Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

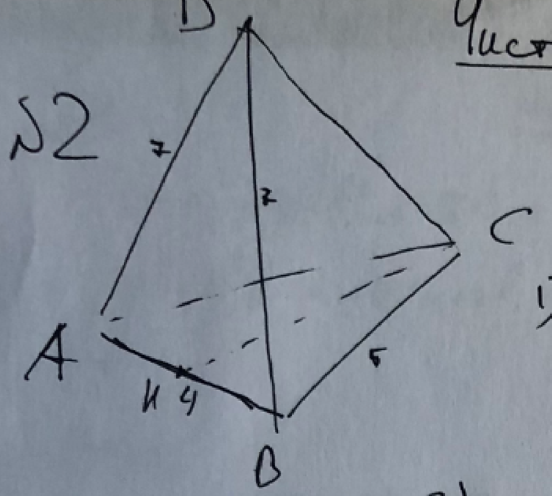
Шифр: **21101457**

ID профиля: **819087**

Вариант 22

Чистовик

№2



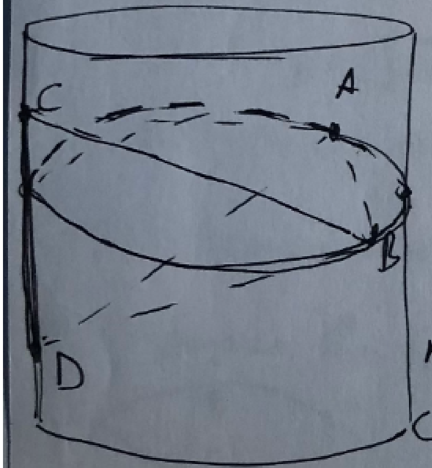
Решение:

1) H – сер. AB $DH \perp AB$ и $CH \perp AB$

$CH = \sqrt{21}$ $DH = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ по т. Пифагора

2) т.к. $CD \parallel$ оси и $CD \in$ бок. пов $\Rightarrow$ $CD \subset$ образ

3) т.к. тетр. симм. отн. (CHD) $\triangle ADC = \triangle BDC$



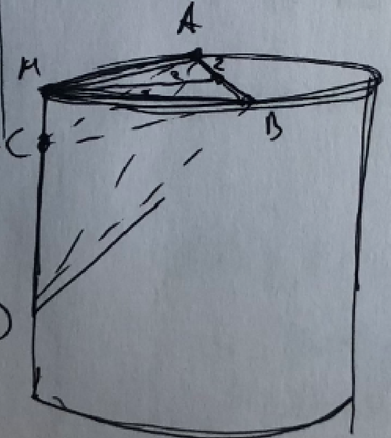
Заметим, что AB всегда является хордой

$\Rightarrow$ минимальный R будет при AB – диаметре

$R = 2$

Для удобства поместим AB на верх. осн.

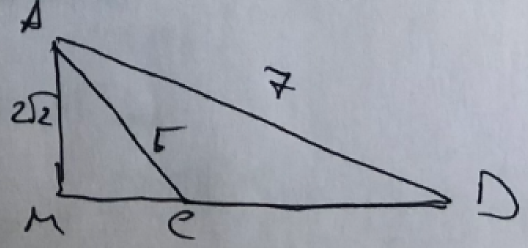
(но вообще AB может лежать не только там



4) $M = CD \cap$ верхн. осн.

$MA = MB = 2\sqrt{2}$ по т. Пиф.

Расс. $\triangle ACD$



5) по т. Пиф. в $\triangle AMD$:

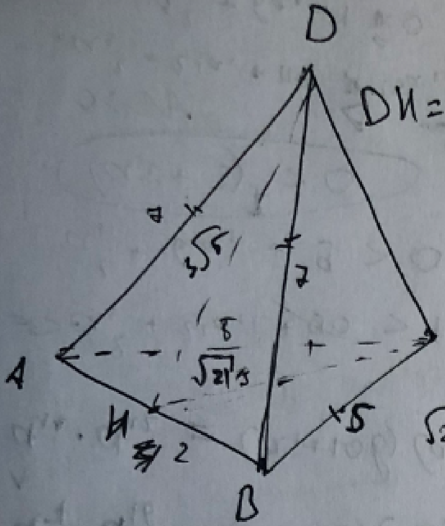
$MD = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

по т. Пиф в $\triangle AMC$:

$MC = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

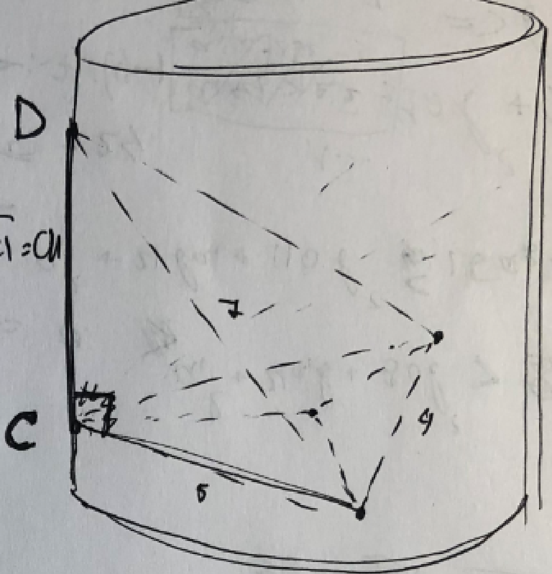
$\Rightarrow DC = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{41} - \sqrt{17}$



$DH = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$

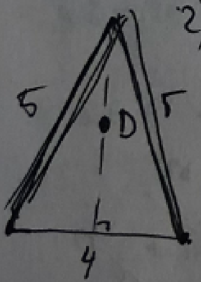
$\sqrt{25-4} = \sqrt{21} = CH$



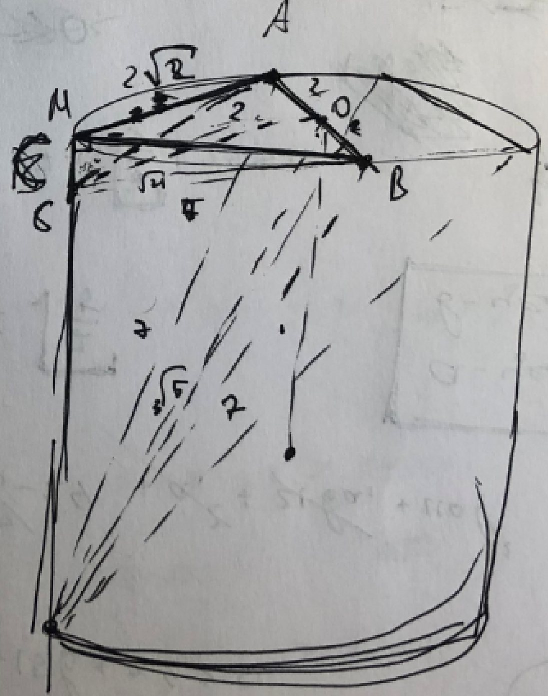
$\cancel{\quad} = \cancel{\frac{25}{6}} = R$

0) $CD \in$ образующей.

1) тетр. симметр. отн. CH
$\Rightarrow$ D проект. на CH
$\Rightarrow \triangle CDA = \triangle CDB$



2) AB - всегда будет хордой окр
$\Rightarrow \min R$ при $AB =$ диам.
$R = 2$
$AM = 2\sqrt{2}$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

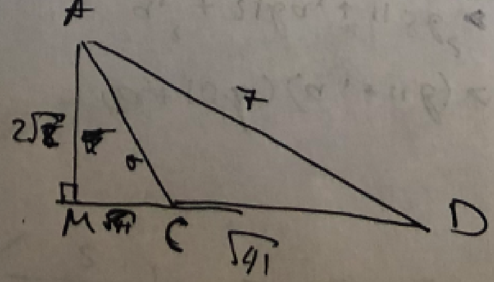
$\cancel{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$

$\cancel{180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha}$

3) $MD = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

$MC = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

$\Rightarrow CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$



53

$a = -7$
$b = 1$

$a_7 = -1$

$a_{16} = 8$

$3 \cdot 4 < \cancel{\ } + 4$

$7 \cdot 16 > 15 \cdot 8 - 24$

$12 \cdot 8$

$11 \cdot 12 < 15 \cdot 8 + 4$

$120 + 4$

$121 + 11 < 15 \cdot 8 + 4$

Ответ: $a_1 = -5; -4; -2; -1$

$+2\sqrt{2} \wedge 4$

$8 < 16$

$>$

$<$

$2\sqrt{2} \vee 3$

$8 \vee 9$

$112 > 96$

$-2\sqrt{2} - 3 < a_1 < 2\sqrt{2} - 3$

$-7 < a_1 < 1$

$a_1 = ; -5; -4; -3; -2; 1;$

15

$a_1 = -5$ $10 > 30 - 24$ ✓

$5 \cdot 6 < 30 + 4$

$a_1 = -4$ $> 45 - 24 = 21$ ✓

22

$42 < 4$

$a_1 = -3$ $36 > 60 - 24$ ✗

$56 < 60 + 4$

$a_1 = -2$ $52 > 75 - 24$ ✓

$72 < 75 + 4$

$a_1 = -1$ $5 \cdot 14 > 90 - 24$

$90 < 90 + 4$

Чистовик

$a, b \in \mathbb{Z}$ ~~целое~~

и $b > 0$ т.к. b з.р.

№1

$$S = \left(\frac{2a_1+14b}{2}\right)\cdot 15 = (a_1+7b)\cdot 15 = 15a_8$$

$$\begin{cases} a_7\cdot a_{16} > S-24 \Rightarrow (a_1+6b)(a_1+15b) = a_1^2+21a_1b+90b^2 > 15a_8-24 \\ a_{11}\cdot a_{12} < S+4 \Rightarrow (a_1+10b)(a_1+11b) = a_1^2+21a_1b+110b^2 < 15a_8+4 \end{cases}$$

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1b}+90b^2+\cancel{15a_8}+4 > \cancel{a_1^2}+\cancel{21a_1b}+110b^2+\cancel{15a_8}-24$$

$\Rightarrow 20b_1^2 < 28 \quad \Rightarrow -\sqrt{\frac{7}{5}} < b < \sqrt{\frac{7}{5}}$ с учет. огр. $0 < b < \sqrt{\frac{7}{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 1$

т.к. $2 > \sqrt{\frac{7}{5}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+21a_1+90 > 15a_1+7\cdot 15-24 \\ a_1^2+21a_1+110 < 15a_1+7\cdot 15+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ (a_1+3)^2<8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-2\sqrt{2}-3;\ 2\sqrt{2}-3) \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1 \in \{-5; -4; \cancel{-3}; -2; -1\}$

№1

S $a_7 \cdot a_{16} > S-24$

$a_{11} a_{12} < S+4$

$S+4 > a_{11} a_{12}$

$S = \left(\frac{2a_1 + 14b}{2}\right) \cdot 15 = (a_1 + 7b)15$

$(a_1+6b)(a_1+15b) > 15a_1 + 7 \cdot 15 b - 24$

$(a_1+10b)(a_1+11b) < 15a_1 + 7 \cdot 15b + 4$

$a_1^2 + 21a_1 b + \cancel{6 \cdot 15} b^2 > 15a_1 + 7 \cdot 15 b - 24$

$a_1^2 + 21ba_1 + 110b^2 - 15a_1 - 7 \ldots$

$\cancel{a_1^2 + 21a_1 b - 15a_1 + \ldots b}$

$a_1^2 + 21a_1 b + 90 b_1^2 - 15a_1 - 7 \cdot 15 b + 24 > 0$

$b > 0$

$\cancel{a_1^2 + 21a_1 b} + 90 b_1^2 + \cancel{S} + 4 > \cancel{S} - 24 \cancel{+ a_1^2 + 21ba_1} + 110b^2$

$20 b_1^2 < \frac{28}{20} \; \frac{7}{5}$

$-\sqrt{\frac{7}{5}} < b < \sqrt{\frac{7}{5}}$

a - целое

b - целое

$a_1^2 + 21a_1\sqrt{\frac{7}{5}} + \frac{18 \cdot 7}{\ldots} - 15a_1 - 7 \cdot 15\sqrt{\frac{7}{5}} + 24 > 0$

$S = 15(a_1 + 7b) = 15a_8$

$a_7 \cdot a_{16} = (a_1 + 6b)(a_1 + 15b) = a_1^2 + 21a_1 b + 90b^2 > 15a_8 - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} = (a_1 + 10b)(a_1 + 11b) = a_1^2 + 21ba_1 + 110b^2 \leq 15a_8 + 4$

$\Rightarrow a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 7 \cdot 15 - 24$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$ $\quad a \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$

$90b^2 + 4 > 110b^2 - 24$

$(a_1 + 3)^2 > 0$

$a_1 \neq -3$

$\Rightarrow b < \sqrt{\frac{7}{5}}$

$\Rightarrow b = 1$

$a_1^2 + 21a_1 + 110 \leq 15a_1 + 7 \cdot 15 + 4$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 \leq 0$ $\quad (a_1+3)^2 \leq 8$

№3

Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b;\,50)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 50\\ a^2+b^2\le 14a+2b\end{cases}$$

← окр$(O(a;b);\sqrt{50})$

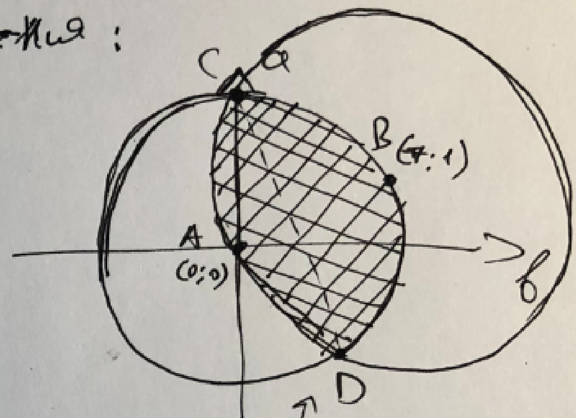
$\Rightarrow \Bigl\{\cancel{(x-a)^2}$

Рассмотрим 2 последн. ур-ния:

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 50\\ (a-7)^2+(b-1)^2\le 50\end{cases}$$

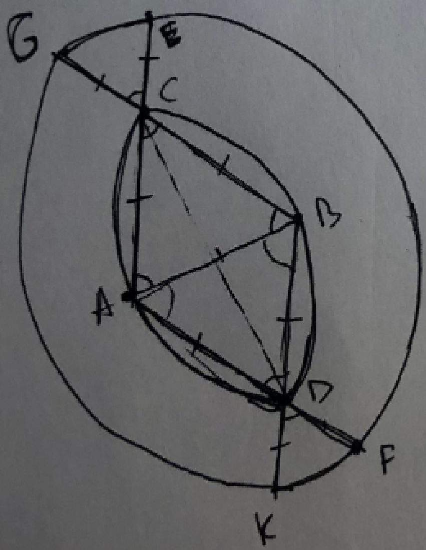
$AB=\sqrt{50}$

Нам подходит пересечение



Теперь вернемся к первому ур-нию:

это задает ~~все~~ точки, удаленные от вот этой штуки на $\sqrt{50}$ (ну и более близкие)



$AD=AC=CB=BD=DF=BC=AD=\sqrt{50}$

$\Rightarrow$ ~~угл~~ углы по $60°$

$\angle ECB$ - внешний к $\triangle ACB$ $\Rightarrow \angle ECB=60°$

$\angle CAD=120°$

$$S_{\text{сектора } AEF}=(2\cdot\sqrt{50})^2\cdot\pi\cdot\frac{120°}{360°}=\frac{200\pi}{3}$$

$$S_{\text{сектора } CGE}=(\sqrt{50})^2\cdot\pi\cdot\frac{60}{360}=\frac{50\pi}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\text{всей фигуры}}=2\left(\frac{200\pi\cdot 2+50\pi}{6}\right)=\frac{450\pi}{3}$$

НО! мы 2 раза посчитали S_{ACBD} (в секторе AEF и секторе BKG)

$$\Rightarrow S_{\text{всей фигуры}}=\frac{450\pi}{3}-2\cdot\frac{50\sqrt{3}}{4}=\frac{450\pi}{3}-\frac{50\sqrt{3}}{2}$$

 Ответ: $S=\frac{450\pi}{3}-\frac{50\sqrt{3}}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101457**

ID профиля: **819087**

Вариант 22

Чистовик

№1

Пусть ~~$a = 2^{a_1} \cdot 17^{b_1}$~~ Заметим, что a, b, c состоят только из 2 и 7 (множителей).

Пусть $a = 2^{a_1} \cdot 7^{b_1}$ $\quad b = 2^{a_2} \cdot 7^{b_2}$ $\quad c = 2^{a_3} \cdot 7^{b_3}$

НОД $(a; b; c) = 2 \cdot 7$ $\Rightarrow$ a_1 или a_2, или $a_3 = 1$

b_1, или b_2, или $b_3 = 1$

НОК $(a; b; c) = 2^{17}; 7^{18}$ $\Rightarrow$ a_1 или a_2, или $a_3 = 17$

b_1 или b_2, или $b_3 = 18$

Есть 3 варианта ~~разных~~ выбрать a_i на 1 степень, 3 ~~случая~~ варианта b_j на 1
2 ~~ва~~ варианта a_i на 17 степень (одна a_i занята 1ой степенью) и 2 вар. для b_j
то есть это 36 вариантов

Осталось одна a_k, которая может быть $1 \leq a_k \leq 17$, и одна b $\quad 1 \leq b_k \leq 18$
$\Rightarrow$ у нас 17 ~~ка~~ способов выбрать a_k и 18 – b_k

$\Rightarrow$ Ответ: $36 \cdot 17 \cdot 18$

№4 $\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$ $a\vdots 14;\ b\vdots 14;\ c\vdots 14$

$2^{17}\cdot 7^{18}\vdots a$
$\vdots c \quad \vdots b$

$\underbrace{2\cdot 7}$ $\underbrace{2\cdot 7}$ $\underbrace{2\cdot 7}$ $2^{14}\ 7^{15}$

$3^{14}\cdot 3^{15}=3^{29}$

№5

$\frac{3x}{2}-6>\frac{x}{2}+1$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=$ $a=\frac{x}{2}+1$ $2x>14$

$4\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$ $b=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$ $x>7$

$c=\frac{3x}{2}-6$

$2\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

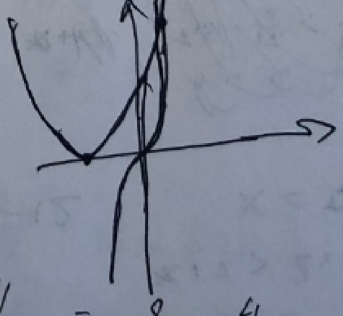
1) $\underbrace{\frac{1}{2}\log_a b=4\log_b c}=\underbrace{2\log_c a}+1$ 2

$2x^3-x^2-4x-4 \mid x-2$
$-2x^3-4x^2 \quad 2x^2+3x+2$
$3x^2-4x$
$-3x^2-6x$
$2x-4$

1) $\frac{1}{4}\log_a b=8\frac{\log_a c}{\log_a b}$ $\log_a b\neq 0$

$\log_a^2 b=8\log_a c$

$\log_a b=2\sqrt{2}\sqrt{\log_a c}$



2) $\frac{1}{4}\sqrt{2\log_a c}=\frac{2+\log_a c}{\log_a c}$

$16-4 \quad -8-4$

$2\log_a c=\frac{4+4\log_a c+\log_a^2 c}{\log_a^2 c}$ $2\log_a^3 c-\log_a^2 c-4\log_a c-4=0$

$\neq 0$ $\log_a c=2$

$2x^2(x-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \log_c a=\frac{1}{2}$

Чистовик

№2 $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$; $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

Пусть $a = \frac{x}{2}+1$

$b = \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$ $\qquad a, b, c > 0$. $\qquad \begin{cases} x > 4 \\ x \neq 0 \\ x \neq \frac{17}{14} \\ x \neq \frac{14}{3} \end{cases}$

$c = \frac{3x}{2}-6$ $\qquad a, b, c \neq 1$

Если $a \geq b$, то $7x - \frac{17}{2} \leq x+2$

$\Rightarrow x \leq \frac{21}{24}$ но $x > 4$ не подх.

Если $c \geq b$, то $7x - \frac{17}{2} \leq 3x - 12 \Rightarrow x \leq \frac{17-24}{4}$ не подх.

$\Rightarrow b$ - наибольшее

$\frac{1}{2}\log_a b$; $4\log_b c$; $2\log_c a$

① Если $\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c = 2\log_c a + 1$, то

$\log_a b = 8\frac{\log_a c}{\log_a b}$.

$\Rightarrow \log_a b = 2\sqrt{2}\sqrt{\log_a c}$ $\qquad \Rightarrow \sqrt{2\log_a c} = \frac{2+\log_a c}{\log_a c}$

$\Rightarrow 2\log_a^3 c - \log_a^2 c - 4\log_a c - 4 = 0$

$\Rightarrow \log_a c = 2$ единств. корень $\Rightarrow 2\log_c a = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_a b = 2 = 4\log_b c$

там доводится до конца и оставшиеся 2 случая по аналогии

Из получает, что нигде никакой X не подходит

Ответ ни при каких