Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101636**

ID профиля: **363714**

Вариант 22

Чистовик №1 Математика, 11кл.

№1

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+15d)>S-24\\(a_1+10d)(a_1+11d)<S-4\end{cases}$$

$S=\frac{a_1+a_{15}}{2}15=\frac{a_1+a_1+14d}{2}15=(a_1+7d)15$

где a_1 - первый чл. прогр.
d - разность прогр.

$$\begin{cases}a_1^2+21da_1+90d^2>S-24\\a_1^2+21da_1+110d^2<S+4\end{cases}$$ -вычтем

$a_7=a_1+6d$
$a_{16}=a_1+15d$
$a_{11}=a_1+10d$
$a_{12}=a_1+11d$

$20d^2<28$

$d^2<\frac{28}{20}$

$d\in\left(-\sqrt{\frac{28}{20}};\sqrt{\frac{28}{20}}\right)$ и d-целое неотр. число $\Rightarrow d=1$

1) $a_1^2+21a_1+90>15a_1+105-24$
$a_1^2+6a_1+9>0$

2) $a_1^2+21a_1+110<15a_1+105+4$

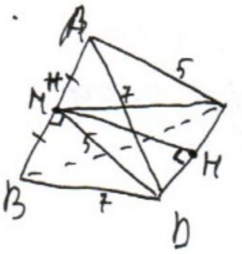
$$\begin{cases}\text{из 1: } a_1\neq-3\\\text{из 2: } a_1\in(-3-2\sqrt{2};\,2\sqrt{2}-3)\end{cases}$$
т.к. a_1 - целое, то подходят только
$a_1=-5$; $a_1=-4$; $a_1=-2$; $a_1=-1$

Ответ: $-5;-4;-2;-1$

21101636 (U363714 M1301151)

Чистовик №2 Математика, 11

№ В2



пусть М – проекция D на AB

Н – проекция М на CD

$\triangle$ ADB – р/б (BD = AD) => DM и CM – медианы и высоты

$\triangle$ ACB – р/б (AC = BC)

тогда плоскость CDM – ~~ось~~ пл. симметрии

CD ∈ б.п. (по усл.), ~~CD ...~~ и CD ∥ оси ц. => CMD ⊥ оси ц.

=> AB ∥ оси ц.

r min ~~тогда~~ $r = \frac{AB}{2}$, иначе $r \geq \frac{AB}{2}$

$r = \frac{AB}{2}$

CD ∈ б.п., A ∈ б.п., B ∈ б.п. => ~~...~~ MH (расст. от AB до CD) = r

$CM = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$ (т.к. медиана, высота)

$DM = \sqrt{49-4} = \sqrt{45}$ (–"–)

~~...~~ DC = DH + HC $\quad DH = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

$HC = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

$DC = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{41} + \sqrt{17}$

Чистовик №3 Математика, 11кл.

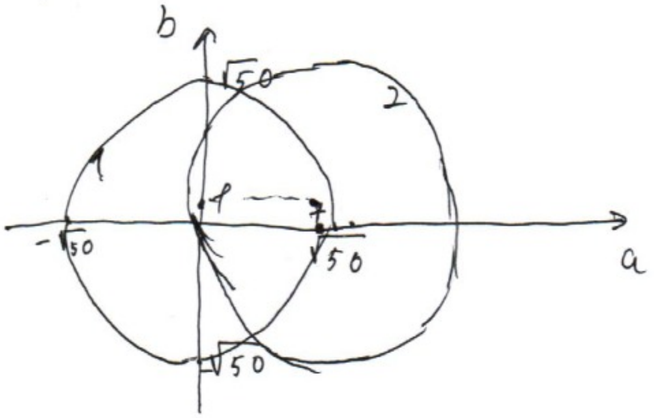
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;50)\end{cases}$$ ~ 3

$S_н = ?$ изобразим в осях $(a;b)$

второе ур. сист.: $a^2+b^2 \le \min(14a+2b;50)$

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 14a+2b\end{cases} \quad (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$$

1 ур. тоже задается ~~этим неравенством~~ окр. с аналогич. радиусом
1 ур. системы можно воспринимать как условие о том, что расстояние от точки $(a;b)$ до точки $(x;y) \le \sqrt{50}$



Расстояние между центрами равно радиусу окружности, => нам необходимо вычислить S сек. с углом $120°$, т.к. правильные треугольники, радиусом $2\sqrt{50}$

$S_1 = \frac{\pi \cdot 200}{3}$ - берем 2 раза, т.к. фигура симм., но тогда площадь ~~общей~~ ромба общ. считается 2 раза, посчитаем её (она вкл. $S_{ромба} + S_{полукруг}$)

$S_р = \frac{50\sqrt{3}}{4}$ и добавим площадь полукруга, радиус которого $r=\sqrt{50}$ ~~$S_{пол}$~~, ~~откуда~~ $S_{полукр.} = \frac{\pi R^2}{2} = 25\pi$

~~$S = 25\pi$~~ Итого: $S_{общ.} = \frac{400\pi}{3} - 25\sqrt{3} + 25\pi$

~~Ответ: 25π~~

Ответ: $\frac{400\pi}{3} - 25\sqrt{3} + 25\pi$

$S=\frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15$

$a_{15}=a_1+k\cdot 14$

$123 \quad a_1+k\cdot(n-1)$

$a_7 a_{16} > S-24$

$a_{11}a_{12} < S+4$

$S=\frac{a_1+14k+15}{2}$

$15\cdot 7=105$

$a_7=a_1+6k$

$a_{16}=a_1+15k$

$a_{11}=a_1+10k$

$a_{12}=a_1+11k$

$$\begin{cases}(a_1+6k)(a_1+15k) > \frac{(a_1+14k)15}{2}-24\\ (a_1+10k)(a_1+11k) < \frac{(a_1+14k)15}{2}+4\end{cases}$$

$a^2+15ak+6ak+90k > \frac{15}{2}a+105k-24$

$a^2+11ak+10ak+110k < \frac{15}{2}a+105k+4$

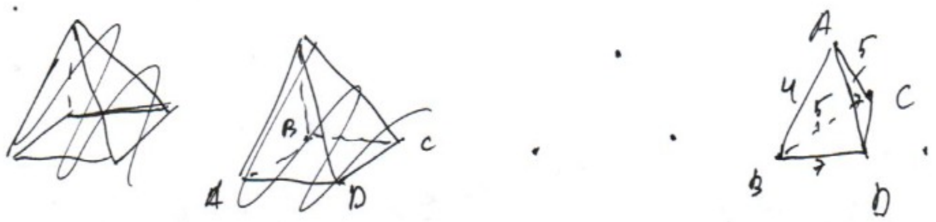
$$\begin{cases}k(21a-15) > -a^2+\frac{15}{2}a-24\\ k(21a+5) < -a^2+\frac{15}{2}a+4\end{cases}$$

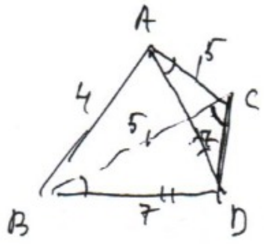
$$\begin{cases}k > \dfrac{-a^2+\frac{15}{2}a-24}{21a-15}\\ k < \dfrac{-a^2+\frac{15}{2}a+4}{21a+5}\end{cases}$$

1 1

2 2.2

B 3.2

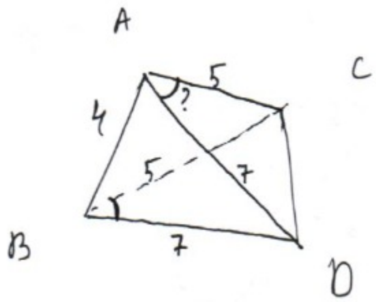


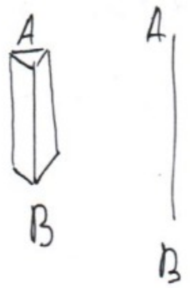


$2\angle+\beta=180^\circ$

$\beta\le 60^\circ$

$CD\in(0;4]$

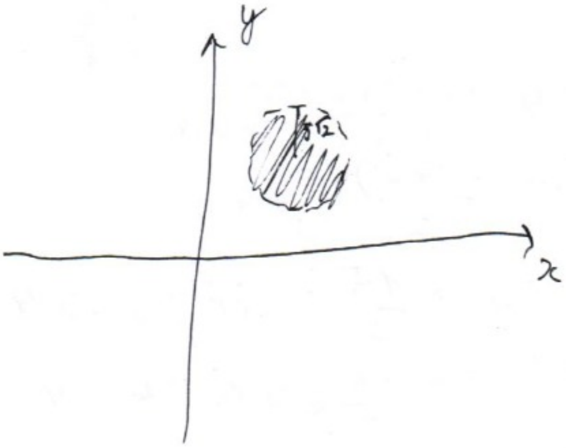




Черновик - 2 Математика, 11

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b; 50)\end{cases}$$

$\sqrt{50}$ $5\cdot 10$ $5\cdot 5\cdot 2 = 5\sqrt{2}$



$14a+2b \ge 50$

$a^2+b^2 = 14+2b$

$a = \sqrt{b^2-2b-14}$

1
2
7

2 -14

$D = b^2-4ac = 4+96 = 10^2$

$x = \frac{2\pm 10}{2}$ $x=6$ $x=-4$

$a = \sqrt{(b-6)(b-4)}$

$b \ge 6$ $a \ge \frac{38}{14}$

$b \le 4$ $a \ge$

$\cancel{a^2+2b \ge 50}$

$14a+2b \ge 50$

$a^2+b^2 \le 14a+b$

$\cancel{a^2-14a+b^2}$

$a^2-14a \le -b^2+b$

$a(a-14) \le b(1-b)$

$14a+2b \le 50$

$a^2+b^2 \le 50$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 6 \\ \hline 90 \end{array}$

$S = \frac{a_1+a_{15}}{2} \cdot 15$ $a_{15} = a_1+14k$ $S = \frac{2a+14k}{2} 15 = (a+7k)15$

$$\begin{cases}(a+6k)(a+15k) > (a+7k)15-24\\ (a+10k)(a+11k) < (a+7k)15+4\end{cases}$$

$-(a+10k)(a+11k) > (a+7k)15+4$

$(a+6k)(a+15k)-(a+10k)(a+11k) > -28$

$\cancel{a^2}+\cancel{6ak}+\cancel{15ak}+15\cdot 6k^2-(\cancel{a^2}+\cancel{10ak}+\cancel{11ak}+121k^2) > -28$

$90k^2-121k^2 > -28$ $-31k^2 > -28$

$31k^2 < 28$

$k^2 < \frac{28}{31}$

$k < \sqrt{\frac{28}{31}}$ $0 < k < \sqrt{\frac{28}{31}}$

21101636 (U363714 M1301151)

Черновик №3 Математика, 11

Вариант 22!

$\cancel{(a_1+10d)(a_1+13d)<S}$

$(a_1+6d)(a_1+15d) > S-24$

$(a_1+10d)(a_1+12d) < S+4$

$S=\frac{2a_1+14d}{2}n = (a_1+7d)15$

a_1^2

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+15d) > S-24\\(a_1+10d)(a_1+11d) < S+4\end{cases}$$

$\cancel{a^2 > 15a-24}$

$\cancel{a^2 < 15a+4}$

$(a+6)(a+15)-(a+10)(a+11) > 28$

$\cancel{a^2+6a+15a+90-a^2}$

$(a+6)(a+15) > (a+7)15-24$

$a^2+21a+90 > 15a+105-24$

$a^2+6a+9 > 0$ 3 3 $\frac{\cancel{a} \pm \sqrt{36-}}{2}$

$(a-3)^2 > 0$ $a \neq 3$

$(a+10)(a+11) < (a+7)15+4$

$a^2+21a+121 < 15a+109$

$a^2+6a+12 < 0$

$\cancel{-6\pm}$

$-6 \pm \sqrt{36-48}$

$31d < 28$ $-31d > -$

$31d^2 < \sqrt{\frac{28}{31}}$

$\frac{1+15}{2}\cdot 15$ 120 $8\cdot 15$

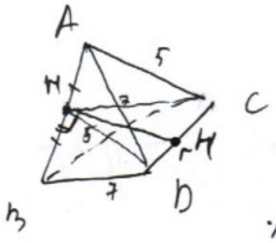
~~0 1 2 3 4 5 6~~

$7\cdot 16 > 112$

$(2\sqrt{2}-3)$ $\pi R^2 = \pi\cdot 50$ 25π

21101636 (U363714 M1301151)

Черновик № 4



$DM \perp AB \quad CM \perp AB$

CMD - сим.

CDM - перп. осн. цилиндра $\Rightarrow AB \parallel$

AB - диам. $CD \in$ б. п., $A, B \in$ б. п.

$MH = r \qquad CM = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$ (CM - медиана)

$DM = \sqrt{49-4} = \sqrt{45}$ (DM - мед.)

$DH = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

$HC = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

$DC = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

6 7 4 5

$\boxed{CD \geq 0\ ?}$

$\boxed{CD > 2r\ ?}$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 50 \\ a^2 + b^2 \leq \min(14a + 2b; 50) \end{cases} \qquad S_M = ?$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 50 \\ a^2 + b^2 \leq 14a + 2b \end{cases} \qquad (a-7)^2 + (b-1)^2 \leq 50$$

раст. от $(a; b)$ до $(x; y) \leq \sqrt{50}$

21101636 (U363714 M1301151)

~~Чистовик~~ №1 Черновик №5 Математика, 11

№1

$S=\frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15=\frac{a_1+a_1+14d}{2}\cdot 15=(a_1+7d)15$ – сумма первых 15 членов арифм. прогр. с 1 чл. a_1 и разн. d

тогда

$a_7=a_1+6d \quad a_{11}=a_1+10d$

$a_{16}=a_1+15d \quad a_{12}=a_1+11d$

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+15d)>(a_1+7d)15-24\\(a_1+10d)(a_1+11d)<(a_1+7d)15+4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+21a_1d+90d^2>(a_1+7d)15-24\\a_1^2+21da_1+121d^2<(a_1+7d)15+4\end{cases}$$ вычтем

$31d^2<28$

$d^2<\frac{28}{31}$

$|d|<\sqrt{\frac{28}{31}} \qquad \sqrt{\frac{28}{31}}<1 \Rightarrow -1<d<1.$

Т.к. d – целое, неотриц. и не равно 0, то d не существует.

$\Rightarrow a_1$ не существует.

21101636 (U363714 M1301151)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101636**

ID профиля: **363714**

Вариант 22

Чистовик №1 Математика, 11

№1

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14=2\cdot 7 \quad (1) \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \quad (2) \end{cases}$

Из 1: каждое из чисел a, b, c делится нацело на 2 и на 7, то есть 2 и 7 присутствуют в разложении числа на простые множители. Заметим, что в НОД берутся ~~в~~ произведение общих простых делителей, то есть среди данных чисел a, b и c в разложении на простые множители минимал. степень 2 и 7 будет 1

Из 2: т.к. 2 и 7 - простые числа, то никакие делители, кроме 2 и 7 у чисел a, b и c не встречаются и степень 2-ки и 7-ки какого-то ~~и~~ из чисел в разложении равна старшей.

Заметим, что данная задача равносильна тому, что нужно подсчитать кол-во троек чисел по степеням так, что в одной из них есть число 1, число 17 и оставшееся число находится в интервале $[1;18]$ 2 раза.

Если 1-цы 2 или 17 2, то таких вариантов 6

Для 18 аналогично

Если же третье число не совпадает с предыдущими двумя, то мы выбираем 3 способами позицию 1; 2 способами позицию старшей степени и для 3-го числа позиция определяется однозначно. Итого 15 варианов для степени двоек и 16 вариантов для степени семерок.

$(6+6\cdot 15)(6+6\cdot 16)=9792$

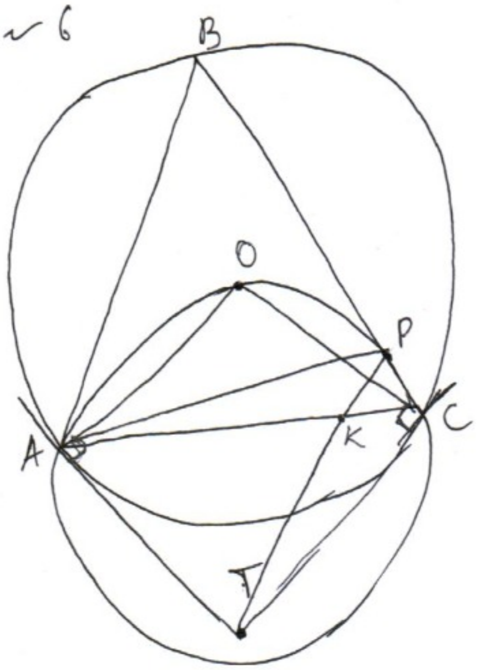
Ответ: 9792

21101636 (U363714 M1301152)

Чистовик №2

Математика, 11

№6



OA и OC - радиусы AT и CT - касательные =>
$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$

пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOP = 2\alpha$ (впис. и центр.)
$\angle APC = \angle AOC$ (опир. на одну дугу) $= 2\alpha$

21101636 (U363714 M1301152)

Чистовик № 3

Математика, 11

№ 5

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$; $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

Пусть $a=\frac{x}{2}+1$ $\quad b=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$ $\quad c=\frac{3x}{2}-6$

$\frac{1}{2}\log_a b \qquad 4\log_b c \qquad 2\log_c a$

пусть $u=\cancel{\tfrac{1}{2}}\log_a b$ $\quad v=\cancel{4}\log_b c$ тогда $uv=\cancel{2}\log_c a$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}u=4v=\frac{2}{uv}+1\\ \frac{1}{2}u=4v+1=\frac{2}{uv}\\ \frac{1}{2}u+1=4v=\frac{2}{uv}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}v=\frac{1}{2} \text{ и } u=4\\ v=\frac{1}{4} \text{ и } u=4\\ v=\frac{1}{2} \text{ и } u=2\end{array}\right.$$

Обратная замена:

$\log_{\frac{x}{2}+1}$ .... (на черн)

Ответ: $x=1,6$

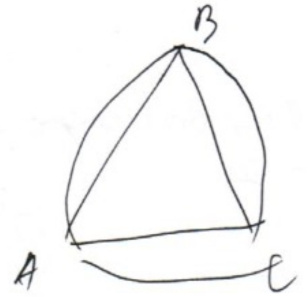
21101636 (U363714 M1301152)

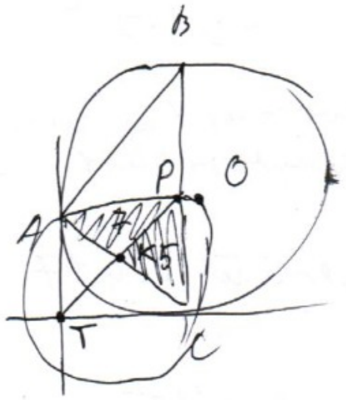
$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

Черновик №1 Математика 11

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 6 \\ \hline 90 \\ 96 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ -\ 6 \\ \hline 96 \\ 102 \end{array}$$

~~098~~



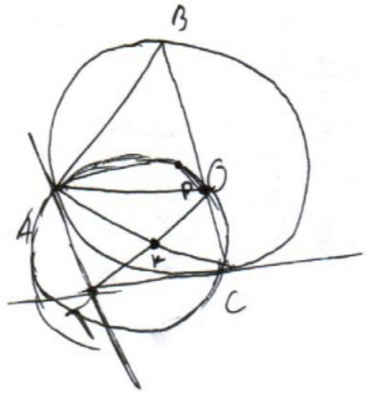


$$\begin{array}{r} 102 \\ \cdot\ 96 \\ \hline 612 \\ 918 \\ \hline 9792 \end{array}$$

~~$a = 2\cdot k + 7\cdot m$~~

~~$a = 2\cdot a$~~ $2\cdot 7\cdot k_1$
$2\cdot 7\cdot k_2$
$2\cdot 7\cdot k_3$

$a \vdots 2 \vdots 7 \quad b \vdots 2 \vdots 7 \quad c$ -"-



НОД $(a; b; c) = 14$
НОК $(a; b; c) = 2^{17}\cdot 7^{18}$
17 - простое

2 3 3
3 6
2 9

$\log_a b = c$

$a^c = b$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = \frac{x^2}{4}+x+1$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4} > 0 \quad 14x - 17 > 0$
$14x > 17$
$x > \frac{17}{14} \Rightarrow x > 1$

$\frac{3x}{2} - 6 > 0$
$3x > 12$
$x > 4$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

$a \quad b \quad c$

$a = b \quad$ ~~$b = a - 1$~~

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

$\log_a b \cdot \log_a c = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2\log_t \frac{x}{2}+1} = \log_t \frac{3x}{2} - 6$

$\log_t\left(\frac{3x}{2}-6\right)\log_t\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\log_a b \quad \log_b c \quad 2\log_c a$

$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a b = \log_b c \\ 2\log_c a - 1 = \log_b c \end{cases}$

$\log_a b = 2\log_b c$

$2\log_b c \log_b a = 1$

~~log~~

21101636 (U363714 M1301152)

Черновик №2 Математика, 11

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$ => каждое делится на 7 и 2, при чем хоть 1 имеет 2^7 и 7^7
=> никаких делителей, кроме 2 и 7 у чисел нет

$a=2^{a_1}\cdot 7^{a_2}$ $a=2^{b_1}\cdot 7^{b_2}$ $c=2^{c_1}\cdot 7^{c_2}$

$a_1+b_1+c_1=17$ 3 способа выбрать 1 из чисел в первой строчке, чтобы оно было равно 1

$a_2+b_2+c_2=18$ —″— 2

$\begin{cases} x_1+y_1=16 \\ x_2+y_2=17 \end{cases}$? кол-во решений 15 и 17

1
2
3

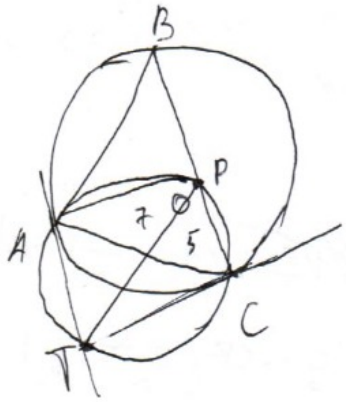
$x \in 1..15$ y опр. одн. 2 вар. —″—

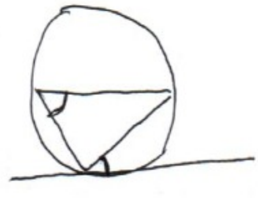
$3\cdot 3\cdot 17\cdot 15=2295$

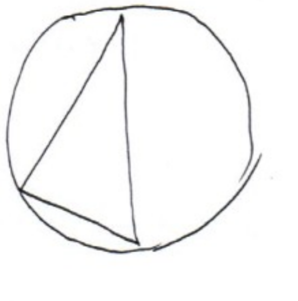
$15\cdot 17=105+15=255$, $255\cdot 9=2295$; $16\cdot 16 \ldots 1240$, 2160

~~(1;1;2) и (1;2;1) - различные~~

1..15 => 15
1..16 => 16 $3\cdot 3\cdot 15\cdot 16$? Ответ: 2160 ?

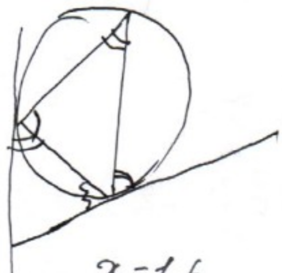


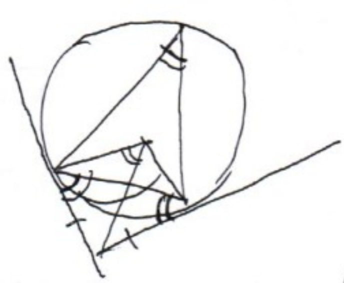




$21-12=9$

$21 \,|\, 12$, 1





$x=1,6$

$9 \,|\, 12$

$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

0,75

$\log_{\frac{x}{2}+1} \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$

$x=\frac{77}{12}+\frac{1}{3}$

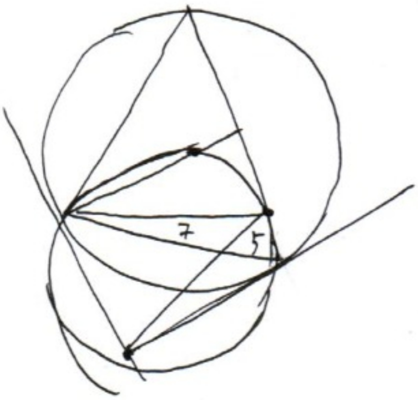
$\frac{x}{2}+1=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$ $x+2=7x-\frac{17}{2}$

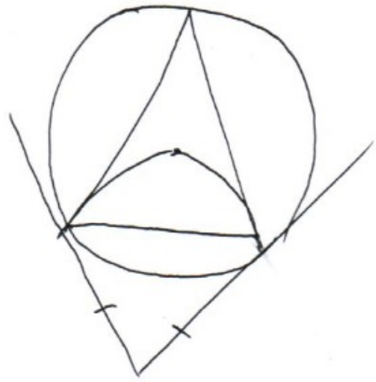
$\frac{21}{12}$

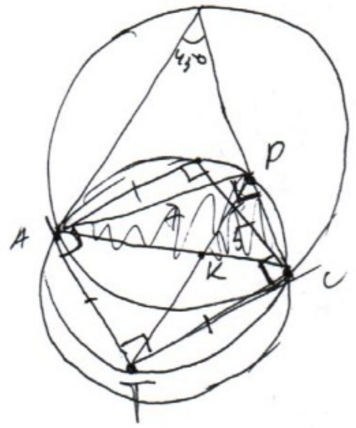
$6x=\frac{17}{2}+2$

1,75

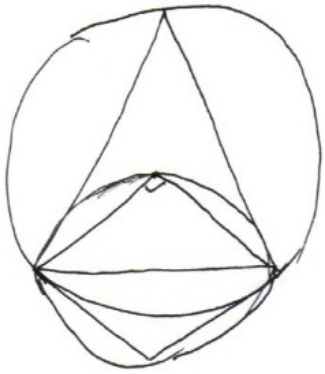
Черновик – 3 Математика, 11

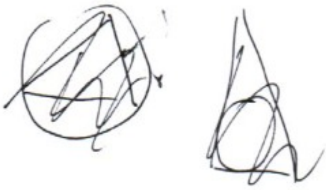


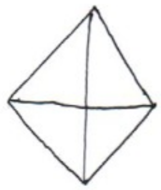


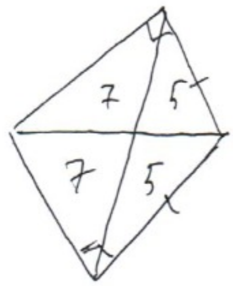


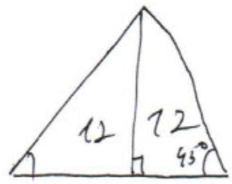
$180° - 45° = 135°$

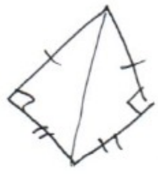


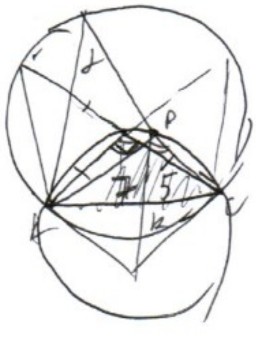




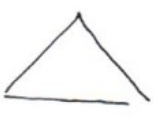


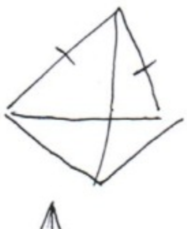


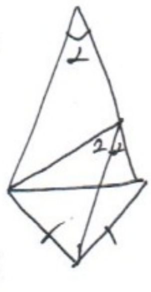


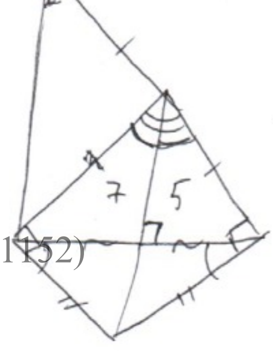


$\frac{180 - 2\alpha}{2}$ $90 - \alpha$









21101636 (U363714 M1301152)

Черновик № 4

НОД(abc) = 14

НОК(abc) = $2^{17} 7^{18}$

$\log_{\frac{x}{2}+1} \frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = \cancel{\log} = \cancel{\frac{1}{2}}\ 1$

$\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}} \frac{3x}{2} - 6 = 1$

$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = \frac{3x}{2} - 6$

$7x - \frac{17}{2} = 3x - 12$

$4x = -12 - \frac{17}{4}$

$x =$

21101636 (U363714 M1301152)