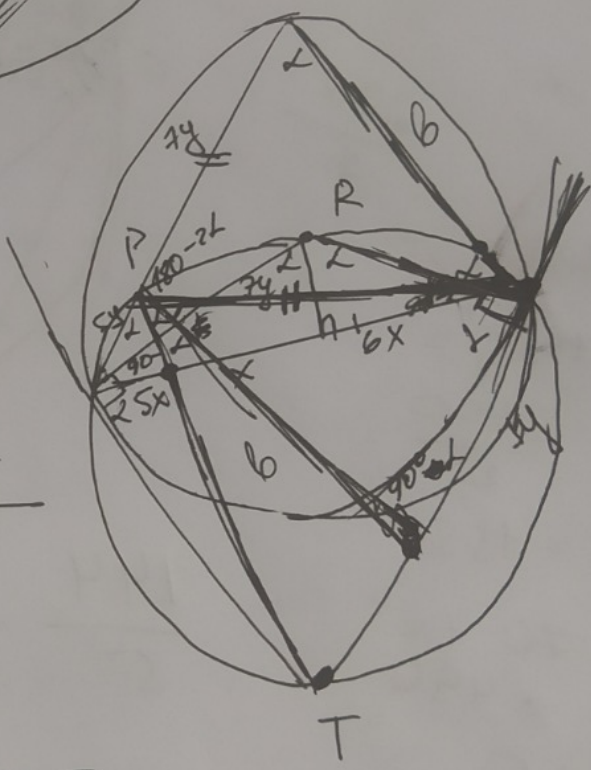
$x_2\ y_7 \quad x_2\ z_7 \quad x_2\ x_7$

$z_2\ x_7$

21101910 (U289746 M1303005)

$y_2\ x_7 \quad y_2\ z_7$





$$\frac{\cancel{5x}\cdot\cancel{5y}}{12x\cdot 12y} = \frac{5}{x}$$

$$\frac{25}{144} = \frac{5}{x}$$

$$\boxed{x = \frac{144}{5}.}$$

$tg\,\alpha = \frac{3}{4}$

$12x - ?$

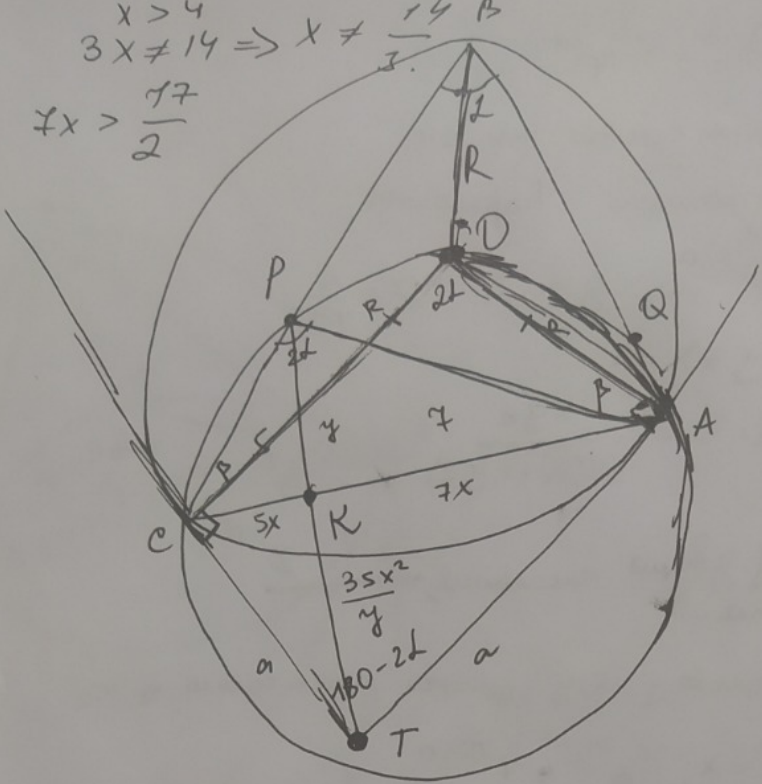
Черновик

$3x-12>0$

$x>4$

$3x \neq 14 \Rightarrow x \neq \frac{14}{3}$

$7x > \frac{17}{2}$



$PK \cdot KT = 35x^2$.

$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 16}{7} = \frac{32}{21}$.

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4} = \left(\frac{3x}{2}-6\right)^4 = \left(\frac{9x^2}{4}-18x+36\right)^2 = \left(\frac{81x^4}{16}+324x^2+36^2-81x^3-36^2x+81\cdot 2x^2\right.$

$\frac{x}{2}+1 = \frac{3x}{2}-6$

$\boxed{7=x}$

$\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$

$\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 = \left(\frac{21}{2}-6\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$ - невозможно.

21101910 (U289746 M1303005)

НОД $(a; b; c) = 14$.
НОК $(a; b; c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$.

Каждое число делится на 14.
Дальше возможны варианты.
Пусть $x = \frac{a}{14}$; $y = \frac{b}{14}$; $z = \frac{c}{14}$.

НОК $(x; y; z) = 1$
НОД $(x; y; z) = \frac{xyz}{НОД (x;y;z)} = xyz. = \frac{abc}{14^3} =$

Двойки между двумя числами; $= \underline{2^{14} \cdot 7^{15}}$
семерки тоже.

Пусть двойки только у $x; y$; семерки тоже только у $x; y$.
Тогда $2^n \cdot 7^m = x$; $2^{14-n} \cdot 7^{15-n} = y$.

~~$2^n \cdot 7^m = x$; 2,~~ $n \in [0; 14]$, $m \in [0; 15]$ $\Rightarrow$ всего $15 \cdot 16$ вариантов.

Аналогично когда двойки только у $x; z$, семерки тоже и когда двойки только у $y; z$, семерки тоже $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего $45 \cdot 16$ вариантов, когда ровно одно число $= 1$.

~~При этом вариант, когда 2 числа $= 1$, посчитан~~

Когда 2 числа равны 1, третье равно $2^{14} \cdot 7^{15}$ – такой вариант 1.

$$\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 = \frac{3x}{2} - 6$$

$$\frac{x^2}{4} + x + 1 = \frac{3x}{2} - 6.$$

$x^2 - 2x + 14 = 0$ – невозможно.

$$\frac{x^2}{4} + x + 1 = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$$

$\frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$

$5 \pm 2\sqrt{3}$

$x^2 - 10x + 13 = 0.$

$\frac{17}{4} - 1 = \frac{13}{4}$

$D = 25 - 13 = 12$

$x = 5 \pm 2\sqrt{3}$.

$5 - 2\sqrt{3} < 3$ – не удовл.

21101910 (U289746 M1303005)

Чистовик ... 1 число и ... и в ⇒ ... >0

Черновик

НОД

НО

$xyz=4$

$(x^2(x-1)=4$

$x^3-x^2-4=0$

$x=2$ – решение.

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-4 & x-2 \\ \hline -\;x^3-2x^2 & x^2+x+2 \\ \quad x^2-4 & \\ \quad 7x^2-2x & \\ \qquad 2x-4 & \\ \qquad -\;2x-4 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(x^2+x+2)(x-2)=$

$=x^3+x^2+2x-2x^2-2x-4=$

$=x^3-x^2-4$

$x=2;\ y=2;\ z=1.$

$$\begin{cases} \log_a b=2 \\ 4\log_b c=2 \\ \log_c a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=a^2 \\ c=\sqrt{b} \\ c=a \end{cases}$$ подходит

$$\begin{cases} \log_a b=2 \\ 4\log_b c=1 \\ \log_c a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} b=a^2 \\ c=\sqrt[4]{b} \\ a=c^2 \end{array} \quad b=c^4$$ подходит.

$$\begin{cases} \log_a b=1 \\ 4\log_b c=2 \\ \log_c a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=b \\ c=\sqrt{b} \\ a=c^2 \end{array}$$ – подходит.

~~$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$~~

21101910 (U289746 M1303005)

Черновик:

$\log_a b = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$b = a^{\frac{2}{3}}$

$4\log_a c = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$\log_b c = \frac{5}{12}$

$c = b^{\frac{5}{12}}$

$\log_a c = 3.$

$\log_a c = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$c = a^{\frac{5}{3}}$

$b = a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow c = a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{12}} = a^{\frac{10}{36}} \Rightarrow \neq \frac{5}{3}.$

Невозможно.

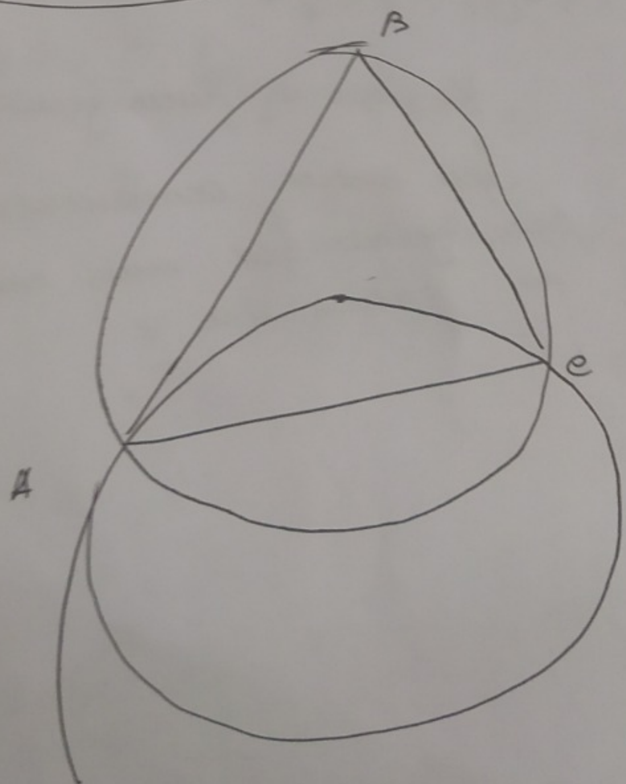
$\log_a b = \frac{5}{3} \Rightarrow b = a^{\frac{5}{3}}$ $4\log_b c = \frac{2}{3} \Rightarrow c = b^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{18}}$

Невозможно.

$\log_a b = \frac{5}{3};$ $4\log_b c = \frac{5}{3} \Rightarrow c = b^{\frac{5}{12}} = a^{\frac{25}{36}}$

$b = a^{\frac{5}{3}}$

$\log_c a = \frac{2}{3} \Rightarrow c =$



21101910 (U289746 M1303005)

Черновик

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$; $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

два равны, а третье меньше на 1.

$\cancel{a=b}$

$\cancel{b=c+1}$

$x=y$; $y=z+1$.

$a+b+\cancel{c}=3b-1$

$\underline{3c+2.}$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{2}+1>0 \\ \frac{x}{2}+1\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1. \end{cases}$

$\frac{x}{2}+1=a$; $\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}=b$; $\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=c$.

$\log_{a^2}b^2$; $\log_b c^4$; $\log_c a$

$\log_a b$; $4\log_b c$; $\log_c a$.

$\times$

При $\log_a b=\frac{1}{\log_a c}$: $\cancel{\log_a b\cdot\log_a c=1}$.

$\boxed{\frac{4}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{3}}$

$\cancel{\log_a b=\log_b c^4}$

$\cancel{\log_a b}=\cancel{\log_c b}$

$\log_a b=4\log_b c$

$\log_a b\cdot\log_a c=1.$

$\log_a b=\frac{4}{\log_c b}$

$\log_a b\cdot\log_c b$

$\log_a b\cdot\cancel{\log_c b}=4.$

$4\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=$

$xyz=4$

$=4\log_a c\cdot\log_c a=4$. $x^3-x^2-4=0.$

$\cancel{x+y+z=4.}$

$x=y=z+1\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{z+1+z+1+z=4}$

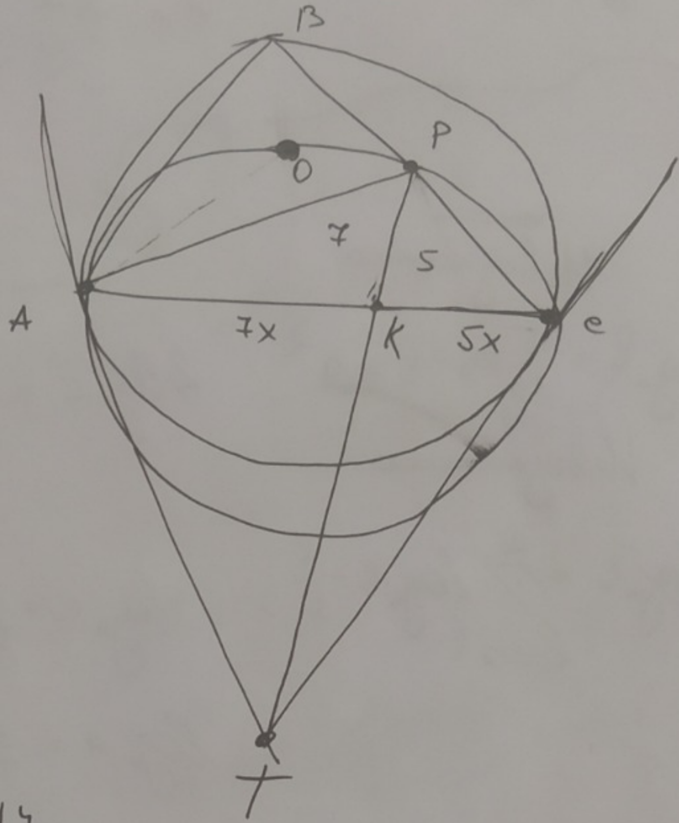
$3z+2=4\Rightarrow z=\frac{2}{3}.$

$x^2(x-1)=4.$

21101910 (U289746 M1303005)

$x=2$

Черновик



$$\frac{\cancel{CP}\cdot CK}{\cancel{CP}\cdot CA} = \frac{5}{12}$$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 14 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{17}\cdot 7^{18}. \end{cases}$$

Каждое из чисел делится на 14.

При этом остальные 2 и 7 должны
числа распределиться так, что нет у одного
ни двоек, ни 7.

Черновик

$$\sin\alpha = \frac{6x}{R}$$