Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101304**

ID профиля: **848839**

Вариант 22

Черновик

$14a+2b \geqslant 0$

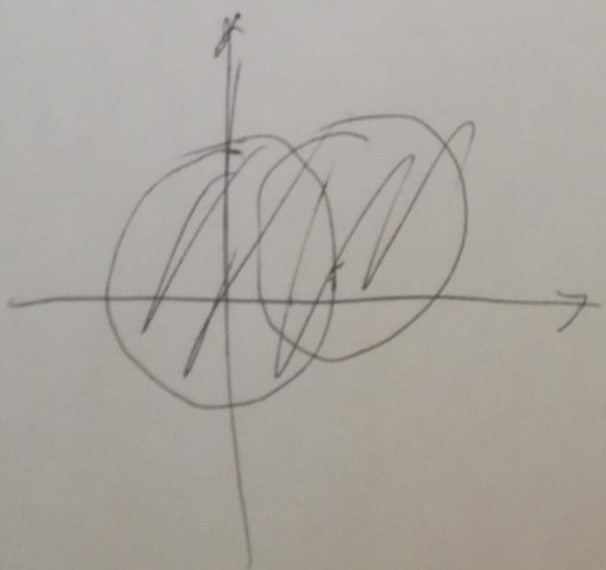
$(a-7)^2+(b-1)^2 \leqslant 50$

$7a+b<25$

$b<25-7a$

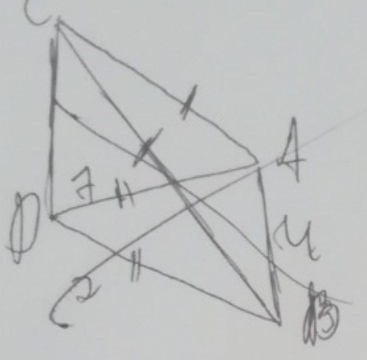
② $\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant 50 \\ 14a+2b > 50 \end{cases}$

$b > 25-7a$



21101304 (U848839 M1296791)

Черновик



$$\cancel{R = \frac{49}{\sqrt{196-16}} = \frac{49}{\sqrt{180}} = 3,65}$$

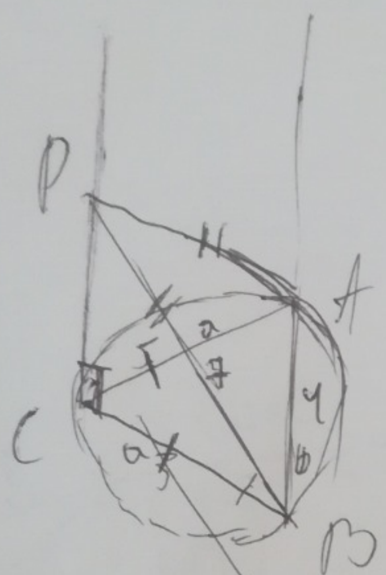
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b)\end{cases}$$

(1) $$\begin{cases}a^2+b^2 \le 14a+2b\\ 14a+2b < 50\end{cases}$$

$$(a^2-14a-49)+(b^2-2b+1) \le 50$$

$$14a+2b \ge 0$$

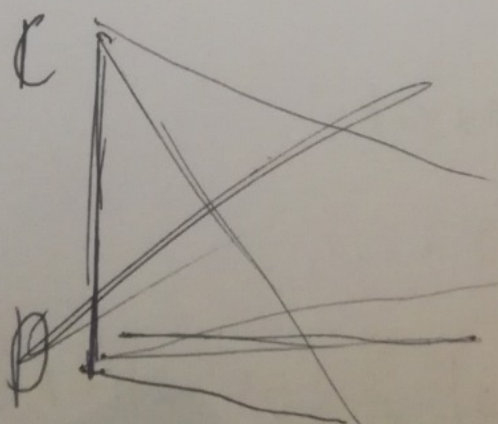
Черновик



$$R = \frac{a^2}{\sqrt{(2a)^2 - b^2}} = \frac{25}{\sqrt{84}}$$

$100 - 16$

2,72



21101304 (U848839 M1296791)

Чистовик

Задача 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 50 \\ a^2+b^2 \leq \min(14a+2b, 50)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2 \leq 14a+2b \Rightarrow (a^2-14a+49)+(b^2-2b+1) \leq 50 \\ 14a+2b < 50\end{cases}$$

$$14a+2b \geq 0$$

$$\begin{cases}(a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50 \\ 7a+b < 25\end{cases}$$

$$b < 25-7a$$

Или;

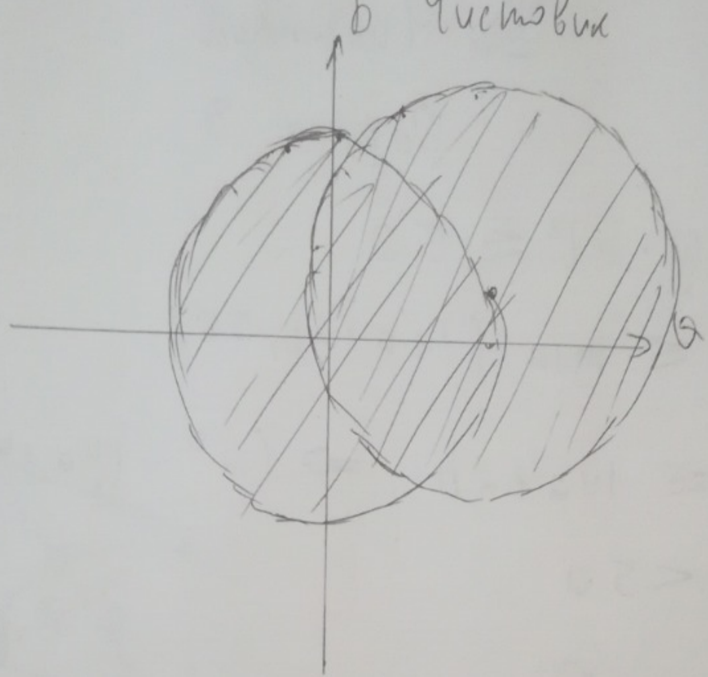
$$\begin{cases}a^2+b^2 \leq 50 \\ 14a+2b > 50\end{cases}$$

$$b > 25-7a$$

a и b – это центры всех окружностей радиусом $\sqrt{50}$

3

Чистовик



Места расположения центров окружностей радиусом $\sqrt{50}$

Чистовик

Задача 1

$$S = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{2a_1 + d \cdot 14}{2} \cdot 15$$

d - разность арифметической прогрессии

$$\begin{cases} (a_1 + 6d) \cdot (a_1 + 15d) > (a_1 + 7d) \cdot 15 - 24 \\ (a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 11d) < (a_1 + 7d) \cdot 15 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

Пусть:

$a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 = t$

$15a_1 + 105d - 24 = k$

Тогда:

$$\left.\begin{matrix} t > k \\ t + 20d^2 < k + 28 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 28 > 20d^2,$$

то есть $d = 1$, т.к. прогрессия возрастающая

и состоит из целых чисел

Подставим d:

1

21101304 (U848839 M1296791)

Чистовик

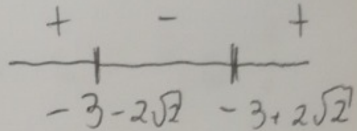
$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 > 15a_1 + 109 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \Rightarrow (a_1+3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$$

$$D = \cancel{36}\ 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2$$

$$a_1 = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$



Значит, a_1 должно находиться в диапазоне

$(-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2})$. и $a_1 \neq -3$

$-3-2\sqrt{2} \approx -5,82$

$-3+2\sqrt{2} \approx -0,18$

Целые числа м/у $-5,82$ и $-0,18$ (и не -3):

$-5; -4; -2; -1$

Ответ: Возможные значения a_1:

$-5; -4; -2; -1$

2

Черновик

$$d^2 < \frac{28}{20}$$

$d = 1$ $\quad \cancel{d = -1}$

$$a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81$$

$$a_1^2 + 21a_1 + 110 > 15a_1 + 109$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \quad a_1 \neq -3 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 > 0 \end{cases}$$

$$D = 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2$$

$$a_1 = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

$-5,82$ $\quad$ $-0,18$

$\sqrt{2} \approx 1,41$

$2\sqrt{2} \approx 2,82$

$-5; -4; \cancel{-3}; -2; -$

21101304 (U848839 M1296791)

Чернавик

$(a_1+6b)(a_1+15b) = a_1^2 + 6a_1b + 15a_1b + 90b^2$

$a_1^2 + 21a_1b + 90b^2 > S-24$

$(a_1+10b)(a_1+11b) = a_1^2 + 21a_1b + 110b^2 < S+4$

$\cancel{S = a\ 15a_1}$

$S = \dfrac{(a_1+a_{15})\cdot 15}{2} = \dfrac{2a_1+d\cdot 14}{2}\cdot 15$

$\underbrace{a_1^2 + 21a_1d + 90d^2}_{=t} > \underbrace{15a_1 + 105d - 24}_{=k}$

$a_1^2 + \cancel{22}\,21\,a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4$

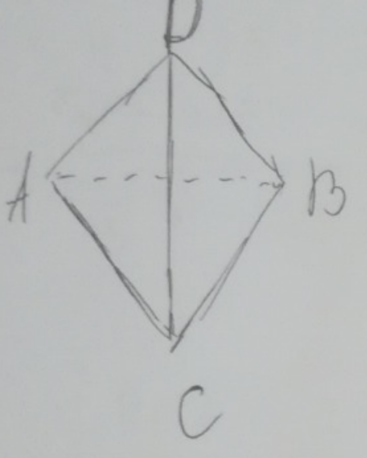
$t < k$

$t + 20d^2 < k + 28$

$28 > 20d^2$

Чистовик

Задача 2

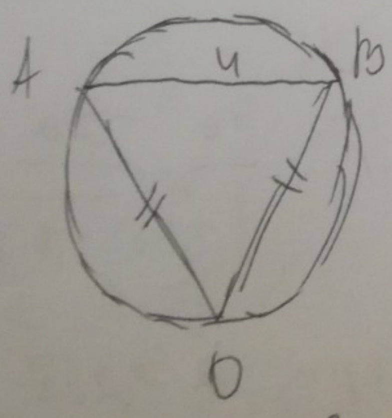


$$\left.\begin{aligned} AC &= BC \\ AD &= BD \\ CD &- \text{об.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow$$

высоты, опущенные из A и из B, пересекаются в одной точке O и они равны

$$\left.\begin{aligned} AO \perp CD &\Rightarrow AO \perp \text{оси} \\ BO \perp CD &\Rightarrow BO \perp \text{оси} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{плоскость } ABO \perp \text{оси}$$

$\Rightarrow$ в сечении будет окружность с радиусом цилиндра.



Пусть $AO = a \Rightarrow AO = a = BO$

$AB = 4$

Радиус описанной окружности равен

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - 4}}$$

Чистовик

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-16}}\right)' = \frac{2a\cdot\sqrt{4a^2-16} - a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8a}{\sqrt{4a^2-16}}}{4a^2-16} =$$

$$= \frac{2a\cdot(4a^2-16) - a^2\cdot 4a}{\left(\sqrt{4a^2-16}\right)^3} = \frac{8a^3-32a-4a^3}{\left(\sqrt{4a^2-16}\right)^3} =$$

$$= \frac{4a^3-32a}{\left(\sqrt{4a^2-16}\right)^3}$$

$$\frac{4a^3-32a}{\left(\sqrt{4a^2-16}\right)^3} = 0$$

$a \geq 2$ (по нера-ву Δ) $\Rightarrow$

$\sqrt{4a^2-16} \geq 0$

$4a^3 - 32a = 0$

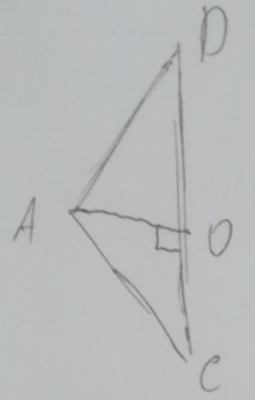
$a = 0 \qquad 4a^2 = 32$

$a = 2\sqrt{2}$ – мин. т.к. $\frac{4a^3-32a}{\left(\sqrt{4a^2-16}\right)^3} > 0$

при $a > 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow R$ мин. при $a = 2\sqrt{2}$

Чистовик



$$\left.\begin{aligned} AO &= 2\sqrt{2} \\ AC &= 6 \\ AD &= 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} CO &= \sqrt{AC^2 - AO^2} \\ OD &= \sqrt{AD^2 - AO^2} \end{aligned}$$

$$CO = \sqrt{27 - 8} = \sqrt{19}$$

$$OD = \sqrt{49 - 8} = \sqrt{41}$$

$$CD = CO + OD = \sqrt{41} + \sqrt{19}$$

Ответ: $CD = \sqrt{41} + \sqrt{19}$

21101304 (U848839 M1296791)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101304**

ID профиля: **848839**

Вариант 22

Черновик

$$\frac{2\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\ln\left(\frac{3x}{2}-8\right)}$$ 1,15

$$\frac{2\ln(3{,}75)}{\ln 12{,}25}$$

$(2{,}25)^2$

$\frac{3x}{2} > 6$

$$\frac{4\ln 2{,}25}{\ln 15}$$

$\frac{7}{2}x - \frac{17}{4} = 4\left(\frac{x}{2}+1\right)$ $3x > 12$

$x > 4$

$\frac{7}{2}x - \frac{17}{4} = 2x + 4$

$-1{,}89$ $x4$

$1{,}5x = 8\frac{1}{4}$ $\frac{7x}{2} = \frac{17}{4}$

$\frac{3}{2}$ $\frac{33}{4}$ $28x = 34$

$\frac{11}{\frac{33}{4}}{2}$ $\frac{x}{5}$ = $11{,}2 = \cancel{8{,}5}$

$$\frac{\cancel{2\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}}{\ln\left(\frac{3x}{2}-8\right)} \cdot \frac{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\cancel{2\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}} =$$

$$\frac{\ln\left(\frac{7}{2}x-\frac{17}{4}\right)}{\ln\left(\frac{3x}{2}-8\right)} = \frac{4\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\ln\left(\frac{3x}{2}-8\right)}$$

Чернова

$u \cdot a + v \cdot b + t \cdot c = 14$

$$НОК(a,b,c) = \frac{|a \cdot b \cdot c|}{НОД(a,b,c)}$$

$|a \cdot b \cdot c| = НОК \cdot НОД = 2^{18} \cdot 7^{19}$

0	16
1	15
2	14
3	13
4	12
5	11
6	10
7	9
8	8

9

$a = 14$

b, c

$2^{17} \cdot 7^{18}$

0	15
1	14
2	13
3	12
4	11
5	10
6	9
7	8
8	7
9	

14 14

$2^{15} \cdot 7^{16}$

$15 \cdot 15$

$\approx 17 \cdot 8 = 136 \cdot 6$

$225 + 8$

233

Чернов..

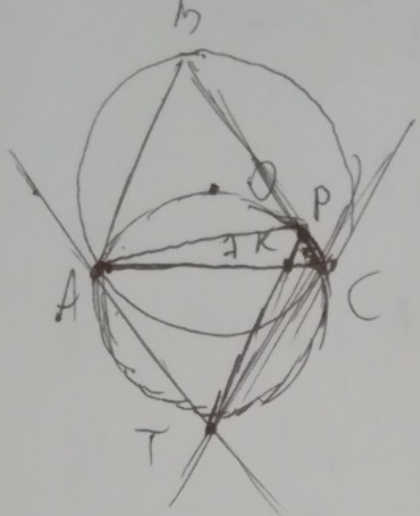
2^2 7^3

a	b
0	4
2	2
4	0

a	b
0	343
7	49
49	7
343	0

1	$343 \cdot 4$	49	28
2	$343 \cdot 2$	$49 \cdot 2$	14
4	$343 \cdot 1$		
7	$49 \cdot 4$		
14	$49 \cdot 2$		
28	49		

Черновик



$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\cancel{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) =}$$

$$\cancel{= \ln\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\ l}$$

$$\ln x = \ln a \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)^2} = \frac{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{2\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}$$

Чорновик

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2}{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\cancel{4}\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}$$

$$O \cdot B = \frac{2\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}$$

$$\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)$$

$$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4} = \frac{3x}{2}-6$$

$$\frac{7x}{2}-\frac{3x}{2} = \frac{17}{4}-6$$

$$2x = -1{,}75$$

$$x = -0{,}875$$

Чистовик

~~Задача~~

2) $A = \frac{8}{AB}$, $A = 4B + 2$

$A^2 B = 8$

$(16B^2 + 16B + 4)B = 8$

$16B^3 + 16B^2 + 4B - 8 = 0$

$4B^3 + 4B^2 + B - 2 = 0$

$2(B - \frac{1}{2})(2B^2 + 3B + 2) = 0$

$D = 9 - 16$

$B = \frac{1}{2}$

$A = 4$

$m^4 = n$ и $\sqrt{x} = m$

$\frac{3x}{2} - 6 = (\frac{x}{2} + 1)^2$

$\frac{3x}{2} - 6 = \frac{x^2}{4} + x + 1$

$x^2 - 2x + 28 = 0$

$D < 0$

Нет

3) $2 = AB^2$ $A = 4B - 2$

$4B^3 - 2B^2 - 2 = 0$

$2B^3 - B^2 - 1 = 0$

$(B - 1)(2B^2 + B + 1) = 0$

$D < 0$

$B = 1$ $A = 2$

3

Чистовик

$x = m$

$\frac{3x}{2} - 6 = \frac{x}{2} + 1$

$x = 7$

$m^2 = n$

при $x = 7$

$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{49}{2} - \frac{17}{4}$

$\frac{81}{4} = \frac{98 - 17}{4} = \frac{81}{4}$

Ответ: $x = 7$

4

Чистовик

Задача 5

$$a = \log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right)$$

$$b = \log_{\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{3x}{2} - 6\right)^2$$

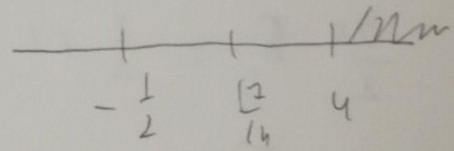
$$c = \log_{\left(\frac{3x}{2} - 6\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

$m = \frac{x}{2} + 1 > 0 \quad x > -\frac{1}{2}$

$n = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4} > 0 \quad x > \frac{17}{14}$

$k = \frac{3x}{2} - 6 > 0$

$x > 4$



$$a = \frac{1}{2}\log_m n = \frac{1}{2}A$$

$$b = 4\log_n k = 4\frac{\log_m k}{\log_m n} = \frac{4}{\log_k m \log_m n} =$$

$$= \frac{4}{ac} = \frac{4}{AB}$$

$$c = 2\log_k m = 2B$$

1) $\frac{1}{2}A = 2B$ и $2B - \frac{4}{4B^2} = 1$

$A = 4B$

$2B^3 - B^2 - 1 = 0$

$B = 1$

1

Чистовик

$(B-1)(2B^2+B+1)=0$

$D=1-8<0$

$B=1$

$A=4$

$K=m$

$\frac{3x-6}{2}=\frac{x}{2}+1$

$x=7$

$A=4$

$m^4=n$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^4=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$

$\left(\frac{7}{2}+1\right)^4 \stackrel{?}{=} \frac{49}{2}-\frac{17}{4}$

$\frac{9^4}{2^4} \stackrel{?}{=} \frac{49\cdot 2-17}{4}$ $\qquad \frac{9^4}{4\cdot 4}=\frac{81\cdot 4}{4\cdot 4}$ Нет

---

②

21101304 (U848839 M1296792)

Чистовик

Задача 4

НОД $(a, b, c) = 2 \cdot 7$

НОК $(a, b, c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

НОД: разложили a b c на простые множители

– взяли каждый множитель в min степени

(в том числе в нулевой)

НОК: аналогично max степень

$\Downarrow$

1) Кроме 1, 2, 7 в них нет множителей – из

НОД и НОК

2) $2^{17}, 7^{18}$ – max степени – должны быть хотя бы в одном числе – из НОК

3) a, b, c содержат обязательно $2 \cdot 7$ – из НОД

5

Чистовик

~~Задача 4~~

4) a, b, c не содержат одновременно $2^x \cdot 7^y$, $x > 1$ и $y > 1$

$a = 2 \cdot 7 \cdot A$

$b = 2 \cdot 7 \cdot B$ max степени в A, B, C – 2^{15} и 7^{12}

$c = 2 \cdot 7 \cdot C$

5) Среди a, b, c одно число обязательно

содержит 2^1 } для НОД (ровно в степени 1)
аналогично 7^1 }

Этот пункт – аналог пятого пункта

Пусть

$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

6

21101304 (U848839 M1296792)

Числовик

Среди a_1, b_1, c_1 – есть 1, 17, а третье любое от 1 до 17

Среди a_2, b_2, c_2 аналогично 1, 18, 1…18

Таких вариантов с учетом перестановок между a, b, c: $\underbrace{17}_{1\dots17} \cdot \underbrace{3}_{\text{перестановки } abc}$ для 2, $18 \cdot 3$ для 7

Исключим повторы:

a_1	b_1	c_1
1	1	17
1	17	1
17	1	1
1	17	17
17	1	17
17	17	1

Каждый два раза считали (первые три строки)

аналогично (последние три строки)

6 лишних

Аналогично с a_2, b_2, c_2

7

Чистовик

Ответ: $(3!\cdot 17-6)(3!\cdot 18-6) =$

$= 6\cdot 16\cdot 6\cdot 17 = \underline{9792}$

8