Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101528**

ID профиля: **860114**

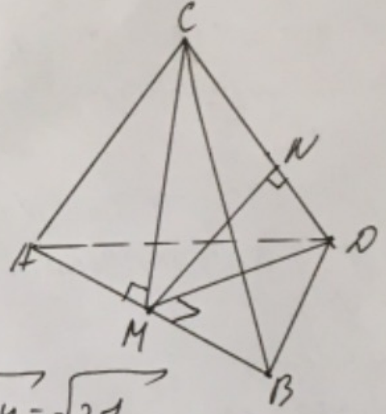
Вариант 22

Чистовик №1

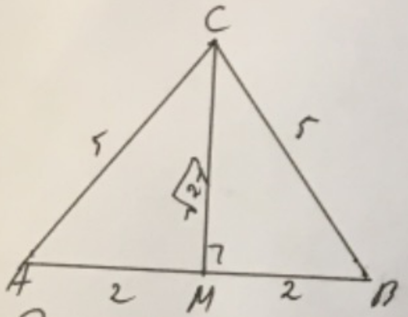
2. Пусть M - середина AB. Из условия задачи следует, что DM и CM перпендикулярны ребру AB. Тогда CMD - плоскость симметрии тетраэдра, т.к. ребро CD обязано принадлежать боковой поверхности и быть параллельной оси цилиндра, то $CMD \perp$ основаниям цилиндра, ребро $AB \parallel$ основаниям цилиндра. Тогда, чтобы добиться минимального значения радиуса цилиндра, необходимо, чтобы ребро AB и было его диаметром. Итак, AB - диаметр цилиндра (но не в основаниях, а где-то внутри цилиндра), ребро CD вертикально и принадлежит боковой поверхности, точки A и B тоже принадлежат боковой поверхности. Получается, что расстояние от M до прямой CD тоже равно радиусу цилиндра. Остаётся при этих условиях найти CD.

1) Итак, $AM = BM = MN = R$, где $MN \perp CD$

Тогда CD найдется из $\triangle CMD$:

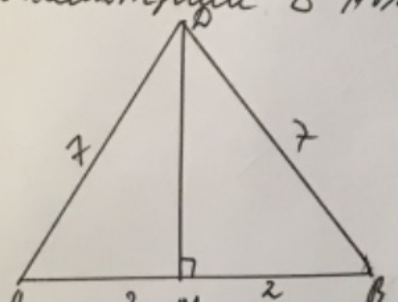


2) Рассмотрим $\triangle ABC$



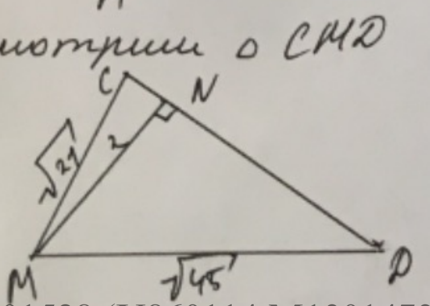
$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

3) Рассмотрим $\triangle ABD$



$DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{49-4} = \sqrt{45}$

4) Рассмотрим $\triangle CMD$



$CN = \sqrt{CM^2 - MN^2} = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

$ND = \sqrt{MD^2 - MN^2} = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

$CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

Ответ: $\sqrt{17} + \sqrt{41}$.

Чистовик №2

1. Решение.

$a_n \in Z$, значит $a_1, d \in Z$.

$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = 15 \cdot (a_1 + 7d)$

$a_7 \cdot a_{16} = (a_1 + 6d) \cdot (a_1 + 15d) > 15 \cdot (a_1 + 7d) - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} = (a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 11d) < 15 \cdot (a_1 + 7d) + 4$

Получим уравнения в целых числах

$\begin{cases} (a_1 + 6d) \cdot (a_1 + 15d) > 15 \cdot (a_1 + 7d) - 24 \\ (a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 11d) < 15 \cdot (a_1 + 7d) + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 6a_1 d + 6 \cdot 15d^2 > 15a_1 + 15 \cdot 7d - 24 \\ a_1^2 + 11a_1 d + 10a_1 d + 110d^2 < 15a_1 + 15 \cdot 7d + 4 \quad |(\cdot -1) \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ -a_1^2 - 21a_1 d - 110d^2 > -15a_1 - 105d - 4 \end{cases}$

Сложим неравенства системы:

$-20d^2 > -28$

$d^2 < \frac{7}{5}$, значит $-\sqrt{\frac{7}{5}} < d < \sqrt{\frac{7}{5}}$

Поскольку арф. прогрессия возрастает, то из вариантов $-1; 0; 1$ подходит $d = 1$

Тогда имеем:

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \neq 3;\ -3 - 2\sqrt{2} < a_1 < -3 + 2\sqrt{2}$

Сравним:

1) $-3 - 2\sqrt{2} \vee -6$

$3 \vee 2\sqrt{2};\ 9 > 8$

2) $-3 - 2\sqrt{2} \vee -5$

$-2\sqrt{2} \vee -2$

$2\sqrt{2} \vee 2$

$8 > 4$

3) $-3 + 2\sqrt{2} \vee 0$

$2\sqrt{2} \vee 3$

$8 < 9$

4) $-3 + 2\sqrt{2} \vee -1$

$2\sqrt{2} \vee 2$

$8 > 4$

Значит, $a_1 = -5; -4; -2; -1$

Ответ: $a_1 = -5; -4; -2; -1$ (при $d = 1$)

21101528 (U860114 M1301473)

Чистовик №3

3. $a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 14a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases}$

Второе неравенство исходной системы задаёт пересечение кругов с центрами $(0;0)$ и $(7;1)$ и радиусом $R=5\sqrt{2}$ в плоскости aOb. Первое неравенство исходной системы задаёт расстояние от точек второго неравенства до точек x, y, равное $\sqrt{50}$. В координатной плоскости искомая фигура есть объединение двух симметричных сегментов окружности радиусов $2\sqrt{50}$.

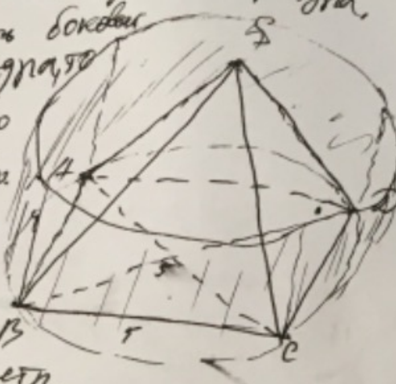
~~Центры окружностей второго неравенства исходной системы~~

Центры окружностей второго неравенства исходной системы также на расстоянии $\sqrt{50}$.

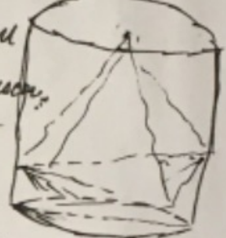
21101528 (U860114 M1301473)

№2 Черновик 1

Пусть M – середина AB. Из условия задачи следует, что DM и CM перпендикулярны ребру AB. Тогда CMD – плоскость симметрии тетраэдра. Т.к. ребро CD обязано принадлежать боковой поверхности и быть $\parallel$ оси цилиндра, то $CMD \perp$ основаниям цилиндра, ~~а ребро~~ $AB \parallel$ основаниям цилиндра, ~~а ребро~~. Тогда, чтобы добиться минимального значения радиуса цилиндра, необходимо, чтобы ребро AB было его диаметром. Итак, AB – диаметр цилиндра (но не в основании, а где-то внутри цилиндра), ребро CD вертикально и принадлежит боковой поверхности, точки A и B тоже принадлежат боковой поверхности. Получается, что расстояние от M до прямой CD тоже равно радиусу цилиндра. Остается при этих условиях найти CD.

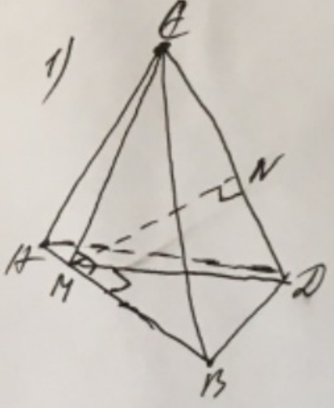


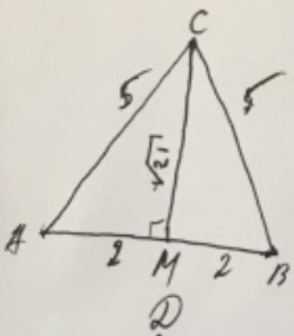
Дано:
$AB = 4$
$AC = CB = 5$
$AD = DB = 7$



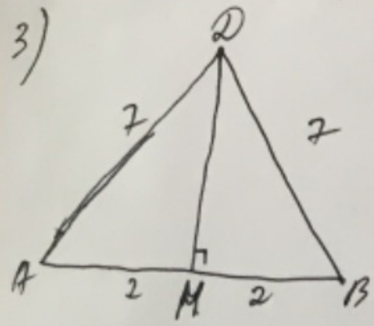
№3
$\min(x, y)$

1) Итак, $AM = BM = MN = R$, где $MN \perp CD$.
Тогда CD найдётся из $\triangle CMD$:

1)


2)


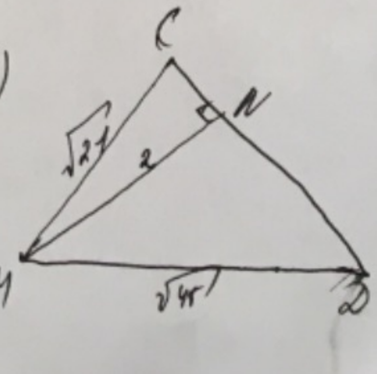
$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

3)


$DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{49 - 4} = \sqrt{45}$

$CN = \sqrt{21 - 4} = \sqrt{17}$

$DN = \sqrt{45 - 4} = \sqrt{41}$

4)


Ответ: $CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

21101528 (U860114 M1301473)

черновик 2

11. $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots a_{15}$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$a_7 a_{16} > S - 24$ $a_{11} a_{12} < S + 4$ a_1 - все возможные?

$\begin{cases} a_7 a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_7 a_{16} + 24 > S \\ a_{11} a_{12} - 4 < S \end{cases}$

$a_{11} a_{12} - 4 < S < a_7 a_{16} + 24$

S_{a_1} $\quad a_{11} a_{12} - 4 < \frac{a_1 + a_n}{2} n < a_7 a_{16} + 24$

$\cancel{S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11}$ $\quad 2(a_{11} a_{12} - 4) < (a_1 + a_n) n < 2(a_7 a_{16} + 24)$

S_{11} $\quad 2a_{11} a_{12} - 8 < a_1 n + a_n n < 2a_7 a_{16} + 48$

$2a_{11} a_{12} - 8 < 15a_1 + 15a_{15} < 2a_7 a_{16} + 48$

$2a_{11} a_{12} - 8 - 15a_{15} < 15a_1 < 2a_7 a_{16} + 48 - 15a_{15} \mid :15$

1) $a_n \in \mathbb{Z}$, значит $a_1, d \in \mathbb{Z}$.

$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = 15 \cdot (a_1 + 7d)$

$a_7 \cdot a_{16} = (a_1 + 6d) \cdot (a_1 + 15d) > 15 \cdot (a_1 + 7d) - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} = (a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 11d) < 15 \cdot (a_1 + 7d) + 4$

Получим систему уравнений в целых числах

$\begin{cases} (a_1 + 6d) \cdot (a_1 + 15d) > 15 \cdot (a_1 + 7d) - 24 \\ (a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 11d) < 15 \cdot (a_1 + 7d) + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 6a_1 d + 6 \cdot 15d^2 > 15a_1 + 15 \cdot 7d - 24 \\ a_1^2 + 11a_1 d + 10a_1 d + 110d^2 < 15a_1 + 15 \cdot 7d + 4 \quad \mid \cdot(-1) \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{a_1^2 + 15a_1 d + 6a_1 d} \; a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ -a_1^2 - 21a_1 d - 110d^2 > -15a_1 - 105d - 4 \end{cases}$

Сложим неравенства системы:

$-20d^2 > -28$

$d^2 < \frac{28}{20}$

$d^2 < \frac{7}{5}$, значит $-\sqrt{\frac{7}{5}} < d < \sqrt{\frac{7}{5}}$

Поскольку арф. прогрессия возрастает, то из вариантов $-1; 0; 1$ подходит $d = 1$.

Тогда: $\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109 \end{cases}$ черновик 3

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $a_1 \neq -3$

$-3-2\sqrt{2} < a_1 < -3+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow a_1 \neq 3$; $-3-2\sqrt{2} < a_1 < -3+2\sqrt{2}$

Сравним: $-3-2\sqrt{2} \vee -6$

$3 \vee 2\sqrt{2}$; $9 > 8$

$-3-2\sqrt{2} \vee -5$

$-2\sqrt{2} \vee -2$

$2\sqrt{2} \vee 2$

$8 \vee 4$

$4 < 8$

$-3+2\sqrt{2} \vee 0$

$2\sqrt{2} \vee 3$

$8 \vee 9$

$8 < 9$

$-3+2\sqrt{2} \vee -1$

$2\sqrt{2} \vee 2$

$8 \vee 4$

$8 > 4$

Значит, $a_1 = -5, -4, -2, -1$

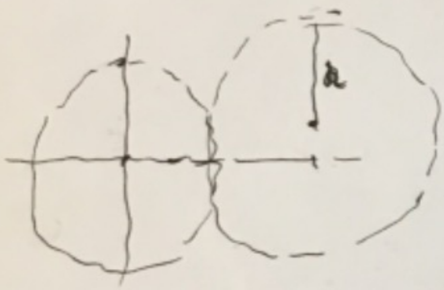
Ответ: $a_1 = -5, -4, -2, -1$ (при $d=1$)

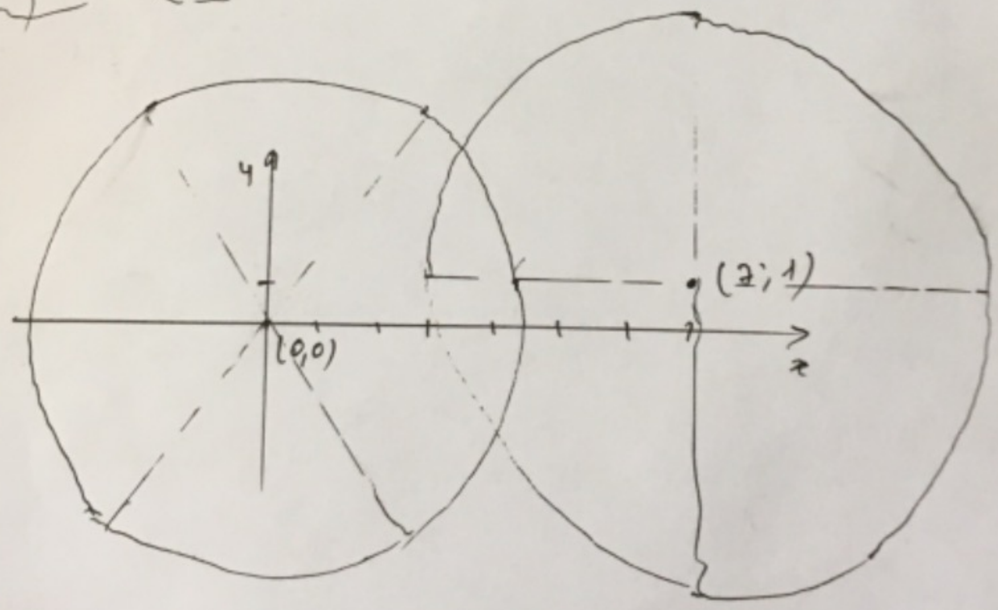
18 черновик 4

$$a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 14a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases}$$

Второе неравенство исходной системы задаёт пересечение кругов с центрами $(0;0)$ и $(7;1)$ и радиусами $R = 5\sqrt{2}$ в плоскости ~~aOb~~ aOb.





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101528**

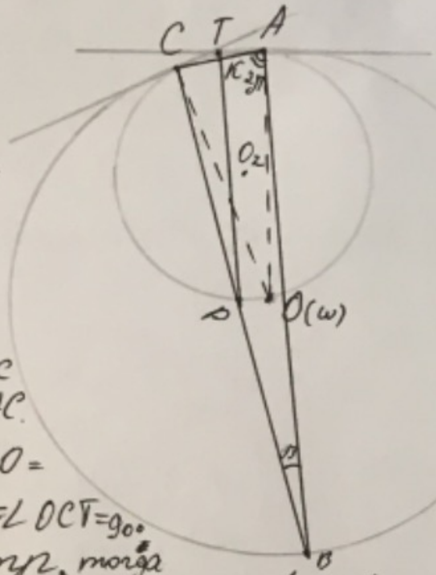
ID профиля: **860114**

Вариант 22

Чистовик №1

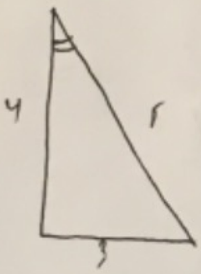
6. $AO = OC = R$.

а) Докажем, что $T \in O_2$. $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle AOC = 2\beta$, как центральный. $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ по свойству касательных. Тогда из четырехугольника $AOCT$: $\angle ATC = 180° - 2\beta$, что подтверждает свойство вписанных углов, лежащих по разные стороны от хорды AC.



По свойству касательных $AT = CT$, $AO = OC$ – как радиусы. Поскольку $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ и в силу симметрии OT – диаметр, тогда $\cup CT = \frac{1}{2} \cup CTA$, значит вписанный угол CPT равен $\frac{1}{2} \angle AOC = \beta$, откуда $AB \parallel PT$. Значит, $\triangle CPK \sim \triangle CBA$ с $k = \frac{12}{5}$, $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{CPK} = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 5 = \frac{144}{5} = 28,8$

б)



Заметим, что $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \arcsin \frac{3}{5}$, тогда по теореме синусов $AC = 2R \sin B = \frac{6}{5} R$.

Ответ: а) 28,8

Чистовик ~~Черновик~~ №2

5. $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

ОДЗ:

1) $\begin{cases} \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \left(\frac{x}{2}+1\right)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7x}{2}>\frac{17}{4} \;|\cdot 4 \\ \frac{x^2}{4}+x+1>0 \;|\cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x>17 \\ x^2+4x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1\frac{3}{14} \\ x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$x^2+4x+4>0$

$D=16-4\cdot 4=0$

$x_1=-\frac{4}{2}=-2$

$\Leftrightarrow x\in\left(1\frac{3}{14};+\infty\right)$

2) $\begin{cases} \left(\frac{3x}{2}-6\right)^2>0 \\ \sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty) \\ \frac{7x}{2}>\frac{17}{4} \;|\cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty) \\ 14x>17 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(1\frac{3}{14};+\infty\right)$

3) $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{2}-6}>0 \\ \frac{x}{2}+1>0 \;|\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2}>6 \;|\cdot 2 \\ \cancel{2x}\; x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>12 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow x>4$

Черновик 1

a, b, c

1) $\begin{cases} НОД(a,b,c)=14 \\ НОК(a,b,c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$

$a, b, c \vdots 14$

1) $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$ $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$ $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

При каких x оба равны, а одно ~~из~~ меньше на 1

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$ $\frac{1}{2}\cdot 2\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$ $\frac{1}{2}\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

Пусть $\frac{x}{2}+1=a$ $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$ $\frac{3x}{2}-6=c$, тогда

$\frac{1}{2}\log_a b$, $\log_b c$, $\frac{1}{2}\log_c a$.

1) $\frac{1}{2}\log_a b=\log_b c$

2) $\log_b c=\frac{1}{2}\log_c a$

3) $\log_b c=\log_a b$!

При $x=7$

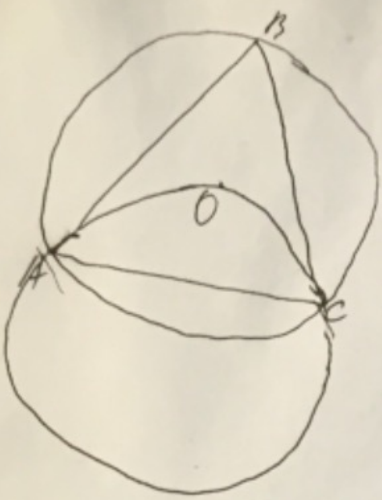
$\frac{7}{2}+1=a$ $\frac{7\cdot 7}{2}-\frac{17}{4}=b$ $\frac{3\cdot 7}{2}-6=6$

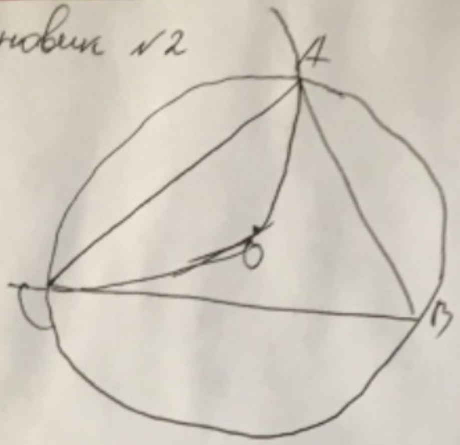
$3,5+1=a$ $\frac{49}{2}-\frac{17}{4}=b$ $\frac{21}{2}-6=6$

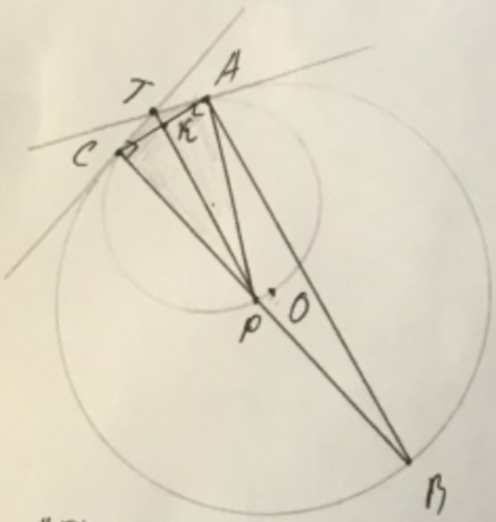
21101528 (U860114 M1301474)

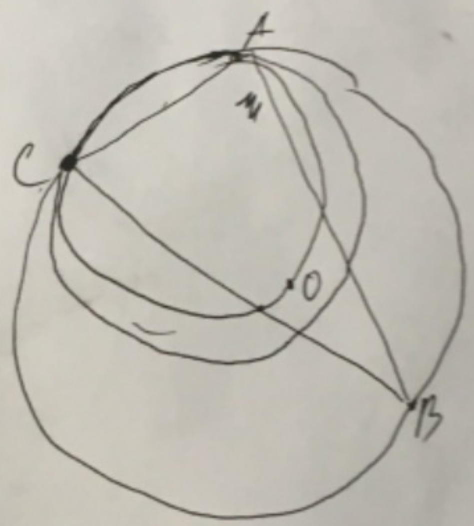
Черновик №2

3.









$S_{\triangle APK} = 7$

$S_{\triangle CPK} = 5$

Найти $S_{\triangle ABC}$?

~~Чистовик №1~~

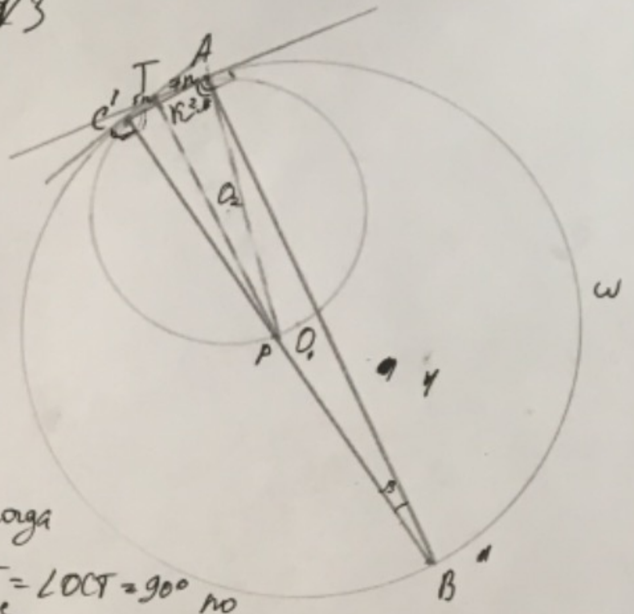
Черновик №3

№6 Дано: ~~AT=7n~~, ~~KB=5n~~.

$S_\Delta APK = 7$. $S_\Delta CPK = 5$.

а) Найти $S_\Delta ABC$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, AC-?



Решение:

а) $AO = OC = R$. Обозначим $\angle AOC = 2\beta$

$\angle ABC = \beta$. ~~тогда~~ $\angle ATC = 180^\circ - 2\beta$.

Докажем, что $T \in O_2$. $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle AOC = 2\beta$, как центральный. $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ по свойству касательных. Тогда из четырехугольника $AOCT$: $\angle ATC = 180^\circ - 2\beta$, что подтверждает свойство вписанных углов, лежащих по разные стороны от хорды AC. $\cup AC = \cup CT + \cup TA = \cup CT + \cup CT$.

$\cup BC = 2\cup CT$

144 | 5, 28, $\frac{4}{8}$, 28,8

б) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \angle ADC$ ~~$\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$=~~

$S_\Delta ABC = 28{,}8$