# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101718**

ID профиля: **275626**

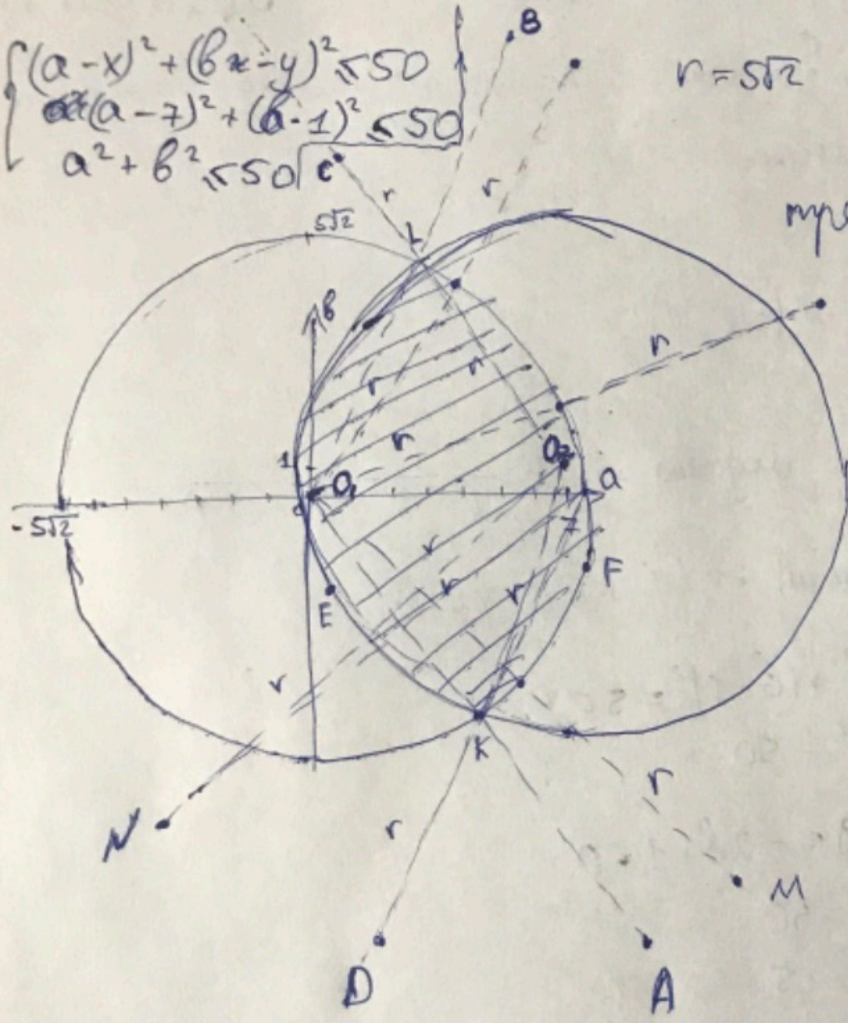
Вариант 22

Вариант 22 Задача №3 Чистовик Лист 1

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;\ 50)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le 14a+2b\\ a^2+b^2 \le 50\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2 \le 50\\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le 50\end{cases}$$

$r = 5\sqrt{2}$




требуемая область решений $(a;b)$ из ур-ний

$$\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le 50\end{cases}$$

тогда график $(a-x)^2+(b-y)^2 \le 50$ должен иметь хоть одну точку с штрих областью

$\Rightarrow$ находиться на расстоянии не более $5\sqrt{2}$

точки от A до B получены так: $\omega$(точка; r) касается $\cup LFK$

$\cup LFK \in \omega(O_1; r) \Rightarrow$ эти центры $\omega$(точка; r) $\in \omega(O_1; 2r)$

но т.к рассматривается $\cup LFK \Rightarrow$ полученное множество точек явл $\cup AMB \in \omega(O_1; 2r)$

аналогично получена $\cup DNC \in \omega(O_2; 2r)$

для промежутков между точками D, A и C, B действует правило, что $\omega$(точка; r) имеет точку K или L соответственно

также центры $\in \omega(L; r)$ или $\omega(K; r)$

Продолжение задачи №3 Чистовик Лист №3

для $\triangle KHO_2$: $KO_2 = 5\sqrt{2}$ $\quad KH = \sqrt{50 - \frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 2{,}5\sqrt{6}$

$O_2H = \frac{1}{2}$ ~~$O O$~~ $O_1O_2 = \sqrt{7^2 + 1^2} = 2{,}5\sqrt{2}$

$O_2(7;1)$

$H(3{,}5; 0{,}5)$

$\Rightarrow \angle HKO_2 = \arcsin\frac{O_2H}{KO_2} = \arcsin\frac{1}{2} = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle O_1KO_2 = 60^\circ = \angle OKA = \angle O_1LO_2 = \angle CLB$

$\angle KO_1L = \angle LO_2K = 120^\circ$

$\Rightarrow S_M = \frac{\pi(2r)^2\cdot 120}{360} + \frac{\pi(2r)^2\cdot 120}{360} + \frac{\pi r^2\cdot 60}{360} + \frac{\pi r^2\cdot 60}{360^\circ} - KH\cdot O_1O_2 =$

$= \pi r^2\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) - 2{,}5\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{2} = 150\pi - 25\sqrt{3}$

Ответ: $150\pi - 25\sqrt{3}$

21101718 (U275626 M1297759)

Задача №1 Лист №4 Чистовик

Пусть $a_{11} = x \Rightarrow a_7 = x - 4d$

$a_{12} = y \Rightarrow a_{16} = y + 4d$ ; $y - x = d$

$xy < S + 4$ $S = 15a_1 + \frac{14 \cdot 15}{2} = 15(a_1 + 7)$

$-xy > -S - 4$

$(x-4d)(y+4d) > S - 24$

$$\begin{cases} xy - 4dy + 4dx - 16d^2 > S - 24 \\ -xy > -S - 4 \end{cases}$$

$-4d(y-x) - 16d^2 > -28$

$-4d^2 - 16d^2 > -28$

$-20d^2 > -28$

$d^2 < 1{,}4$

$0 < d < \sqrt{\frac{7}{5}} \Rightarrow d = 1$ т.к послед целая

$$\begin{cases} (a_1+6)(a_1+15) > (a_1+7)15 - 24 \\ (a_1+10)(a_1+11) < (a_1+7) \cdot 15 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$ $(a_1+3)^2 > 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 1 = 8$

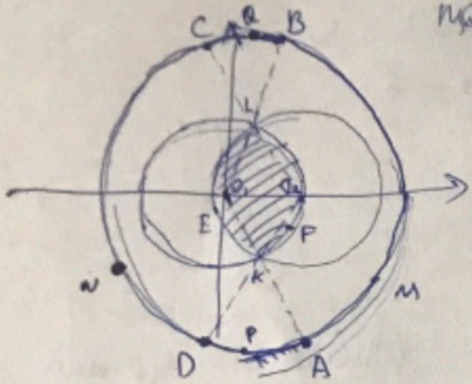
$a_1 = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} -3 - 2\sqrt{2} < a_1 < -3 + 2\sqrt{2} \\ a_1 \neq -3 \end{cases}$$ $\Rightarrow a_1 = -5; -4; -2; -1$

Ответ: $-5; -4; -2; -1$

21101718 (U275626 M1297759)

Продолжение задачи №3 Чистовик Лист №2




получена М на плоскости ограниченная $\cup AMB\ \omega(O_1;2r)$ $\cup DNC\ \omega(O_2;2r)$ $\cup DPA\ \omega(K;r)$ $\cup CQB\ \omega(L;r)$

$$S_M = S_{\text{сект } DO_2C} + S_{\text{сект } BO_1A} + S_{\text{сект } DKA} + S_{\text{сект } CLB} - S_{\text{ромб } LO_1KO_2}$$

$LK \perp O_1O_2$ т.к $\omega(O_1;r) \cap \omega(O_2;r)$

$\Downarrow$

в $\triangle LO_1O_2$: $LH$ - высота, $O_1L = O_2L$ $\Big\} \Rightarrow LH$ - медиана $\Rightarrow LK$ - сер пер к $O_1O_2$

$\triangle LO_1O_2 = \triangle KO_1O_2$ (по 3-м сторонам) $\Rightarrow LO_1KO_2$ - ромб

решим сист ур-й
$$\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2=50\\ a^2+b^2=50\end{cases}$$

$$-14a+49-2b+1=0$$
$$14a+2b=50$$
$$7a+b=25$$
$$b=25-7a$$
$$a^2+(25-7a)^2=50$$
$$a^2+49a^2+625-350a=50$$
$$50a^2-350a+625-50=0$$
$$2a^2-14a+25-2=0$$
$$\frac{D}{4}=49-46=3$$
$$\begin{cases}a=\dfrac{7\pm\sqrt{3}}{2}\\ b=25-7a\end{cases}$$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101718**

ID профиля: **275626**

Вариант 22

Чистовик Лист 1 Задача №4

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 14 = 2\cdot 7 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \text{ имеет только 1 множ } 2 \\ b \text{ имеет 1 множ } 7 \\ c \text{ любое } \vdots 14 \end{cases} \\ \text{либо } \begin{cases} a = 14 \\ b \text{ и } c \vdots 14 \text{ – любые} \end{cases} \end{array}\right.$

~~НОК~~

~~тройка – набор из 3-х чисел, который не изменяется при перестановки чисел местами между собой~~

$2\cdot 7^{18}\ ;\ 7\cdot 2^{17}\ ;\ 2^n\cdot 7^m$
$1\le n\le 17$
$1\le m\le 18$

$2\cdot 7^m\ ;\ 7\cdot 2^n\ ;\ 2^{17}\cdot 7^{18}$
$1\le n\le 17$
$1\le m\le 18$

$2\cdot 7^m\ ;\ 7\cdot 2^{17}\ ;\ 2^n\cdot 7^{18}$
$1\le n< 17$
$1\le m< 18$

$2\cdot 7^{18}\ ;\ 7\cdot 2^n\ ;\ 2^{17}\cdot 7^m$
$1\le n< 17$
$1\le m< 18$

$14\ ;\ 2^{17}\cdot 7^{18}\ ;\ 2^n\cdot 7^m$
$1\le n\le 17$
$1\le m\le 18$

$14\ ;\ 2^{17}\cdot 7^m\ ;\ 2^n\cdot 7^{18}$
$1\le n< 17$
$1\le m< 18$

$14\ ;\ 2^{17}\cdot 7\ ;\ 2^n\cdot 7^{18}\quad 1\le n\le 17$
$14\ ;\ 2^{17}\cdot 7^m\ ;\ 2\cdot 7^{18}\quad 1\le m\le 18$
$14\ ;\ 2^{17}\cdot 7^{18}\ ;\ 2\cdot 7^m\quad 1\le m\le 18$
$14\ ;\ 2^{17}\cdot 7^{18}\ ;\ 2^n\cdot 7\quad 1\le n\le 17$

все варианты различны ⇒ всего таких троек = ~~15·16·6 + 17·18·6 + 15·16·6 + 15·16·6 + 17·18·6 + 15·16·6~~

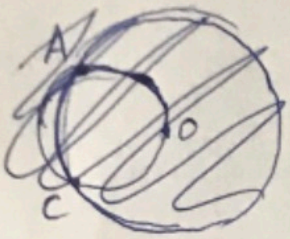
$= 15\cdot 16\cdot 6\cdot 6 + (17+17+18+18)\cdot 6 =$

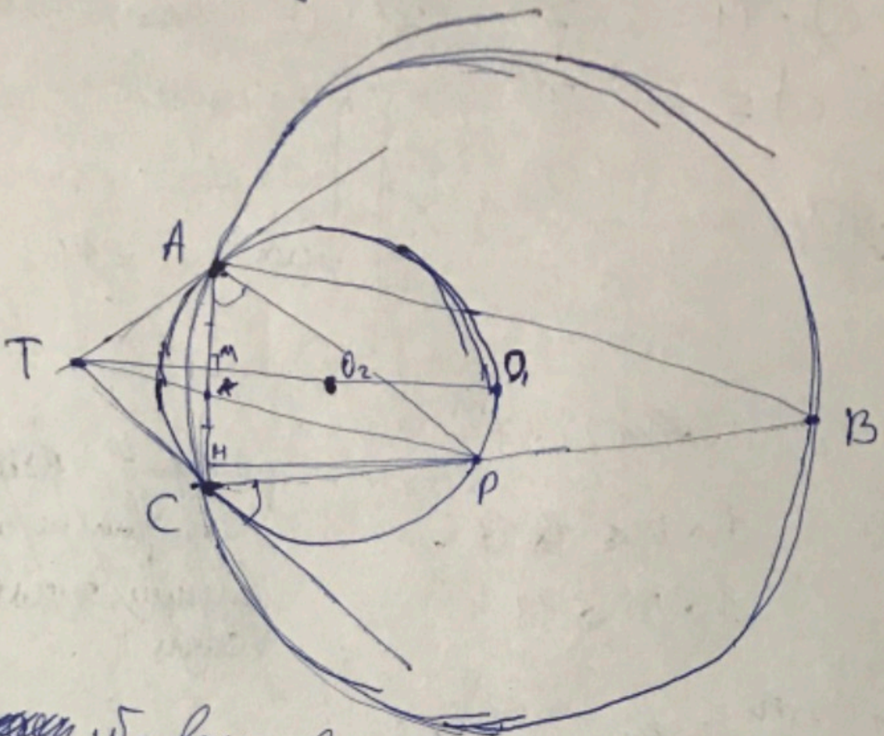
$= 240\cdot 6\cdot 6 + 70\cdot 6 = 6(1440+70) =$

$= 6\cdot 1510 = 9060$

Ответ:

Задача №6 Чистовик Лист 2




TC = TA т.к ~~...~~ $\omega_2$ впис в $\angle ATC$

$\Downarrow$

$\Delta CTA$ – равнобедр $\Rightarrow T \in$ сер пер. к AC

т. $O_2$ и $O_1$ тоже равноуд от A и C $\Rightarrow O_2; O_1; T \in$ сер пер. к AC

PH – высота в $\Delta$ CKP и $\Delta$ APK $\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{KA}{KC} = \frac{7}{5} \Rightarrow KA = 7x$, $KC = 5x$

$\Delta PHK \sim \Delta KMT$ (по 3-м углам ($HP \perp CA$ и $TM \perp AC$))

M делит AC пополам $\Rightarrow MC = 6x$, $KC = 5x$ $\Rightarrow MK = 1x$

$S_{APK} = \frac{PH \cdot AK}{2} = 7$

$PH = \frac{2}{x}$