Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101393**

ID профиля: **189283**

Вариант 22

№1 Чистовик

Пусть a_1 - первый член ~~последовательности~~ прогрессии, d - разность прогрессии. т.к. все члены - целые числа, то a_1 и d - целые числа, т.к. прогрессия возраст., то $\underline{d>0}$.

$S = a_1 + a_1 + d + \ldots + (a_1 + 14d) = 15(a_1 + 7d) = S$

$$\left.\begin{aligned} a_7 \cdot a_{16} &= (a_1+6d)(a_1+15d) = a_1^2+21da_1+90d^2 > S-24 \\ a_{11} a_{12} &= (a_1+10d)(a_1+11d) = a_1^2+21a_1d+110d^2 < S+4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oplus \begin{cases} -a_1^2-21a_1d-90d^2<24-S \\ a_1^2+21a_1d+110d^2<S+4 \end{cases}$$ (домножили на -1 и поменяли знак)

$$20d^2<28$$

$$d^2<\frac{7}{5}$$ т.к. d - целое, >0, то $\underline{d=1}$

подставим в неравенства:

1) $a_1^2+21a_1d+90d^2>15(a_1+7d)-24$ (т.к $d=1$)

$a_1^2+21a_1+90>15(a_1+7)-24$

$a_1^2+6a_1+9>0$

$(a_1+3)^2>0 \Rightarrow \underline{a_1 \neq -3}$

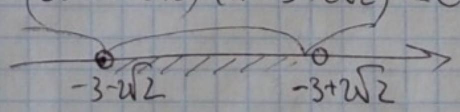
2) $a_1^2+21a_1d+110d^2<15(a_1+7d)+4$

$a_1^2+21a_1+110<15(a_1+7)+4$

$a_1^2+6a_1+1<0$

$(a+3-2\sqrt{2})(a+3+2\sqrt{2})<0$

1



$-6<-3-2\sqrt{2}<-5$; $-1<-3+2\sqrt{2}<0$

$\Rightarrow a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$ т.к. -3 не подх из 1.

Отв: -5; -4; -2; -1.

№2 прямой цилиндр чистовик

не обязательно

1) предположим, что $AB \parallel$ основаниям цилиндра.

α - плоскость основания, то

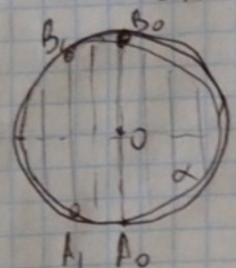
т.к $AC = CB = 5$; $AD = DB = 7$, CD - общая, то

$\triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow \angle DCA = \angle DCB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \parallel \alpha$.

рассм проекцию AB на основание

т.к. $AB \parallel \alpha$, то длина(AB) = длина(проекции AB).



заметим, что если $AB \neq A_0B_0$, то радиус основания $> \frac{AB}{2}$ т.е. не наименьший,

если $AB = A_0B_0$, то радиус основания $= \frac{AB}{2} = 2$.

Пусть т.K - середина AB, тогда $CK \perp AB$, $DK \perp AB \Rightarrow CK^2 = 5^2 - 2^2 = 21$; $DK^2 = 7^2 - 2^2 = 45$

Пусть $\angle CKD = \alpha$. Заметим, что $0 < \alpha < 180°$.

Рассм $\triangle CDK$. ~~т.к. основания цилиндра - окружности~~, то

$CD^2 = CK^2 + KD^2 - 2CK \cdot KD \cdot \cos\alpha = 21 + 45 - 2\sqrt{21} \cdot \sqrt{45} \cdot \cos\alpha =$

$= 66 - 6\sqrt{21 \cdot 5}\cos\alpha$ т.к $-1 < \cos\alpha < 1$, то

$66 - 6\sqrt{21 \cdot 5} < CD^2 < 66 + 6\sqrt{21 \cdot 5}$

$66 - 6\sqrt{105} < CD^2 < 66 + 6\sqrt{105}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\sqrt{66 - 6\sqrt{105}} < CD < \sqrt{66 + 6\sqrt{105}}}$$

2

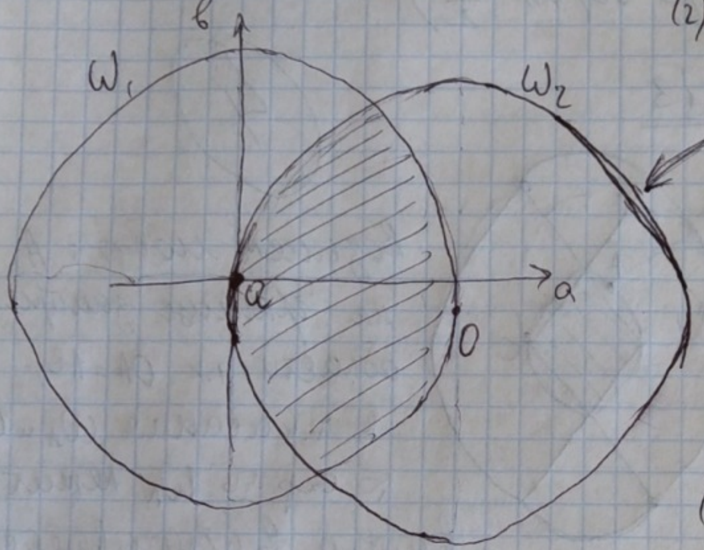
Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,50)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le 14a+2b\\ a^2+b^2\le 50\end{cases} \Rightarrow 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50 \quad (1)\\ (a-7)^2+(b-1)^2\le 50 \quad (2)\\ a^2+b^2\le 50 \quad (3)\end{cases}$$

посмотрим, какими могут быть a и b.



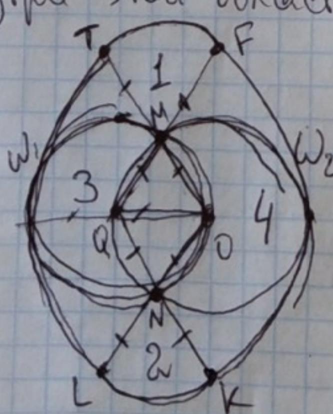
(2) - окр-ть с ц. в т. $(7;1)$ и радиусом $\sqrt{50}$.

(3) - окр с ц. в т $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{50}$

$\Rightarrow$ точки (a, b) лежат в заштрихованной части.

(1) - окружность с ц. в т. (a,b) и радиусом $\sqrt{50}$.

Чтобы построить эти окр-ти будем рассматривать только т. на границах заштрих. области т.к окружности внутри этой области включаются в те.



Заметим, что получившаяся фигура включает в себя все нужные окружности т.к. 1 и 2 часть это секторы окружностей радиуса $\sqrt{50}$ построенные вокруг т. M и т. N, ~~а~~ а секторы 3 и 4 - это части окр-тей построенных вокруг т. O и Q и радиусом $2\sqrt{50}$. Посчитаем получившуюся ~~кол~~ площадь. $\angle MON = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$

$S_3 = (2\sqrt{50})^2\cdot\frac{\pi}{3}$, $S_4 = S_3 \Rightarrow S_4 = (2\sqrt{50})^2\cdot\frac{\pi}{3}$, $\angle LNK = \angle TMF = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

8 $S_{ТВЕ}$ $S_1 = S_2 = \frac{\pi}{6}\cdot(\sqrt{50})^2$ **Чистовик**

т.к. часть QMON посчитали 2 раза, а её площадь

$= 2S_{QMO} = 2\cdot(\sqrt{50})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = (\sqrt{50})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

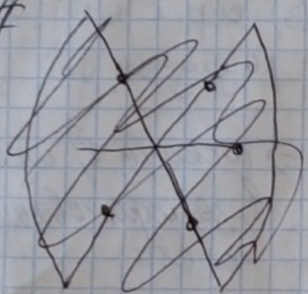
$S_{вся} = 2\cdot(2\sqrt{50})^2\cdot\frac{\pi}{3} + 2\cdot\frac{\pi}{6}(\sqrt{50})^2 - (\sqrt{50})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

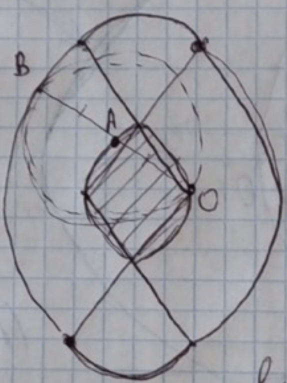
$= 50\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 50\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ответ: $150\pi - 25\sqrt{3}$

4

#





Возьмем модут т. A на границе заштрих. области т.к. OA=AB, B – т. касания ω_A и ω_O, то окр-ть ω_A лежит внутри получившейся фигуры.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101393**

ID профиля: **189283**

Вариант 22

№4 чистовик

вариант 22. $v_p(x)$ - степень вхождения p в x.

$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 14 = 2 \cdot 7 \\ НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$ $\Rightarrow$ все числа делятся на 14, никакое не делится на 2^{18} или на 7^{19}, причем какое-то делится на 2^{17} и какое-то делится на 7^{18}.

Разберем случай если $v_2(a) = 1$ $v_2(b) = x$ $v_2(c) = 17$, причем $1 < x < 17$.

$\underset{a}{1}, \underset{b}{x}, \underset{c}{17}$ | $(1, y, 18)$ степени 7

Тогда вариантов сопоставить степени 7 степеням двоек: $3 \cdot 2 \cdot 1$ (при определ. x и y), т.к.

y принимает 18 значений (от 1 до 18), а x - 16 (от 2 до 17), то всего вар-тов: ~~6·18·17~~ $6 \cdot 18 \cdot 16$

т.к. из $(1, x, 17)$ ~~могут~~ можно получить 6 перестановок, то всего вариантов 3-ек a, b, c при $x \neq 1$ и $x \neq 17$:

$\underline{6 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 6}$

при $x = 1$: перестанов со степенями семерки будет $6 \cdot 18$, однако перестановок от $(1, x, 17)$ для букв a, b, c будет уже не 6:

$(1, 1, 17); (1, 17, 1); (17, 1, 1)$ - 3 шт $\Rightarrow$ всего $6 \cdot 18 \cdot 3$.

т.к при $x = 17$ аналогичная ситуация, то ~~всего~~ при $x = 17$: $6 \cdot 18 \cdot 3$.

$\Rightarrow$ всего вариантов: $6 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 6 + 6 \cdot 18 \cdot 3 + 6 \cdot 18 \cdot 3 = 6 \cdot 18 \cdot 6 + 6 \cdot 18 \cdot 6 \cdot 16 =$

$= 6 \cdot 6 \cdot 18 \cdot 17 = \underline{11016}$

Ответ: 11016

1

№5 Чистовик

Пусть $\frac{x}{2}+1=a$ $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$; $\frac{3x}{2}-6=c$

Из усл-ия ОДЗ: $\frac{x}{2}+1>0$; $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0$, $\frac{3x}{2}-6>0$; $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1$;

$\Rightarrow x>\frac{6\cdot 2}{3}=4$; $x\neq\frac{14}{3}$. $\frac{x}{2}+1\neq 1$ $\frac{3x}{2}-6\neq 1$;

Тогда $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_a b$; $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=4\log_b c$;

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\log_c a$

$\frac{1}{2}\log_a b\cdot 4\log_b c\cdot 2\log_c a=4\cdot\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=4$

Из условия 2 числа равны, а третье $<$ на $1\Rightarrow$

$t^2(t-1)=4$

$t^3-t^2-4=0$

$(t-2)(\underbrace{t^2+t+2}_{>0})=0$

$t=2$

$t-1=0$

Разберем все случаи:

1) $\frac{1}{2}\log_a b=2$ $4\log_b c=2$ $2\log_c a=1$

$\log_a b=4$

$\underline{a^4=b}$ $\underline{b=c^2}$ $\underline{c=a^2}$

$\frac{3x}{2}-6=\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$; $\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$

$\cancel{3x}$ $\frac{3x}{2}-6=\frac{x^2}{4}+x+1$

$x^2+4x-6x+4+24=0$

$x^2-2x+28=0$

$D<0$ $\times$

2) $\frac{1}{2}\log_a b=2$ $4\log_b c=1$ $2\log_c a=2$

$a^4=b$ $b=c^4$ $\underline{a=c}$

$\frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6\Rightarrow 7=\frac{x}{2}$ ~~[illegible]~~

2

$b = c^4$

$\cancel{\frac{7x}{2}} - \frac{7\cdot 7}{2} - \frac{17}{4} = \left(\frac{3\cdot 7}{2} - 6\right)^4 = (4{,}5)^4$

но

$\frac{81}{4} \neq \left(\frac{9}{2}\right)^4$

3) $\frac{1}{2}\log_a b = 1$ $\qquad$ $\cancel{b = c^2}$ $4\log_b c = 2$ $\qquad$ $2\log_c a = 2$

$\log_a b = 2$ $\qquad$ $b = c^2$ $\qquad$ $c = a$

$b = a^2$

$\Downarrow$

$\frac{3\cdot x}{2} + 1 = \frac{3x}{2} - 6$

$\Downarrow$

$x = 7$

$\frac{7\cdot 7}{2} - \frac{17}{4} = \left(\frac{3\cdot 7}{2} - 6\right)^2$

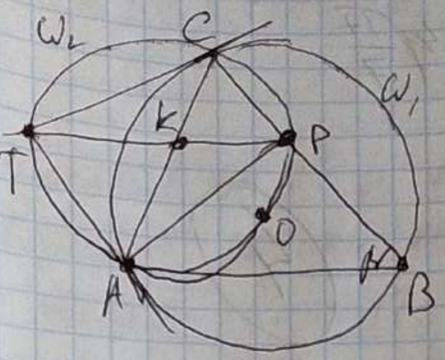
$\frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$ V

$\Rightarrow x = 7$ подходит и является единственным корнем.

Ответ: 7

3

№6. Чистовик



т.к. касательные CT и AT $\perp$ CO и AO соответственно, то $\angle TCO + \angle TAO = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ T лежит на окружности ω_2

(A, O, P, C лежат на ω_2)

Пусть $\angle CBA = \beta \Rightarrow \angle COA = 2\beta$ (как центральный) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CPA = \frac{1}{2} \cup CA = \angle COA = 2\beta$ (окр. ω_2).

Т.к. O - центр. опис. окр-ти, то $\angle OAC = \angle ACO = 90° - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAT = \angle TCA = 90° - (90° - \beta) = \beta$.

$\angle CAT = \beta = \frac{1}{2} \cup CT = \angle CPT$ (окр. ω_2) $\Rightarrow$ т.к. $\angle CPT = \beta$, $\angle CPA = 2\beta$, то PK - бисс-са $\triangle CPA$.

3

$\frac{5}{7} = \frac{S_{CPK}}{S_{KPA}} = \frac{(CP \cdot PK \cdot \sin\beta)/2}{(PK \cdot PA \cdot \sin\beta)/2} = \frac{CP}{PA} \Rightarrow PA = \frac{7}{5} CP$

т.к. $\angle CPA = 2\beta$, то $\angle APB = 180° - 2\beta$, но т.к. $\angle PBA = \beta$, то

$\triangle APB$ - р/б (т.к. $2\angle PBA + \angle APB = 180° \Rightarrow \angle PAB = \angle PBA$).

$\Rightarrow AP = PB = \frac{7}{5} CP$

$\frac{S_{ACP}}{S_{ABC}} = \frac{CP}{CB} = \frac{CP}{CP + \frac{7}{5}CP} = \frac{5}{12} \Rightarrow \underline{S_{ABC} = \frac{12 S_{ACP}}{5} = \frac{144}{5} = 28,8}$

$S_{ACP} = 12 = \frac{CP \cdot PA \cdot \sin 2\beta}{2} = \frac{\frac{5}{7} PA^2 \cdot 2\sin\beta \cdot \cos\beta}{2}$

$PA^2 = \frac{12 \cdot 7}{5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}} = 35$ / $tg\beta = 3/4 \Rightarrow \sin\beta = 3/5$; $\cos\beta = 4/5$).

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{7}{25}$

$PA = \sqrt{35} \Rightarrow PC = \frac{5}{7}\sqrt{35}$.

по т. косинусов для $\triangle APC$:

$AC^2 = CP^2 + AP^2 - 2AP \cdot CP \cdot \cos 2\beta = 35 + \frac{25}{49} \cdot 35 - 2 \cdot \frac{5}{7} \cdot 35 \cdot \cos 2\beta =$

$= 35\left(1 + \frac{25}{49} - \frac{10}{7} \cdot \frac{7}{25}\right) = 35\left(\frac{3 \cdot 49 + 25 \cdot 5}{5 \cdot 49}\right) = \frac{3 \cdot 49 + 25 \cdot 5}{7} = \frac{272}{7} \Rightarrow$

$)^4 = (4{,}5)^4$

$\Rightarrow AC = \sqrt{\frac{272}{7}} = \cancel{2\sqrt{\frac{68}{7}}}\ 4\sqrt{\frac{17}{7}}$ Чистовик

Ответ: $\cancel{AC = 2\sqrt{\frac{43}{7}}}$; $S_{ABC} = 28{,}8$; $AC = 4\sqrt{\frac{17}{7}}$

4

$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}+6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}+6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

Черновик

$\frac{x}{2}+1>0$

$\frac{3x+6}{2}>0$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0$

$\frac{1}{2}\log_a b$, $4\log_b c$, $2\log_c a$

$4\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=4$

$2t\cdot t\cdot(t-1)=4$

$t^3-t^2-4=0$

$(t-2)(t^2+t+2)=0$

$D<0$

$t=2$ $\quad t-1=\underline{1}$

2	2	1
2	1	2
1	2	2

1) $\frac{1}{2}\log_a b=2$ $\quad 4\log_b c=2$ $\quad 2\log_c a=1$

$\log_a b=4$ $\quad \log_b c=\frac{1}{2}$ $\quad \log_c a=1/2$

$\underline{a^4=b}$ $\quad \underline{b=c^2}$ $\quad \underline{c=a^2}$

2) $\underline{a^4=b}$ $\quad 4\log_b c=1$ $\quad 2\log_c a=2$

$\log_b c=1/4$ $\quad \log_c a=1$

$\underline{b=c^4}$ $\quad \underline{a=c}$

3) $\frac{1}{2}\log_a b=1$ $\quad \underline{b=c^2}$ $\quad \underline{a=c}$

$\log_a b=2$

$\underline{a^2=b}$

$\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+7=0$

$x^2-2x+28=0$

4) $b=c^2=a^4$ $\quad a=\frac{x}{2}+1$; $b=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$; $c=\frac{3x}{2}+6$

$\left(\frac{3x}{2}+6\right)^2=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$ $\quad \left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\frac{3x}{2}+6$

$\frac{9x^2}{4}+18x+36=\frac{7}{2}x-\frac{17}{4}$ $\quad \frac{x^2}{4}+x+1=\frac{3x}{2}+6 \mid \cdot 4$

$9x^2+72x+36-14x+17=0$ $\quad x^2+4x+4=6x+24$

$9x^2+58x+53$ $\quad x^2-2x-20=0$

$x=\frac{\pm\sqrt{84}+2}{2}=\pm\sqrt{21}+1$

8; 4,5

$\frac{98}{-17}$ $\overline{81}$

$-\frac{17}{4}$ $\quad \frac{81}{4}$

$\log_a b$

$\frac{7}{2}\cdot\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\frac{x}{2}-\ldots$

$(4,5)^4$

НОД $(a, b, c) = 14$

НОК $(a, b, c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

$2^{a_1} \cdot 7^{a_2};\ 2^{b_1} \cdot 7^{b_2};\ 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

$a_1 \le b_1 \le c_1$

$2 \cdot 7;\ 2 \cdot 7;\ 2 \cdot 7$

$\min(a_1, b_1, c_1) = 1$

$\max(a_1, b_1, c_1) = 17$

1	x	17
1	y	18

2-16, 2-17

1, 17 — 1, 17

1, 18 — 1, 18

$3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 13$

1	1	18
1		
x		
17		

1-1, x-y, 17-18; 1-y, 1-1, x-18, 17-y; 1-y

1	2	3
1	2	3

1-1, 2-2, 3-3; 1-1, 2-3, 3-2; 1-2, 2-3, 3-1; 1-2, 2-1, 3-3; 1-3

1	2	17	
1	2	18	6
1	2	17	
1	3	18	6
1	2	17	
1	3	18	6
1	3	17	
1	2	18	6

$6 \cdot 15 \cdot 16 + 6 + 3 \cdot 2 = 6$

$6 \cdot 16 + 6 \cdot 15$

2, 2/3

$2 \mid \frac{2}{3}$ (2)

2	1	1	17
7	1	1	18

2	2	2^{17}
7	7	7^{18}

$2 \cdot 7;\ 2 \cdot 7;\ 2^{17} \cdot 7^{18}$

$2 \cdot 7;\ 2 \cdot 7^{18};\ 2^{17} \cdot 7$ +2

$3 \cdot 2$

2	2^{17}	2^{17}
7	7^{18}	7^{18}

+2

2-17

2	2	2^{17}
7	7^{18}	7^{18}

+2

2	2	2^{17}
7	7^{2-17}	7^{18}

2	2	2^{17}
7	7^x	7^{17}
2	2	2^{17}
7	7^{18}	7^x
2	2	2^{17}
7^x	7^{18}	7

$3 \cdot 16$

$3 \cdot 16 \to 2 \cdot 2^{17} \cdot 2^{17}$

$7,\ 7^x,\ 7^{18}$

$3 \cdot 15 \cdot 2$

$6 \cdot 15 \cdot 16 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 16 + 6 \cdot 16 = 6 \cdot 16 \cdot 2 + 6 \cdot 16 \cdot 15 = 6 \cdot 16 \cdot 17$

a	b	c
1	x	17
1	y	18.

№4 ~~Чистовик~~ черновик вариант 22

$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 14 \\ НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$ ~~Пусть a, b, c~~

т.к. $НОД = 2 \cdot 7$; $НОК = 2^{17} \cdot 7^{18}$, то

какое-то из чисел $\vdots 2, \not\vdots 4$; какое-то $\vdots 7 \not\vdots 49$;

~~какое-то~~ каждое из чисел $\not\vdots 2^{18}$ и $\not\vdots 7^{18}$, какое-то

число $\vdots 2^{17}$; какое-то делится на 7^{18}

тогда ~~степени двойки~~ степени вхождения 2 в эти

числа $(1, x, 17)$, причем $1 \le x \le 17$.

степень вхождения 7 в эти числа $(1, y, 18)$,

причем $1 \le y \le 18$.

Если ~~$x \ne y$~~ $1 < x < 17$; $1 < y < 18$, то ~~вариантов~~:

$15 \cdot 16 \cdot 6$ | $1; x; 17$ / $1; y; 18$ – ~~два~~ для ~~I~~ степени 1 – 3 вар-та выбрать, для ст. x – 2 вар-та, для ст. 17 – 1 вар-т, т.к

вместо x может быть 15 чисел, вместо y – 16, то всего

вар-тов: $6 \cdot 15 \cdot 16$

Если $x = 1$, $y = 1$ или $x = 17$, $y = 18$ – 2 варианта

(1,1) (1,x) (17,18) } (1,1) (1,18) (17,1) } ~~или~~

(1,1), (17;18), (17,1)

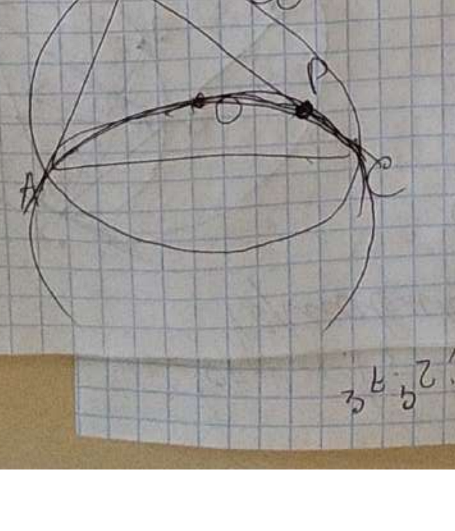
(1,18), (17,1), (17,1)

~~т.к. тройку упорядоченное, то x может принимать~~

17

1	x	17
1	17	x
x	1	17
x	17	1

18×17



$\frac{7x}{2} > \frac{17}{4}$

$x > \frac{17}{14}$

$\frac{3x}{2} - 6 > 0$

$x > \frac{6 \cdot 2}{3}$

$14 \cdot \frac{17}{14}$