Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101792**

ID профиля: **126379**

Вариант 22

Математика

11

Чистовик

№1.

$$S = \frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15 = \frac{2a_1+14d}{2}\cdot 15 = (a_1+7d)15.$$

$a_7 = a_1+6d$

$a_{16} = a_1+15d$ $\Rightarrow a_1^2+21a_1d+90d^2 > 15a_1+105d-24$

$a_{11} = a_1+10d$

$a_{12} = a_1+11d$ $\Rightarrow a_1^2+21a_1d+110d^2 \leq 15a_1+105d+4$

~~$a_1^2+(21d-15)$~~

$$\begin{cases} 90d^2+(21a_1-105)d+a_1^2-15a_1+24 > 0 \quad |\cdot(-1) \\ 110d^2+(21a_1-105)d+a_1^2-15a_1-4 \leq 0 \end{cases}$$

$20d^2-28<0$

$d^2 < \frac{28}{20}$

$d^2 < \frac{7}{5}$

$d \in \left[-\frac{\sqrt{35}}{5}; \frac{\sqrt{35}}{5}\right]$

$\frac{\sqrt{35}}{5} < 2$

$35 < 100$

$49-42=$

$\sqrt{7}$

$\frac{\sqrt{35}}{5} > 1$

$35 > 25$

1

т.к посл. возраст. и сост. из целых чисел $\Rightarrow d \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$d \in (0; 1], d \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$d = 1.$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 90+21a_1-105+a_1^2-15a_1+24>0 \\ 110+21a_1-105+a_1^2-15a_1-4 \leq 0 \end{cases}$$

Чистовик

Математика

1 1

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0. \end{cases} \quad \frac{D}{4}=9-1=8$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -3. \\ a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}). \end{cases}$$

$-3+2\sqrt{2}<0$

$-3+2\sqrt{2}>-1$

$-3-2\sqrt{2}>-6.$

$-3-2\sqrt{2}<-5$

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$a_1=\{-5; -4; -2; -1\}$

Ответ: $\{-5; -4; -2; -1\}$

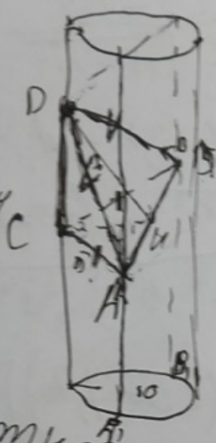
2

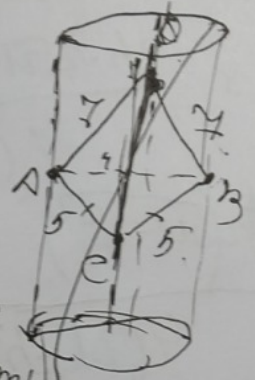
21101792 (U126379 M1301037)

Чистовик Математика 11

№2

Т.к заданы
AC, CB, AB
⇓
ΔABC - статичен



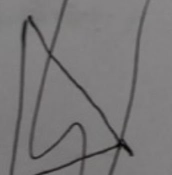


7 = DA = DB.
5 = CA = CB
⇓
симметрия относит. DC
~~DC~~ она же будет проходить
в через ось цилиндра
AB // осн. цилиндра ⇓
радиус будет задаваться высотой
CH и DH ~~a~~ -у треугольников CAB и DAB
соответственно:

③

⇓ ~~CDH и диаметр~~:

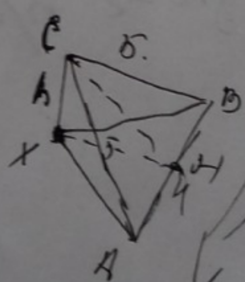
меняет
свою длину
только



CD

~~в силу~~

Пусть (1) : (AB) // (OA₁B₁)



по Т ~~sin∠AXB~~ Пифагора
и опред. прямой ⊥ плоскости.

$CH = \sqrt{21}$

$XH = \sqrt{21 - h^2}$

$XA = \sqrt{25 - h^2}$

$\Leftrightarrow \sin\angle AXB = 2 \cdot \sin\angle AXH \cdot \cos\angle AXH$,

черновик   математика
                                   11

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{21-h^2} \cdot 2}{25-h^2} = \frac{4\sqrt{21-h^2}}{25-h^2}$ по формуле синуса двойного угла

$R(h) = \frac{AB}{2\sin\angle AXH} = \frac{25-h^2}{2\sqrt{21-h^2}}$ по формуле рад. впис. окруж.

найдём наим. зн-е.

$R'(h) = \frac{-2h \cdot 2\sqrt{21-h^2} + (25-h^2) \cdot \frac{+2h}{2\sqrt{21-h^2}}}{4(21-h^2)} = 0$

$\frac{2h\left(-2\left(\sqrt{21-h^2}\right)^2 + (25-h^2)\right)}{4(21-h^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} h = 0 \\ 2h^2 - 42 + 25 - h^2 = 0 \end{array}\right. \\ h \in (-\sqrt{21}; \sqrt{21}) \end{cases}$

(4)

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} h^2 - 17 = 0 \\ h = 0 \end{array}\right. \\ h \in (-\sqrt{21}; \sqrt{21}) \end{cases}$

$-\sqrt{21} \quad - \quad -\sqrt{17} \quad + \quad 0 \quad - \quad \sqrt{17} \quad + \quad \sqrt{21}$

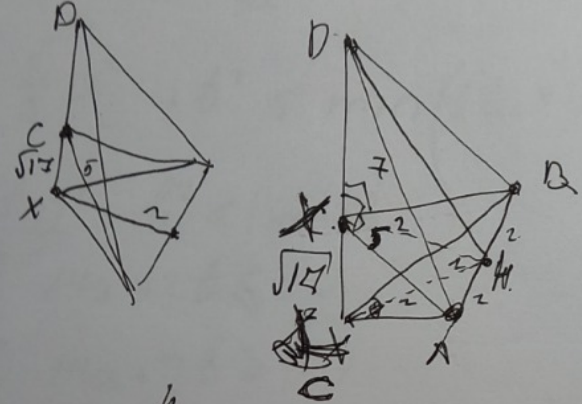
наим. зн-е. при $h = \sqrt{17}$

$R_{min} = 2 \Rightarrow \triangle XAB$ – п/у (т.к. $R = \frac{1}{2}AB$.

Чистовик

Математика
11

возможно 2 сл.



$DH = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$ (Т Пифагора для $\triangle DAH$)

$XD = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$ (Т Пифагора для $\triangle DXH$),

$DC = DX \pm XC = \sqrt{41} \pm \sqrt{17}$

5

Ответ: $\sqrt{41} \pm \sqrt{17}$.

21101792 (U126379 M1301037)

Чистовик Математика 11

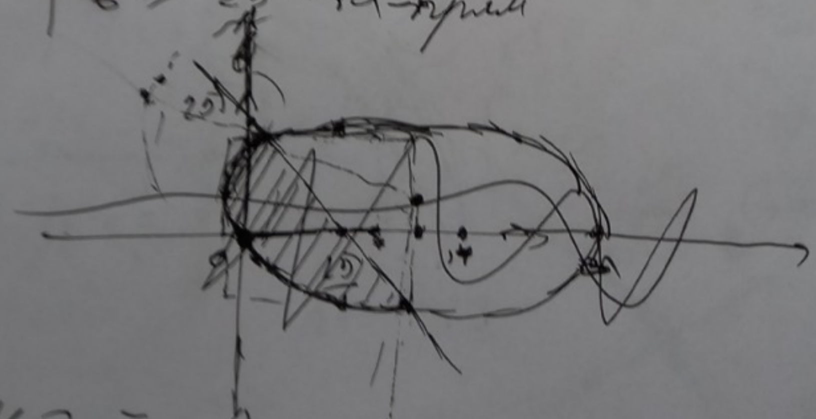
№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 50 \\ a^2+b^2 \leq \min(14a+2b;\ 50) \ (1) \end{cases}$$

$$(1)\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \leq 14a+2b \\ 14a+2b \leq 50 \end{cases} \\ \begin{cases} 14a+2b \geq 50 \\ a^2+b^2 \leq 50 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50 \text{ — круг. огр прям} \\ b \leq 25-7a \text{ — прям} \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \leq 50 \text{ — круг. огр прям} \\ b \geq 25-7a \text{ — прям} \end{cases} \end{array} \right.$$

6



Найдём ⊙ пересеч. граф.

$a^2-\cancel{14a}+625-350a+49a^2-50+\cancel{14a} \leq 0$

$2a^2-14a+21 \leq 0$

$a=\frac{7\pm\sqrt{7}}{2}$

$b \leq 25-\frac{49 \pm 7\sqrt{7}}{2} = \frac{1+7\sqrt{7}}{2}$ $\quad b \leq \frac{1-7\sqrt{7}}{2}$

Чистовик Математика 11

$a^2+625-350a+49a^2-50 \le 0$

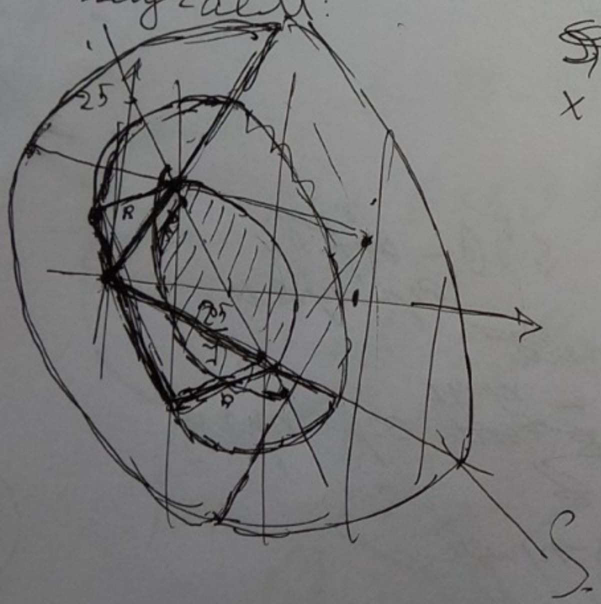
$2a^2-14a+23 \le 0$

$\frac{D}{4}=\sqrt{49-46}=\sqrt{3}$

$a=\frac{7\pm\sqrt{3}}{2}$

$b=25-\frac{49\pm7\sqrt{3}}{2}=\frac{1\mp7\sqrt{3}}{2}$

получаем:



7

21101792 (U126379 M1301037)

Черновик Математика 11

$a_4 + a_{10} = 2a_1 + 6d + 15d = 2a_1 + 21d$

$a_{11} + a_{12} = 2a_1 + 21d = \frac{25}{15}$ $a_1 + 7d$

$(a-x)^2 + (b-y)^2 \le 50$

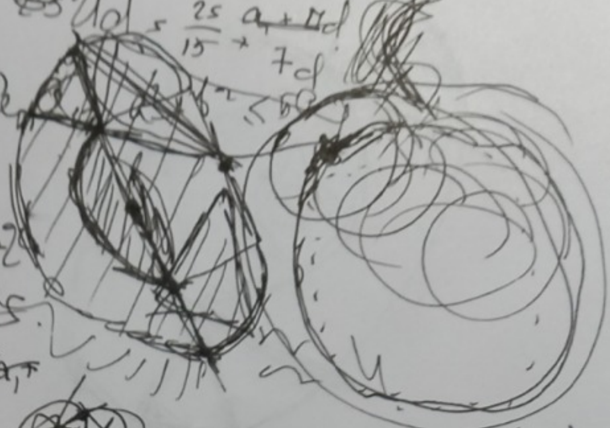
$a_3 a_6 + 20d^2 = a_1$

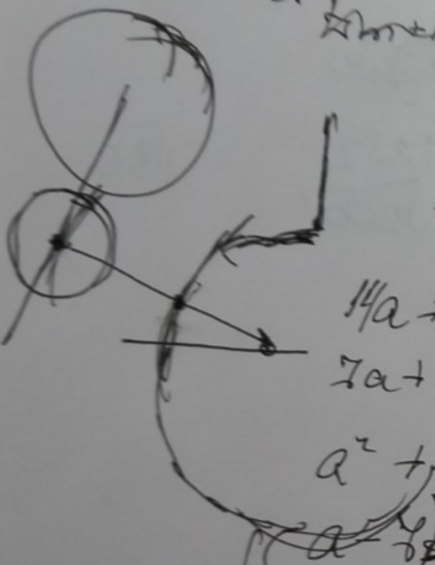
$\begin{cases} (a-5x)^2 + (b-y)^2 \le 50 \\ a^2 + b^2 \le 50 \\ b \le 25 - 7a \end{cases}$

$m > 5 - 24$

$6m + 120d^2 > 65 + 2$

$m + 120d^2 > 75$





$b < 25 - 7a$

$(a-7)^2 \le 49$ $(a;b)$

$14a + 2b < 50$ $(\sqrt{50})^2$

$a \in [\ldots, 1]$

$7a + b < 25$

$a^2 + b^2 \le 14a + 2b$

$a \in [\ldots]$

$(a-7)^2 + (b-1)^2 \le 50$

$14a + 2b < 50$

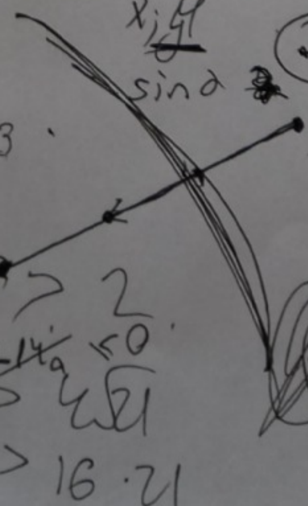
$5\sqrt{2}$

$\sqrt{21 - h^2}$

$x; y$

$\sin\alpha$

$\frac{25}{2\sqrt{21}}$



$\begin{cases} (a-x)^2 + (b-y)^2 \le 50 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 + b^2 \le 50 \\ b \ge 25 - 7a \end{cases} \\ \begin{cases} (a-7)^2 + (b-1)^2 \le 50 \\ b \le \ldots \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$

$25 - 2$

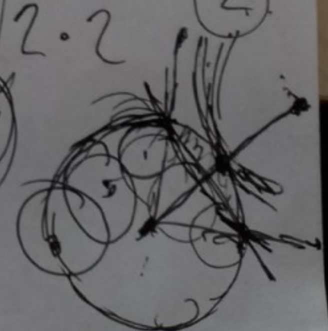
$25 - 2 = 23$

$\frac{8}{2 \cdot 2} = 2$

$\frac{25}{2\sqrt{21}} > 2$

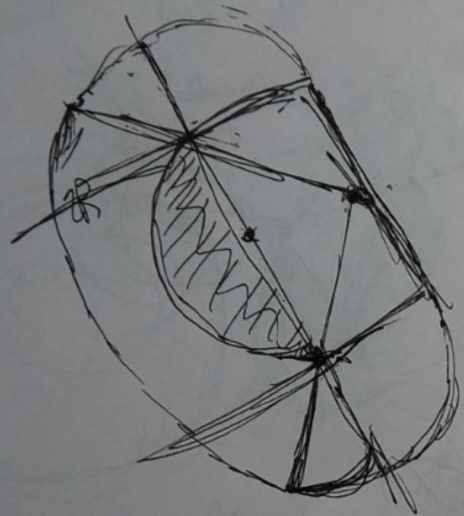
$50a^2 - 350a + \ldots \le 0$ $25 \le 4\sqrt{21}$

$2a^2 - 14a + 23 \le 0$ $25^2 > 16 \cdot 21$



Черновик.

Математика
11



$\frac{7\sqrt{3}}{2} > 7$

$49 + 7\sqrt{3} > 20$

$10\sqrt{2}$

$\sqrt{200}$

$\sqrt{00}$

21101792 (U126379 M1301037)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101792**

ID профиля: **126379**

Вариант 22

Чистовик Математика 11

№4

Рассмотрим числа a:

$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$ — они имеют такой вид. т.к. если бы были другие дел, нок $\neq 2^{17} \cdot 7^{18}$

$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

⇓

НОД: $\min(a_1, b_1, c_1) = 1$.

$\min(a_2, b_2, c_2) = 1$.

НОК: $\max(a_1, b_1, c_1) = 17$

$\max(a_2, b_2, c_2) = 18$.

выбрать из 3-ёх чисел 2 которые будут максимальными $= A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$.

выбрать из 3-ёх чисел 2 которые будут мин и макс. $= A_3^2 = 6$.

⇓

~~6·6 – вариантов~~

оставшееся число может быть любым из промежутка $[1;17] \Rightarrow \cancel{18}$ 17 чисел.

⇓

$17 \cancel{18} \cdot 6 \cdot 6$ – вариантов

$17 \cancel{18} \cdot 6 \cdot 6 = \cancel{18 \cdot 36 = 324 \cdot 2 = 648}$

$= 612$

Ответ: ~~648~~. 612.

21101792 (U126379 M1301038)

Чистовик

Математика 11

№7) 3.

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+1 \neq 1, >0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \neq 1, >0 \\ \frac{3x}{2}-6 \neq 1, >0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{3}{2} \\ x \neq \frac{14}{3} \\ x > -2 \\ x > \frac{17}{14} \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x \neq \frac{14}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right),\ 4\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right),$$

a ① ② b

$$2\log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

③ c

2

I a = 2.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a = 4b \\ 2ab = \frac{2}{c} \\ \frac{1}{2}a - 1 = 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 8b \\ ab = \frac{1}{c} \\ \frac{a-2}{2} = 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b - 1 = 2c \\ 8b^2 = \frac{1}{c} \\ a = 8b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8b^2(4b-1) = 1 \\ a = 8b \\ 4b - 1 = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32b^3 - 8b^2 - 1 = 0 \\ a = 8b \\ 4b - 1 = c \end{cases}$$

$\frac{a^2 b}{4} - ab - 1 = 0$

$\frac{a^2 b}{2} - ab - 1 = 0$

$\frac{a^2 b}{2} - ab - abc = 0$

$ab\left(\frac{a}{2} - 1 - c\right) = 0$

$32b^3 - 8b^2 - 2 = 0$

	16	−4	0	−1
$\frac{1}{2}$	32	48	23	0

Чистовик

Математика 11

$16b^3-4b^2-1=0.$

$(2b-1)(16b^2+4b+2)=0$

$(2b-1)(8b^2+2b+1)=0$

$\frac{D}{4}<0$

$b=\frac{1}{2}.$

$a=4.$ $\Rightarrow$

$c=\frac{1}{2}.$

$$\begin{cases} \log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=4 \\ \log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=\frac{1}{2} \\ \log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=\frac{x}{2}+1$

$\frac{3x}{2}-6=\frac{x^2}{4}+x+1$

$6x-24=x^2+4x+4$

$x^2-2x+28=0$

$\frac{D}{4}<0$

$x\in\varnothing$

3

II сл $2b=c$

$$\begin{cases} abc=1. \\ 2b=c \\ 4c-2=a \end{cases}$$

$2b^2(8b-2)=1.$

$16b^3-4b^2-1=0$

b	16	−4	0	−1
$\frac{1}{2}$	16	4	2	0

$$\left[\begin{array}{l} b=\frac{1}{2} \\ 8b^2+2b+1=0 \; \frac{D}{4}<0 \end{array}\right. \Rightarrow b=\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{2}$$

Чистовик

Математика

11

$c=1$

$b=\frac{1}{2}$

$a=2$

$\Downarrow$

$\frac{3x}{2}-6=\frac{x}{2}+1$

$x=7$ - удовл. ОДЗ.

$\Downarrow$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{98-17}{4}\right)=1$

$4\log_{\frac{81}{4}}\left(\frac{9}{2}\right)=2$

$2\log_{\frac{9}{2}}\frac{9}{2}=2$

$\Rightarrow x=7$ - удов. усл.

4

III сл.

$$\begin{cases} a=4c \\ abc=1 \\ 2c-1=4b \end{cases}$$

$4c^2\left(\frac{2c-1}{4}\right)=1$

$2c^3-c^2-1=0$

	2	-1	0	-1
1	2	1	1	0

$c=1$

$a=4$

$b=\frac{1}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} c=1 \\ 2c^2+c+1=0 \\ \quad D<0 \end{array}\right.$$

~~$x=7$~~

$x=7 \leftarrow c=1$

$a=\log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{81}{4}\right)=2\neq 4 \Rightarrow x\in\varnothing$

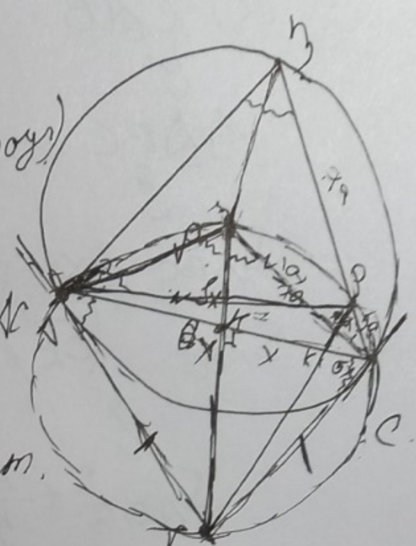
Ответ: $\{7\}$

Чистовик

Математика

11

1) а) (·) О — лежит внутри $\triangle ABC$ ($\triangle ABC$ — остроуг.)



б) $\angle TAC = \angle TCA = \angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ как вписанный и как угол между касат. и хордой

по опред. радиуса опис. окружн.

3) $OA = OC$ $AT = TC$ по св-ву касат

⇓

OT — сер. пер к AC. по определ. сер пера, как о ГМТ.

⇓

$OT \perp AC$. ($OT \cap AC = (\cdot) H$)

⇓

$CH \perp OT$

⇓

CH — выс. в $\triangle TOC$. по определ. выс

$\triangle TOC$ — прямоуг. по свойству касательн.

$\angle TOC = \angle HCT$. по Т о сумме углов треугольника.

⇓

$\angle ACT = \angle TOC = \angle TAC = \cancel{\angle ABC}$ ~~по пункту~~ 2

$= \angle ABC$. по пункту 2

$TAOC$ — впис. четырёх уг. по характерист св-ву впис. четырёхка

⇓

$\angle TPC = \angle ATAC = \angle ABC = \angle TCA = \angle TPA$ ~~по св-ву~~ как впис опир на 1-у дугу

⇓

5

21101792 (U126379 M1301038)

Чистовик Математика

11

$\Downarrow$

$PT \parallel AB$

$\Downarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по 2-ум углам

$\Downarrow$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 = \left(\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}}\right)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2$. т.к подобн. треуг. отное. как ~~к~~ коэф подобия (общ и треуг ~~образую~~ ~~щие~~ выс относят-ся как основания, на которые пада-ют эти высота

$\Downarrow$

$S_{ABC} = \frac{144}{5}$.

Ответ: $\frac{144}{5}$.

б) 4) $\angle AP\cancel{T} = \angle ACT$ как впис, ~~на~~ опир. на 1-у дугу.

$\Downarrow$

$\angle APT = \angle APC$ по транзитивности

$\Downarrow$

PT – бис $\angle APC$

6

$\Downarrow$

$\frac{AP}{PC} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{7}{5} \Rightarrow AP = 7a$
$PC = 5a$

$\Downarrow$ ~~3~~.

~~$\angle ABC$~~

5) $\angle ABC = arc\ ctg \frac{3}{4}$

$\Downarrow$

$\cos\angle ABC = \frac{4}{5}$.
$\sin\angle ABC = \frac{3}{5}$ $\Bigg|$ $\Rightarrow$ по триг тождеству и ~~[illegible]~~ т.к $\angle ABC < 90°$,

Чистовик Математика 11.

б) $\angle APT = \angle ACT = \angle ABC = \angle TAC$: по п ② и ③.

$= \angle TPC = \cancel{\alpha}$

$\Downarrow$

$\angle APC = 2\cancel{\alpha}\angle ABC$

$\Downarrow$

$\sin \angle A\cancel{B}PC = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$\cos \angle A\cancel{B}PC = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$.

$\Downarrow$

$S_{ABC} = AP \cdot PC \cdot \sin \angle A\cancel{B}PC \cdot \frac{1}{2} =$

$= 35a^2 \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{1}{2} = 12$

$\Downarrow$

$a = \frac{5}{\sqrt{7}}$

$\Downarrow$

$7a = \frac{35}{\sqrt{7}}$

$5a = \frac{25}{\sqrt{7}}$ $\Rightarrow AC = \sqrt{(7a)^2 + (5a)^2 - 2\cos_{\angle APC} 35a^2}$, по ⑦ $\cos$

$= \sqrt{\cancel{35}, 74a^2 - 2 \cdot \frac{7}{25} \cdot 35a^2} =$

$= \sqrt{74a^2 - \frac{98}{5}a^2} = \sqrt{\frac{272}{5}} \cdot a = \sqrt{\frac{272}{35}} \cdot 5 = \frac{20\sqrt{17}}{\sqrt{35}}$

Ответ: $\cancel{5}\ \cancel{\sqrt{272}}$ $20\sqrt{\frac{17}{35}}$.

7

Черновик

Математика

11

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a = 4b \\ abc = 1 \\ 4b - 1 = 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 4b = 7c \\ abc = 1 \\ 4b - 1 = \frac{1}{2}a \end{cases}$$

$8b - 2 = a$

$(8b-2)(2b^2) = 1$

$$\begin{cases} \frac{4b-1}{2} = c \\ 8b = a \\ abc = 1 \end{cases}$$

$8b^2\left(\frac{4b-1}{2}\right) = 1$

$4b^2(4b-1) = 1$

$16b^3 - 4b^2 - 1 = 0$

	16	-4	0	-1
$\frac{1}{2}$	16	4	2	0

$8a^2 + 2a + 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 - 8 < 0$

$\boxed{b = \frac{1}{2}}$

$\Downarrow$

$a = 4$

$c = \frac{1}{2}$

$a = 2$

$\sqrt{\frac{3x}{2} - 6} = \frac{x}{2} + 1$

$x + 2$

$\frac{3x}{2} - 6 = \frac{x^2}{4} + x + 1$

$6x - 24 = x^2 + 4x + 4$

$x^2 - 2x + 28 = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a = 2c \\ a = 4c \\ abc = 1 \\ 2c - 1 = 4b \\ a = 4 \end{cases}$$

$4c^2 \cdot \frac{2c-1}{4} = 1$

$2c^3 - c^2 - 1 = 0$

$c = 1$

	2	-1	0	-1
1	2	1	1	0

$2c^2 + c + 1 = 0$

$D < 0$

Черновик

Математика 11

$-\frac{1}{4}$ 1. 17

$a = 8b$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right)$

$\frac{a^2 b}{2} - ab - 1$

$a^2 - 2ab - 2 = 0$

$a^2 - c - 2 = 0$

$\frac{a^3}{16} - \frac{a^2}{8} - 1 = 0$

$a^3 - 2a^2 - 16 = 0$

$\frac{8}{\log} - \frac{64}{2}$

$4b - 1 = 2$

$8\log_a c$

$\log_a b$

$ab = 1$ $x > 4$ $x \neq \frac{14}{3}$

$b^3 - b^2 - 1 = 0$

$b^3 - 3b^2 + 3b - 1 + 2b^2 - 3b$

$(b-3)^3 + 2b^2 - 3b = 0$

$(b-3)^3 + b(b-3) + b^2 = 0$

$a + 3 =$

$a^2 + ab + a^2 = 9$ 6x

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$8b^2(4b-1) = 32$

$(b+1)(a+1) - 1 = 0$

10x

$\frac{9}{16} + 1 = \frac{1}{\cos^2}$

$370 < 93$

$\frac{96}{5}$ AC 10x

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

$\frac{a^2}{25} = 1$

$S_{ABC} =$ 625 − 576 $HC = 6x$

$a = \frac{5}{\sqrt{7}}$ $\frac{49}{5}$

$\frac{abc}{} = 10x$ $\frac{ax}{3} \cdot 4 = 8x$

$36 \times 17 = 252\ 36\ 612$

$49 + 25 = 74$

21101792 (U126379 M1301038)