Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101258**

ID профиля: **335038**

Вариант 22

Чистовик | Часть 1 | Вариант 22

№ 1

$S_{15} = a_1 + a_2 + \dots a_{15} = \frac{2a_1 + 14b}{2} 15 = \ominus$

$a_n = a_1 + (n-1)b$

(1) $a_n, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$

$\ominus (a_1 + 7b)15 = 15a_8 = 15a_1 + 105b$

$a_8 = a_1 + 7b$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$(a_8 - b)(a_8 + 8b) > 15a_8 - 24$

(2) $a_8^2 + 7ba_8 - 8b^2 > 15a_8 - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$(a_8 + 3b)(a_8 + 4b) < 15a_8 + 4$

$a_8^2 + 7ba_8 + 12b^2 < 15a_8 + 4$

(3) $-15a_8 - 4 < -a_8^2 - 7ba_8 - 12b^2$

(2)+(3): $-20b^2 > -28$

$b^2 < \frac{7}{5} \overset{(1)}{\Rightarrow} b = 1$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$(a_1 + 6b)(a_1 + 15b) > 15a_1 + 105b - 24$

$a_1^2 + 21ba_1 + 90b^2 > 15a_1 + 105b - 24$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$(a_1 + 3)^2 > 0$

(a) $a_1 \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$(a_1 + 10b)(a_1 + 11b) < 15a_1 + 105b + 4$

$a_1^2 + 21ba_1 + 110b^2 < 15a_1 + 105b + 4$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$D = 36 - 4 = 32$

$(a_1 + 3 - 2\sqrt{2})(a_1 + 3 + 2\sqrt{2}) < 0$

(б) $a_1 \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2})$

(1),(а),(б) $\Rightarrow$ может быть равно: $a_1 = -5; -4; ~~-3~~; -2; -1$

Ответ: $a_1 = -5; -4; -2; -1$

21101258 (U335038 M1300699)

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) & (2) \end{cases}$$

(2) => a и b одновременно не могут быть < 0

а) Р-м когда ~~...~~ $14a+2b \le 50$! $\longrightarrow b \le 25-7a$

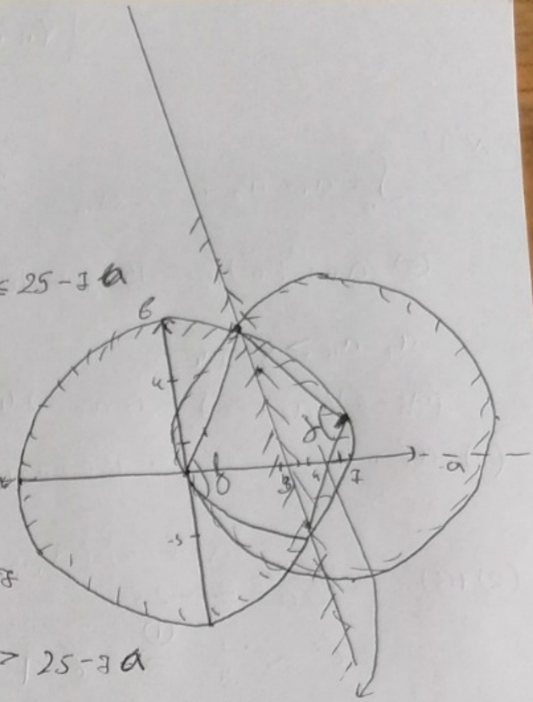
$a^2+b^2 \le 14a+2b$

$a^2-14a+49+b^2-2b+1 \le 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$ ← ~~...~~ круг ω_1

$R=\sqrt{50}$

$\sqrt{50}$ чуть больше 7



б) Р-м когда $14a+2b > 50$! => $b > 25-7a$

$a^2+b^2 \le 50$

← круг ω_2 $R=\sqrt{50}$

Найдем точки пересечения прямой $b=25-7a$ и окр. $a^2+b^2=50$

$(25-7a)^2+a^2=50$

$625+50a^2-7\cdot 50\cdot a=50 \mid :25$

$2a^2-14a+23=0$

$D=196-184=12$

$a=\frac{7\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b=$ ~~...~~ $\frac{1\pm 7\sqrt{3}}{2}$

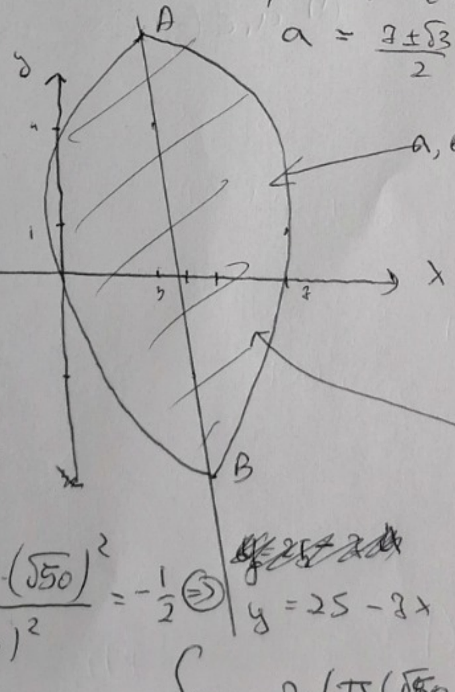
Найдем точки пересечения прямой $b=25-7a$ и окр $(a-7)^2+(b-1)^2=50$

$a=\frac{7\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b=\frac{1\pm 7\sqrt{3}}{2}$

~~A(...)~~

$A\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+7\sqrt{3}}{2}\right)$

$B\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-7\sqrt{3}}{2}\right)$



a, b ~~...~~ могут принимать любое значение из этой фигуры

=>

фигура M – это набор ~~...~~ кругов с $R=\sqrt{50}$ и центрами лежащими внутри этой фигуры

$\rho(A;B)=\sqrt{3+3\cdot 49}=\sqrt{3\cdot 50}$

~~...~~

$y=25-7x$

$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{(\sqrt{3\cdot 50})^2-2\cdot(\sqrt{50})^2}{-2(\sqrt{50})^2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha=\beta=\frac{2\pi}{3}$

$S_M=2\cdot\left(\pi(\sqrt{50}+\sqrt{50})^2\cdot\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}-\sqrt{50}\cdot\sin 30^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}\sqrt{50}}{2}\right)=$

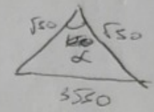
$=2\left(200\frac{\pi}{3}-\frac{3\cdot 50}{4}\right)=400\frac{\pi}{3}-\frac{300}{4}$

2

Чистовик

продолжение №3

~~Ответ~~ $S_м$ – площадь секторов кругов с углом α и $R=\sqrt{50}$ и вычитанием двух площадей треугольников



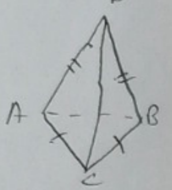
Ответ: $S_м = 400\frac{\pi}{3} - \frac{300}{4}$

Чистовик

№2

$AB = 4$ $AC = CB = 5$ $AD = DB = 7$	$ABCD$ - тетраэдр $\Rightarrow \begin{cases} DC > 0 \\ DC < \sqrt{25-4} + \sqrt{49-4} = \sqrt{21} + 3\sqrt{5} \end{cases}$

Все вершины лежат на боковой пов-ти цилиндра
$DC \parallel$ оси цилиндра
$\triangle DAC = \triangle DBC \Rightarrow AB \perp CD$ $\quad \Rightarrow$



$\Rightarrow$ Чтобы радиус цилиндра был наименьшим AB - должен равняться диаметру окружности основания $\Rightarrow r = \frac{AB}{2} = 2$

Расстояние от центра AB до DC - прямой должно быть $\geq r = 2$

Возьмем пл-ть α : $A, B \in \alpha$ и $\alpha \parallel DC$

$\rho(\alpha, DC) = 2 =$

21101258 (U335038 M1300699)

Черновик

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + b$

$a_3 = a_2 + b = a_1 + 2b$

$a_4 = a_1 + 3b \Rightarrow a_n = (n-1)b + a_1$

15 7 35 105

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} =$

$= \frac{2a_1 + 14b}{2} 15$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$b > 0$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$(a_8 - b)(a_8 + 8b) > 15a_8 - 24$

$a_8^2 - 8b^2 + 7ba_8 > 15a_8 - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} =$

$= (a_8 + 3b)(a_8 + 4b) < S + 4$

$a_8^2 + 12b^2 + 7ba_8 < 15a_8 + 4$

$-(15a_8 + 4) < -a_8^2 - 12b^2 - 7ba_8$

$-20b^2 > -28$

$28 < 20b^2$

$\frac{7}{5} < b^2 \Rightarrow b = 1$

36 − 4

32

$a_1 ?$

$(a_1 + 6b)(a_1 + 15b) > S - 24$

$a_1 + 7$

101 − 20

$(a_1 + 6)(a_1 + 15) > 15a_1 - 24$

81

$32 = 16 \cdot 2$

$\frac{-6a_1 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3a_1 \pm 2\sqrt{2}$

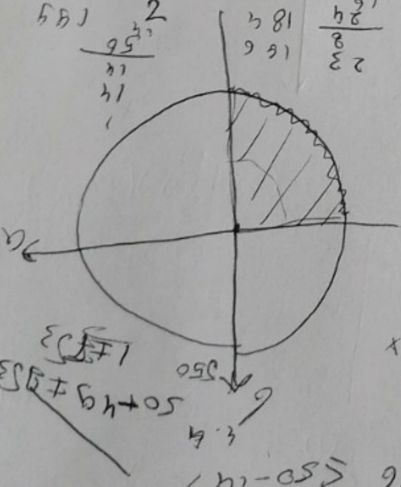
2 1,4

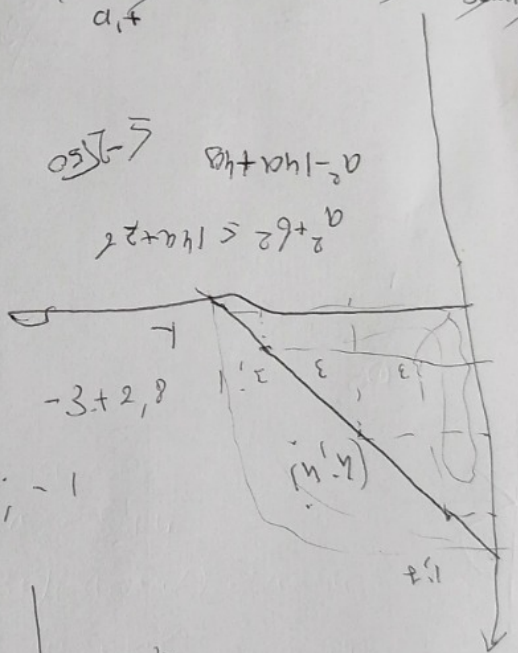
2,8

−3 − 2,8

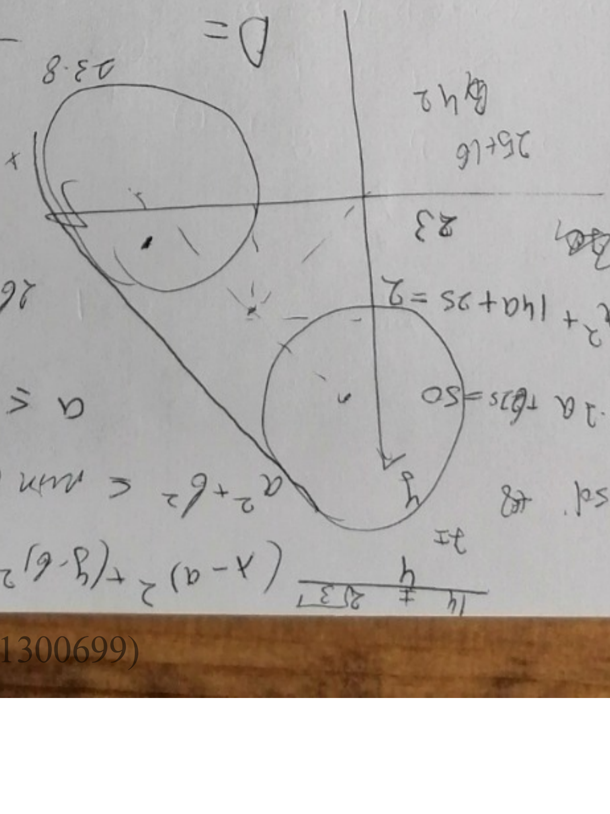
−3 + 2,8

−5,8 −5, −1





$50a^2 + 625 - 7 \cdot 50a = 14a + (2 \cdot 25 - (a)$



$a^2 + b^2 \leq 14a + 2b$

$a^2 - 14a + 49$

$5 - \sqrt{50}$

$(0;6)$

$(6;0)$

$25 + 16$

$3 \cdot 2 \cdot 8$

$2a^2 + 14a + 25 = 2$

$32 \leq$

$50a^2 + 50 \cdot 2a + 625 = 50$

$a \leq 50 - 26$

$b \leq 25 - 7a$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 50$

$a^2 + b^2 \leq \min(14a + 2b, 50)$

$(25 - 7a)^2 + a^2 = 50$

$a = \frac{25}{7}$

$\frac{14 \pm 2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{50 - 7 \pm 5\sqrt{3}}{2}$

$\frac{43 \pm 5\sqrt{3}}{2}$

Черновик

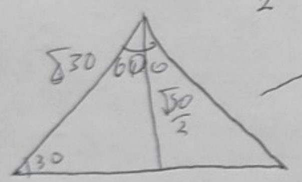
$\frac{17}{\frac{17}{\frac{49}{2}}}$ $\sqrt{49}$

$\frac{1 \pm 12}{2}$ $\frac{13}{2}$

$\frac{13}{2}$; $\frac{-11}{2}$

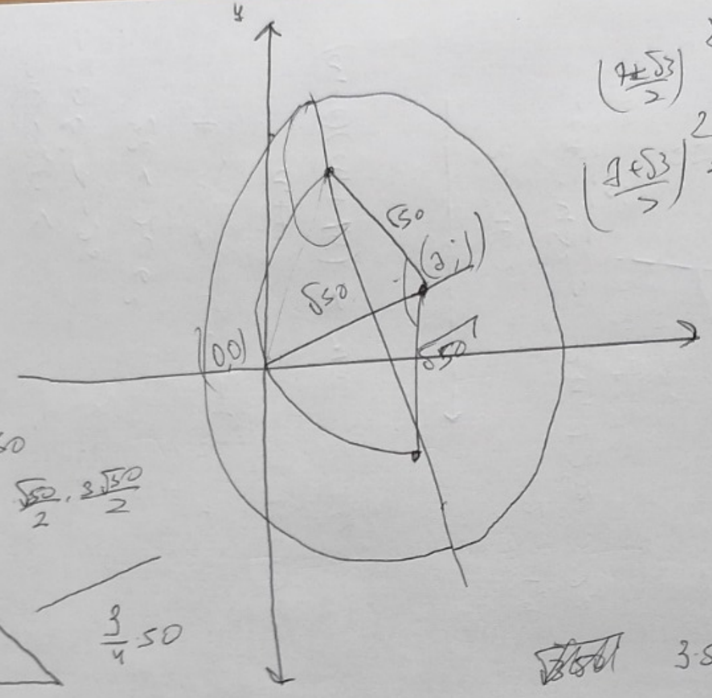
$\frac{3}{2}$ $\sqrt{50}$

$\frac{\sqrt{50}}{2}$, $\frac{3\sqrt{50}}{2}$



$\frac{3}{4} \cdot 50$

$\frac{3\sqrt{50}}{2}$



$\frac{300}{8}$

$\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}\right)^2 +$

$\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2} - \frac{7-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+7\sqrt{3}}{2} - \frac{1-7\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\sqrt{\left(\frac{7+\sqrt{3}-7+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1+7\sqrt{3}-1+7\sqrt{3}}{2}}$

$(7\sqrt{3})^2$

$3+$ $3 + 3 \cdot 49$

$3 \cdot 50$

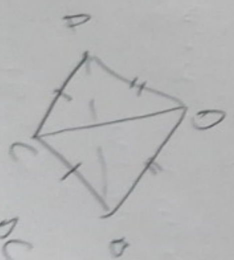
$3 \cdot 50 = 50 + 50 - 2 \cdot 50 \cdot \cos\alpha$

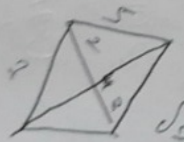
arccos $50 = -100 \cdot \cos\alpha$

$\alpha = -\frac{1}{2}$

πr^2

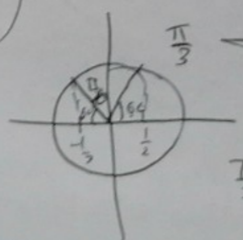
$\pi(2\sqrt{50})^2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{150-100}{-100}$ $\frac{-50}{100}$

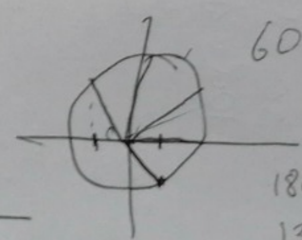




$4 \cdot 50$

$\left(200\pi \cdot \frac{1}{3} - \frac{300}{8}\right)$





$60+90$

150

$180-60$

130

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi+\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$ $\frac{2}{3}\pi$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101258**

ID профиля: **335038**

Вариант 22

Чистовик | Часть 2 Вариант 22

№5

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = a$

$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 = 4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right) = b$

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right) = c$

ОДЗ

$\begin{cases} \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} > 0 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \neq 1 \\ \frac{x}{2}+1>0 \\ \frac{x}{2}+1\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{17}{14} \\ x \neq \frac{3}{2} \\ x > -2 \\ x \neq 0 \\ x > 4 \\ x \neq \frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \neq \frac{14}{3} \end{cases}$

① Пусть $a=b$ $\quad c=a-1=b-1 \rightarrow a\cdot b\cdot c=4$

$(a-1)\cdot a^2=4$

$a^3-a^2=4$

$(a-2)\underbrace{(a^2+a+2)}_{>0}=0$

$a=2$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=2$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=4$

$x<4 \Rightarrow$ не подходит по ОДЗ

② Пусть $a=c$ $\quad b=a-1=c-1$

аналогично прошлому пункту

$c=2$

$2\log_{(3\frac{x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2$

$\frac{3x}{2}-6=\frac{x}{2}+1$

$x=7$

③ Пусть $b=c$ $\quad a=b-1=c-1$

аналогичная предыдущим пунктам

$b=2$

$4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=2$

$\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 \quad |\cdot 4$

$14x-17=9x^2-72x+144$

Чистовик

продолжение №5

$$9x^2-86x+161=0$$

$$D=86\cdot86-161\cdot4\cdot9=7396-5796=1600=40^2$$

$$x=\frac{86\pm40}{2\cdot9}=7;\ \frac{23}{9}$$

не подходит по ОДЗ

Ответ: $x=7$

21101258 (U335038 M1300700)

Чистовик

$a; b; c \in \mathbb{N}$

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 14 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

$\text{НОД}(\text{НОД}(a;b); c) = \text{НОД}(a;b;c)$

$\text{НОК}(\text{НОК}(a;b); c) = \text{НОК}(a;b;c)$

~~НОД НО~~

$\text{НОД}(a;b;c) \cdot \text{НОК}(a;b;c) = \text{НОД}(\text{НОД}(a;b);c) \cdot \text{НОК}(\text{НОК}(a;b);c) =$

$= \text{НОД}(a;b) \cdot \text{НОК}(a;b) \cdot c = a \cdot b \cdot c = 14 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} = 7^{19} \cdot 2^{18}$

$a = 2^{x} \cdot 7^{y}$

$b = 2^{\varphi} \cdot 7^{r}$

$c = 2^{t} \cdot 7^{m}$

$$\begin{cases} x + \varphi + t = 18 \\ y + r + m = 19 \end{cases}$$

т.к $\text{НОД}(a;b;c) = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow a; b; c \geqslant 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~

$x, \varphi; t \in [0; 18]$, но хотя бы один из них > 0

$y; r; m \in [0; 19]$, но хотя бы один из них > 0

существует C^2_{18+1} $x; \varphi$ и t - различных

существует C^2_{19+1} $y; r$ и m - различных

и вообще друг от друга не зависят $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ существует $C^2_{19} \cdot C^2_{20}$ различных троек $(a; b; c)$

$$C^2_{19} \cdot C^2_{20} = \frac{19!}{2!(19-2)!} \cdot \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{19 \cdot 18}{2} \cdot \frac{20 \cdot 19}{2} = 32490$$

Ответ: существует 32490 различных троек $(a; b; c)$

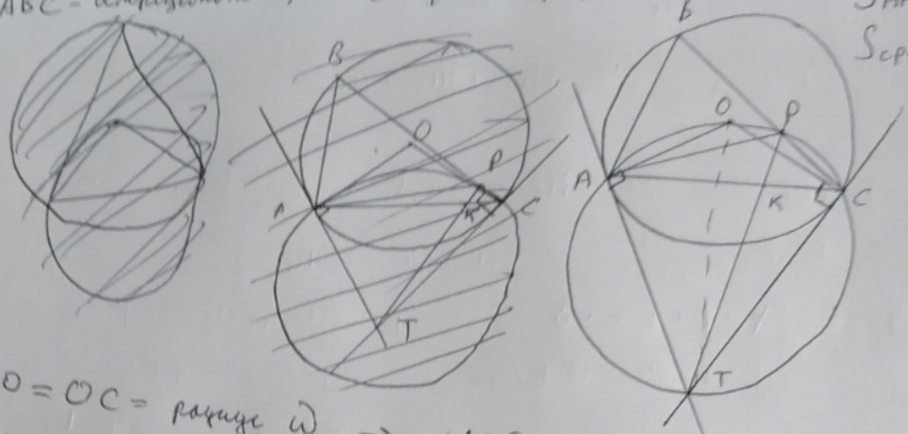
Чистовик

N 6

Т.к $\triangle ABC$ - остроугольный, то т.O точно находится внутри $\triangle ABC$

$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$



$AO = OC =$ радиус ω

$\angle AOC + \angle ATC = 180°$ $\Rightarrow$ $\triangle AOC$ - р/б $\Rightarrow$ $\triangle ATC$ - р/б

$AT = TC$

Черновик

НОД$(a; b; c) = 14$

НОК$(a; b; c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

НОД(НОД$(a; b)$; НОК$(a; c)$) $= 14$

НОД(abc) НОК$(abc) = 14 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} = abc$

$\boxed{\text{Черновик}}$

$\frac{43 \pm 20}{9}$ $\frac{23}{9}$ 63 7

$9x^2 - 86x + 161 = 0$

$D = 86 \cdot 86 - 161 \cdot 4 \cdot 9$

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times\ 86 \\ \hline 516 \\ 688\ \ \\ \hline 7396 \end{array}$$

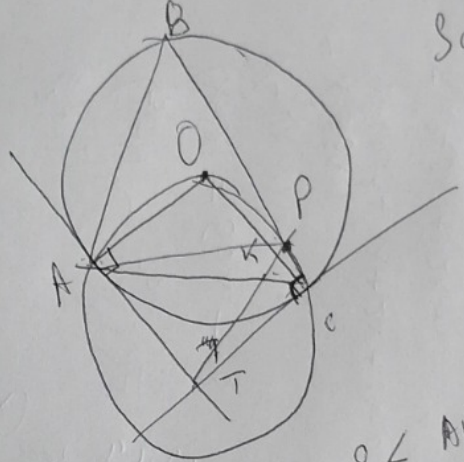
$$\begin{array}{r} 161 \\ \times\ 9 \\ \hline 1449 \\ \times\ 4 \\ \hline 5796 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7396 \\ -\ 5796 \\ \hline 00 \end{array}$$

1600

$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$



12

$2\angle ABC = 2\angle AOC$

α