Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101311**

ID профиля: **890641**

Вариант 22

ЧИСТОВИК

№1.

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} = a_1 + (a_1 + d) + \ldots + (a_1 + 14d) = 15a_1 + 105d$$

$a_7 = a_1 + 6d \qquad a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{16} = a_1 + 15d \qquad a_{12} = a_1 + 11d$

$a_7 \cdot a_{16} = a_1^2 + 21 \cdot a_1 \cdot d + 90 \cdot d^2 \qquad a_{11} \cdot a_{12} = a_1^2 + 21 \cdot a_1 \cdot d + 110 \cdot d^2$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21 \cdot a_1 \cdot d + 90 \cdot d^2 > S - 24 \\ a_1^2 + 21 \cdot a_1 \cdot d + 110 \cdot d^2 < S + 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21 \cdot a_1 \cdot d + 90 \cdot d^2 > S - 24 \\ -a_1^2 - 21 \cdot a_1 \cdot d - 110 \cdot d^2 > -S - 4 \end{cases} \Rightarrow -20 \cdot d^2 > -28 \Rightarrow d^2 < \frac{28}{20}; \ d < \sqrt{\frac{7}{5}}$$

т.к. прогрессия возрастает, то $d > 0$.

т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то $d \in \mathbb{Z}$

получим, что $d = 1$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21 \cdot a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ \cancel{a_1^2 + 21a_1 + 90 >} \ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6 \cdot a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ (a_1 + 3)^2 < 8 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 + 3 = 1 \\ a_1 + 3 = 2 \\ a_1 + 3 = -1 \\ a_1 + 3 = -2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = -2 \\ a_1 = -1 \\ a_1 = -4 \\ a_1 = -5 \end{array} \right.$$

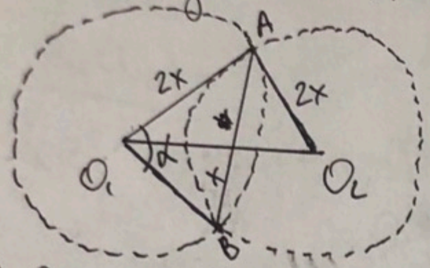
1

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a_1 = -2 \\ a_1 = -1 \\ a_1 = -4 \\ a_1 = -5 \end{array} \right.$

21101311 (U890641 M1302070)

ЧИСТОВИК

№3. Найдем её площадь



$O_1O_2 = \sqrt{50} = x$

$R_1 = R_2 = 2x$

$AB = 2\cdot\sqrt{4x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{16x^2 - x^2} = x\cdot\sqrt{15}$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{AB}{2\cdot R} = \frac{AB}{4x} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$S(O_1BO_2) = 2\cdot\frac{\alpha\cdot R^2}{2}$

$S(M) = S(O_1) + S(O_2) - S(O_1BO_2)$

$S(M) = 2\cdot\pi\cdot 4x^2 - x^2\cdot 2\cdot\arcsin\left(\sqrt{\frac{15}{16}}\right)$

$x = \sqrt{50}$

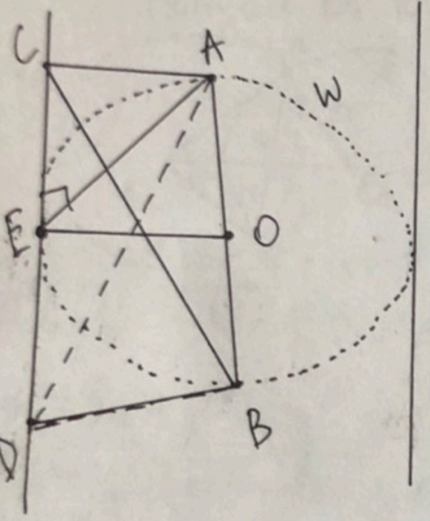
Ответ: $4\cdot 50\left(2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{15}{16}}\right)$

3

21101311 (U890641 M1302070)

ЧИСТОВИК

№2.



Для начала заметим, что AB – параллельно основанию, т.к. $\Delta CDA = \Delta CDB$ по трем сторонам. Тогда: AB лежит на окр. w, параллельной основанию. Заметим, что радиус минимален, когда AB – диаметр w.

Пусть E – пересечение CD и w.

Тогда $OE = OB = OA = 2$, где O – центр w.

Тогда по теореме Пифагора:

$$EA^2 = OA^2 + OE^2 = 8$$

$$EC = \sqrt{AC^2 - EA^2} = \sqrt{17}$$

$$ED = \sqrt{AD^2 - EA^2} = \sqrt{41}$$

Тогда имеем 2 случая:

1) C, D – по разные стороны относительно $E \Rightarrow$
$\Rightarrow CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

2) C, D – по одну сторону относительно $E \Rightarrow$
$\Rightarrow CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

Ответ: 1) $CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$
2) $CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

2

ЧЕРНОВИК

1. $S - 15$

$\underline{a_7 a_{16} > S - 24}$

$\underline{a_{11} a_{12} < S + 4}$ *

$a_1 = ?$

$a_7 = a_1 + 6d \quad a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{16} = a_1 + 15d \quad a_{12} = a_1 + 11d$

$\frac{a_1 + a_{16}}{2} \cdot 15 = S$

косп: $(a_1+3)^2 > 0$

$d = 1$

$S - 24 < a_7 a_{16}$

$S + 4 > a_{11} a_{12}$

$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases} \Rightarrow \ldots$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 \cdot d + 90 \cdot d^2 > S - 24 \\ -a_1^2 - 21a_1 \cdot d - 110 d^2 > -S - 24 \end{cases}$

$d^2 < \frac{28}{20}$ $d < \sqrt{\frac{7}{5}}$, $d > 0{,}2$

2. $AB = 4$

$AC = BC = 6$

$AD = DB = 7$

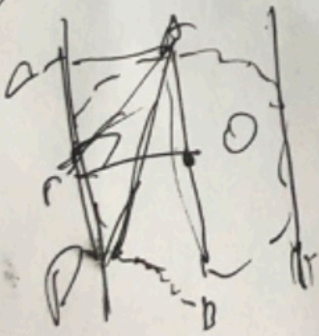
CD-?

каждый тетраэдр вписан в цилиндр

CD ∥ оси

4 прям. – касательные.

$OE = ED = 2$



$EC = \sqrt{AC^2 - EA^2} = \sqrt{17}$

$ED = \sqrt{AD^2 - EA^2} = \sqrt{41}$

1) $CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

2) $CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

ЧЕРНОВИК

М-декарт. плоскость

[illegible]

③ $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,50)\end{cases}$ (x,y)

$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2$

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 50$

$\min(14a+2b,50)$

$R_1=R_2=2R$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101311**

ID профиля: **890641**

Вариант 22

ЧИСТОВИК

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 14 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

Заметим, что в a b c не входят никакие простые множители, ~~корсм~~ кроме 2 и 7, иначе они бы входили в НОК.

Рассмотрим отдельно степень вхождения 2 в эти числа:

Т.к. НОД = 14, то 2 входит хотя бы в 1 степень в каждое число, причем в одно из них в 1 степени.

Т.к. НОК = $2^{17}\cdot 7^{18}$, то 2 входит не более, чем в 17 степени в каждой из чисел, причем в ~~одно~~ 1 из них ровно в 17 степени:

получаем набор степеней: (1, 17, x), где x, от 1 до 17.

Всего наборов вида (1, 17, x)

$17\cdot 3! - 3 - 3 = 96$, т.к. x от 1 до 17, 3! - перестановка и -3-3, поскольку мы посчитали трижды наборы (1, 1, 17) и (1, 17, 17)

Аналогично для степеней вхождения 7 будет $18\cdot 3! - 3 - 3 = 102$ набора.

Всего получаем: $96\cdot 102 = 9792$ набора.

Ответ: 9792

1

ЧИСТОВИК

№5.

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$ $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$

$\frac{x}{2}+1=a;\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b;\ \frac{3x}{2}-6=c$

$\log_{a^2} b=\frac{1}{2}\log_a b=\frac{\alpha}{2}$

$\log_{\sqrt{b}} c^2=4\log_b c=4\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}=\frac{4\cdot\beta}{\alpha}$

$\log_{\sqrt{c}} a=2\cdot\log_c a=2\cdot\frac{\log_a a}{\log_a c}=\frac{2}{\beta}$

Заметим, что их произведение равно 4

Т.к. 2 равны, а одно меньше на 1, то:

$y\cdot y\cdot(y-1)=4\Rightarrow y^3-y^2-4=0\Rightarrow(y-2)\cdot(y^2+y+2)=0\Rightarrow y=2$, тогда:

$\left[\begin{array}{l}\frac{2}{\beta}=2\\ \frac{2}{\beta}=1\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{ll}\beta=1 & (1)\\ \beta=2 & (2)\end{array}\right.$

$(1)\Rightarrow\log_a c=1\Rightarrow a=c\Rightarrow\frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6\Rightarrow x=7$

$(2)\Rightarrow\log_a c=2\Rightarrow c=a^2\Rightarrow\frac{3x}{2}-6=\left(\frac{x}{2}+1\right)^2;\ \frac{x}{2}=t$

2

$t^2+2t+1-3t+6=0$

$t^2-t+7=0$

$D<0$

проверим, что $x=7$ нам подходит и удовлетворяет ОДЗ:

$\beta=1;\ y=2\quad\log_{\sqrt{c}} a=2\Rightarrow\alpha=2$

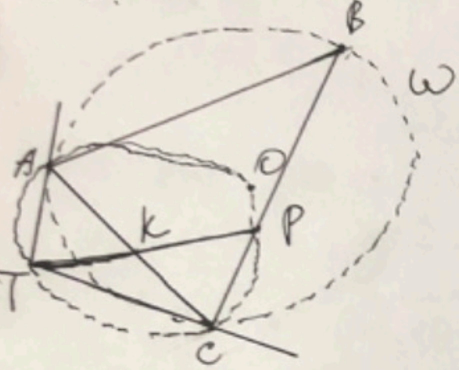
проверим $a=\frac{9}{2}$ $b=\frac{49}{2}-\frac{17}{4}=\frac{81}{4}\Rightarrow$ верно

ОДЗ: $a,b,c>0$ $a=\frac{9}{2}>0$, $b=\frac{81}{4}>0$, $c=\frac{21}{2}-6=\frac{9}{2}>0\Rightarrow$ удовлетворяет

Ответ: $x=7$

ЧИСТОВИК

№6.



① $\angle DAT = OCT = 90^\circ$, поскольку DA и DC — кас. к ω.
Значит, $AOCT$ — вписан. четырехуг. (DO — диаметр)

② $\angle APT = \angle CPT$, поскольку это вписан. углы, опирающ. на равн. хорды AT и CT $AT = CT$, как отрезки кас., проведен из одной точки. $\Rightarrow$ BK — биссектр. в $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}}$

③ $\angle AOC = \angle APC$ ($AOPC$ — вписан.) $\Rightarrow$
$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ ($\angle ABC$ — вписан., $\angle AOC$ — центр.)
$\Rightarrow \angle APC = 2\cdot\angle ABC = 2\cdot\angle ABP$, но $\angle APC$ — внешн для $\triangle ABP \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle PAB = \angle ABP \Rightarrow AP = BP$

$\Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{7}{5}$.

3

$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = \frac{7}{5}\cdot 12 + 12 = \frac{144}{5}$.

Ответ: $\frac{144}{5}$

ЧЕРНОВИК

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$

найти кол-во троек нат. чисел

6 x

кроме 1, 7

расписать

2 входят хотя бы в 1 ч.

2 всех — не более чем 17 в одном

ровно от 96 102 не входят...

кол-во набора всё

(1, 17, x)

(1, 17)

(1, 17, 17)

$17\cdot 3!-3-3=96$

кроме

x[1,

в одно из них в 1 случае

$17\cdot 3!-3-3$

$$\begin{array}{r} 102 \\ \times\ 96 \\ \hline 612 \\ +\ 918 \\ \hline \boxed{9792} \end{array}$$

5. $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\frac{x}{2}+1=a$; $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$; $\frac{3x}{2}-6=c$

$\log_{a^2} b=\frac{1}{2}\log_a b=\frac{x}{\log_a c}=\frac{c\cdot B}{x}$ $\frac{2}{B}=2$ ...

$\log_{\sqrt{b}} c=4\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_{\sqrt{c}} a=2\cdot\log_c a=2\cdot\frac{\log_a a}{\log_a c}=\frac{2}{B}$

$y\cdot y\cdot(y-1)=4$

$t^2-6t\ldots=0$

$t=1$; $y=2$

ЧЕРНОВИК