Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101763**

ID профиля: **178351**

Вариант 22

Черновик

к 1

(1) Вар. 22

$a_1 \dots a_{15}$ - арифм прогр

d - разность арифм прогр; $d>0$; $d\in\mathbb{Z}$ (иначе в прогр будут нецел.)

$S = a_1 + \dots + a_{15} = 15a_1 + \overset{105}{\cancel{95}}d$

$a_7 = a_1 + 6d$ | $a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{16} = a_1 + 15d$ | $a_{12} = a_1 + 11d$

Запишем систему:

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+15d) > 15a_1 + \overset{105}{\cancel{95}}d - 24 & (1)\\ \cancel{a_{11}}(a_1+10d)(a_1+11d) < 15a_1 + \overset{105}{\cancel{95}}d + 4 & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2 + 15a_1d + 6a_1d + 90d^2 > 15a_1 + \overset{105}{\cancel{95}}d - 24\\ a_1^2 + 11a_1d + 10a_1d + 110d^2 \overset{<}{\cancel{>}} 15a_1 + \overset{105}{\cancel{95}}d + 4\end{cases}$$

Из этого следует, что $\overset{20}{\cancel{30}}d^2 \le 28$, при условии, что

$d\in\mathbb{Z} \Rightarrow d^2 = 1 \overset{d\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} d = 1$, иначе при выполн (1) не выполн (2)

$$\begin{cases}a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + \overset{105}{\cancel{95}} - 24\\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + \overset{105}{\cancel{95}} + 4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2 + 6a_1 + 90 - 71 > 0\\ a_1^2 + 6a_1 + 110 - 99 \cancel{>} 0\end{cases}$$

(1) $D = 36 - 19\cdot 4 < 0 \Rightarrow$ всегда верно

(2) $D = 36$

$$\begin{cases}a_1^2 + 6a_1 + 19 > 0 & (1)\\ a_1^2 + 6a_1 + 11 < 0 & (2)\end{cases}$$

$d=1$: $\begin{cases}a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24\\ a_1^2 + 21a_1 + 110 \overset{<}{\cancel{>}} 15a_1 + 105 + 4\end{cases}$

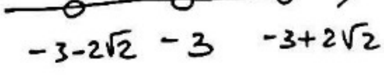
$$\begin{cases}a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0\\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0\end{cases} \quad \begin{cases}(a+3)^2 > 0 & (1)\\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 & (2)\end{cases}$$

(1): верно всегда, кроме $a_1 = -3$

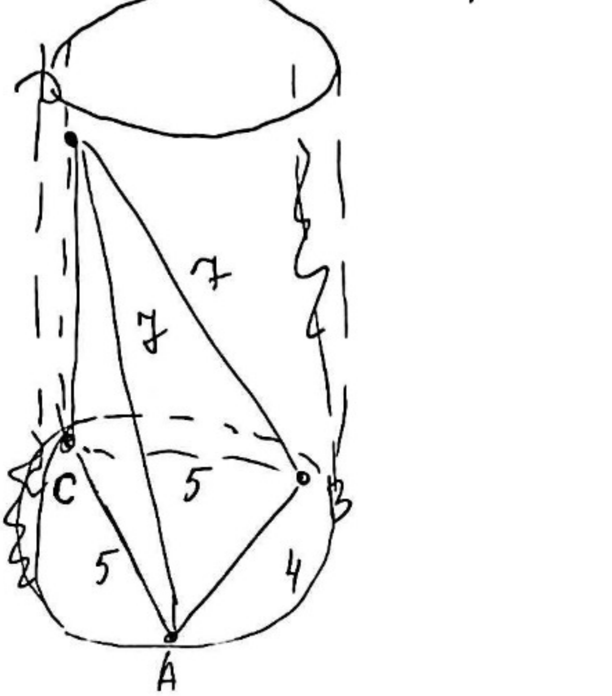
(2): $D = 36 - 4 = 32$ $a_1 = \dfrac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4\sqrt2}{2} = -3 \pm 2\sqrt2$

$2 < 2\sqrt2 < 3 \Rightarrow -1 < -3 + 2\sqrt2 < 0$

$-6 < -3 - 2\sqrt2 < -5$



$a_1 = -5; -4; -2; -1$ Ответ: $a_1: -5; -4; -2; -1$



1) Докажем, что $AB \parallel$ плоскости основания цилиндра:

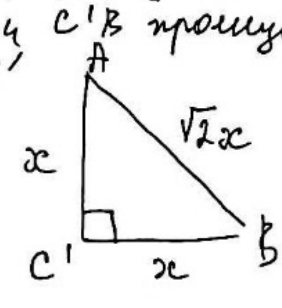
~~В самом деле, если бы это было не так, то две (различные) точки на прямой параллельной оси цилиндра не могли бы давать~~

Если бы это было не так, то при условии, что $\triangle CBA$ - равноб, не могло бы быть, что $\triangle DBA$ - равноб.

Так как все точки дающие равнобедренный треугольник с данным отрезком PQ лежат в плоскости перпендикулярной отрезку и проходящей через его середину. DC - прямая, принадлежащая такой плоскости $\Rightarrow DC \perp AB$, однако $DC \perp$ основанию цилиндра $\Rightarrow AB \parallel$ основанию цилиндра

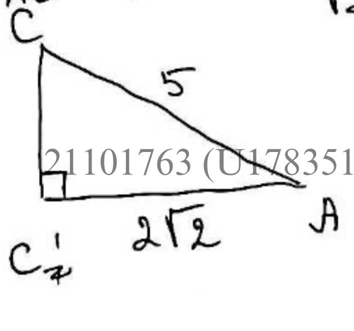
2) Не умаляя общности сделаем цилиндр таким, что D лежит на верхнем основании цилиндра, а AB - на нижнем. Тогда в зависимости от того насколько близко к ~~середине~~ центру окружности (основания цилиндра) находится AB зависит и радиус окружности. Самый маленький радиус будет, если AB пройдет через центр, в самом деле, если AB - хорда, то диаметр заведомо больше хорды $\Rightarrow$ радиус не наименьший.

Тогда AB-диаметр. Точка C - лежит где-то на боковой грани, спроецируем ее на нижнее основание C'. $\triangle C'AB$ - прямоугольный, так как $\angle AC'B$ опирается на диаметр и также $\triangle C'AB$ - равнобедренный так как $C'A$ и $C'B$ проекции равных отрезков на одну плоскость. $\angle DAC' = \angle DBC'$



$AC' = BC' = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, тогда $C'C$:

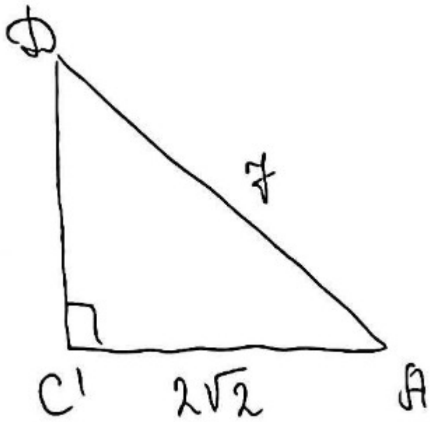
$\angle CC'A = 90°$, так как $C'C \parallel$ оси цилиндра



$C'C = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

Чистовик

Вар. 22



3

$DC' \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow \angle DC'A = 90^\circ$

$DC' = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

Тогда $CD = DC' - CC' = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

Ответ: $CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

Чистовик

№ 3 (4) Вар. 22

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;\ 50) & (2) \end{cases}$$

~~Если Если~~ $\cancel{x^2 \quad x > 5\sqrt{2}}$

Исходя из (2): $\left[\begin{array}{l} a^2+b^2 \le 14a+2b, \text{ если } 14a+2b-50 \le 0 \\ a^2+b^2 \le 50, \text{ если } 14a+2b-50 \ge 0 \end{array}\right.$

$a^2+b^2 \le 14a+2b$

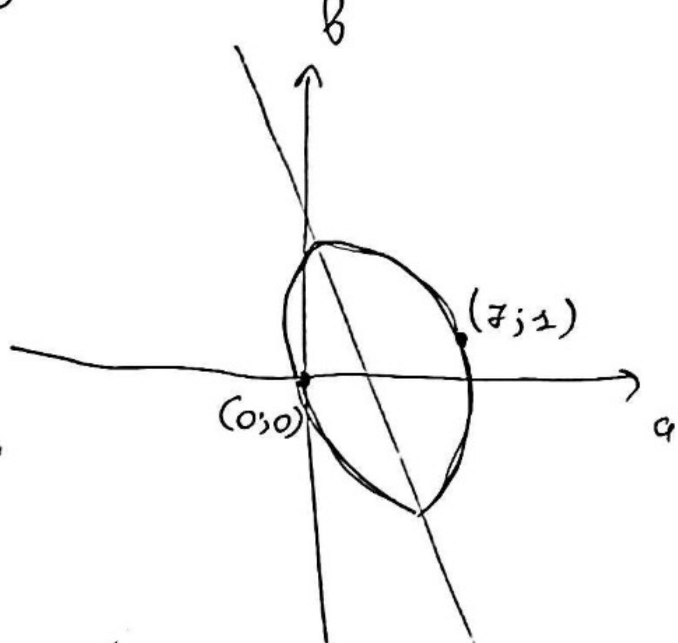
$a^2-14a+49-49+b^2-2b+1-1 \le 0$

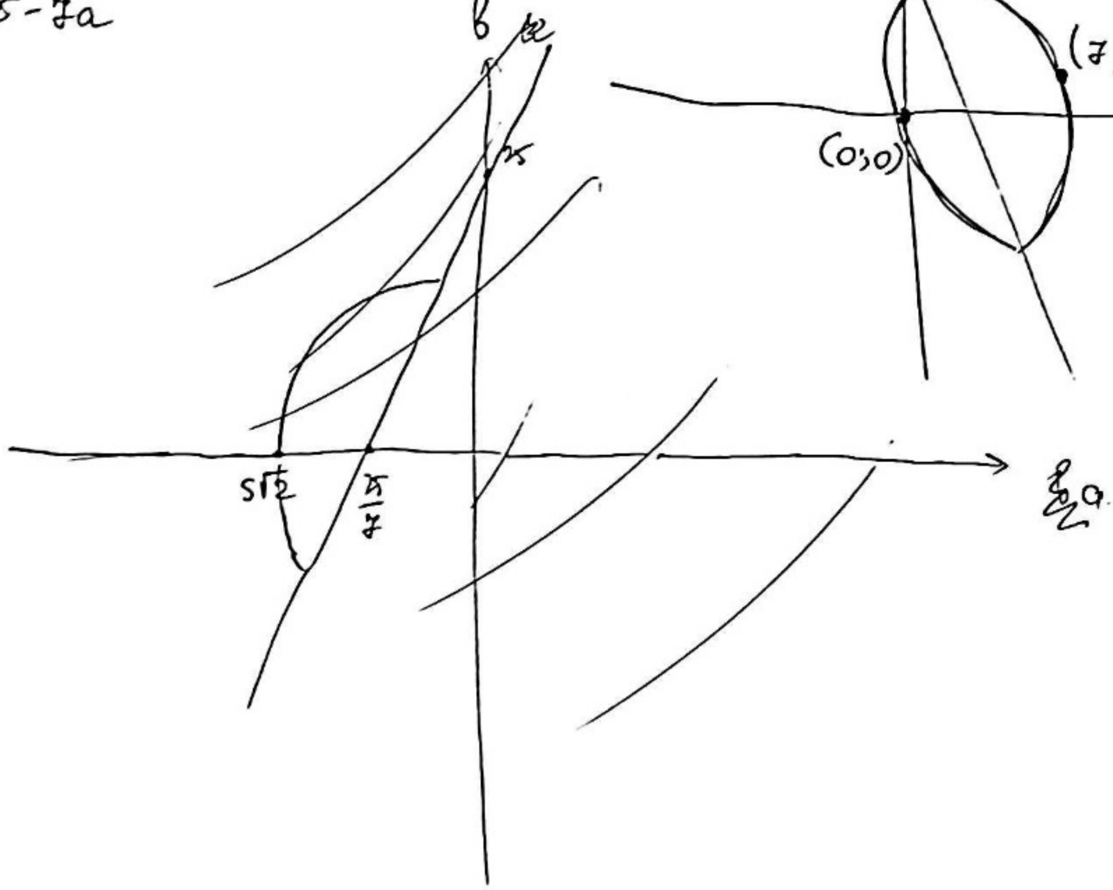
$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$

$14a+2b-50 \ge 0$

$7a+b-25 \ge 0$

$b \ge 25-7a$





Данные окружности имеют центры на друг друге
$\Rightarrow$ пересекаются по $14a+2b-50=0$

Всевозможные значения $(a;b)$ удовл (2) лежат в данной области.

~~b∈~~ $a \in [7-5\sqrt{2};\ 5\sqrt{2}] \to$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101763**

ID профиля: **178351**

Вариант 22

Черновик (1) Вар 22

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 14 = 2^1 \cdot 7^1 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

НОД$(a;b;c)$ – берем наименьшие степени входящих простых множителей

НОК$(a;b;c)$ – берем наибольшие степени входящих простых множителей

Тогда:

~~$a = 2^{\alpha_1} \cdot 2^{\beta_1}$~~ $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$

Хотя бы одно из $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ должно быть равно 1 и хотя бы одно равно 17, оставшееся не может быть 1–17.

Аналогично одно из $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ должно быть 1 и 18, оставшееся от 1 до 18

1) Посчитаем способы для α:

Предположим никакие α_i не совпадают, тогда способов: ~~$15 \cdot 3 = 45$~~ $15 \cdot 6 = 90$ способов

Предположим какие-то два α_i равны 1, тогда: 3 способа $|1\ 1\ 17|\ 1\ 17\ 1|\ 17\ 1\ 1|$

Предположим какие-то два α_i равны 17 тогда: 3 способа $|17\ 17\ 1|\ 17\ 1\ 17|\ 1\ 17\ 17|$

Итого: $90 + 3 + 3 = 96$ способов

2) Посчитаем способы для β:

Предположим никакие β_i не совпадают:

$6 \cdot 16 = 96$ способов

Аналогично с α получаем еще 6 способов, когда какие-то β совпадают.

Чистовик

(2) Вар. 82

Итого: $96+6=102$ способа для β

Наборы α и β не зависят друг от друга, поэтому всего будет $102 \cdot 96 = 9792$ троек чисел

Ответ: 9792 троек чисел.

21101763 (U178351 M1304343)

Чистовик ③ Вар. 22

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right);\ \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2;\ \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

~~Допустим~~

$$\cancel{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2}$$

$$\cancel{\frac{1}{\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}=\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2}$$

$$\cancel{\frac{1}{\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}=\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{2}+1\right)^2>0\\ \frac{x}{2}+1\neq 1\\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0\\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1\\ \frac{3x}{2}-6>0\\ \frac{3x}{2}-6\neq 1\end{cases}$$

$\cancel{\frac{x}{2}+1>0}$

$\cancel{\frac{x}{2}+1\neq}$

$x=7$:

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=1$$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=2$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2$$

$x=7$ подходит

Ответ: $x=7$