Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101248**

ID профиля: **191244**

Вариант 22

ЧИСТОВИК

(1) $S = \frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15 = \frac{a_1+a_1+14d}{2}\cdot 15 = 15a_1+105d$ $d>0$

$a_1, a_2, \dots, a_{15} \in \mathbb{Z}$

~~$a_7 a_{16} > S - 24 = \frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15 - 24$~~

$a_7 a_{16} = (a_1+6d)(a_1+15d)$

$a_{11} a_{12} = (a_1+10d)(a_1+11d)$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1d+90d^2 > 15a_1+105d-24 \quad (1) \\ a_1^2+21a_1d+110d^2 < 15a_1+105d+4 \quad (2) \end{cases}$$

$28+a_1^2+21a_1d+90d^2 > a_1^2+21a_1d+110d^2$

$28-20d^2>0$

$7-5d^2>0$

т.к. все члены прогрессии целые, то и d — целое

$d^2<\frac{7}{5} \Leftrightarrow d=1$ или -1, но прогрессия возраст. $\Rightarrow d=1$. Подставим в (1):

$a_1^2+21a_1+90>15a_1+105-24$

$a_1^2+6a_1+9>0$

$(a_1+3)^2>0 \Rightarrow a_1\neq -3$.

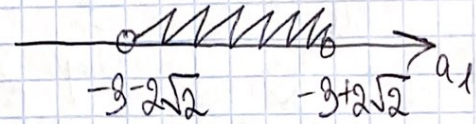
Подставим во (2):

$a_1^2+21a_1+\cancel{90}\ 110<15a_1+105+4$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$D = 36 - 4 = 32$

$a_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$



$1{,}5 > \sqrt{2} > 1{,}4 \Rightarrow \cancel{2\sqrt{2}}\ 3 > 2\sqrt{2} > 2{,}8 \Rightarrow$ $0 > -3+2\sqrt{2} > -0{,}2 > -1$
$-5 > -5{,}8 > -3-2\sqrt{2} > -6$

значит $a_1 \in (-6; 0)$, т.е. $a_1 = \{-5; -4; -3; -2; -1\}$,

$a_1 = -3$ не подх. из прошлого условия $\Rightarrow$ остается

$a_1 = \{-5; -4; -2; -1\}$.

Ясно, что, если взять любое из данных a_1 и $d = 1$, то все условия будут выполняться.

Ответ: $a_1 = \{-5; -4; -2; -1\}$

ЧИСТОВИК

1) $a_1=-5,\ d=1:\ S=-75+105=30$

$a_7 a_{16}=10>6$

$a_{11}a_{12}=30<34$

2) $a_1=-4;\ d=1:\ S=-60+105=45$

$a_7 a_{16}=22>21$

$a_{11}a_{12}=42<49$

3) $a_1=-2;\ d=1;\ S=75$

$a_7 a_{16}=52>51$

$a_{11}a_{12}=72<79$

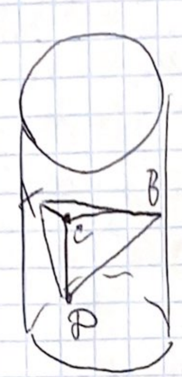
4) $a_1=-1;\ d=1:\ S=90$

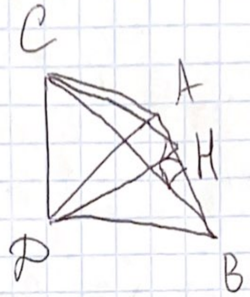
$a_7 a_{16}=70>66$

$a_{11}a_{12}=90<94.$

ЧИСТОВИК.

2





найдем $\angle\big((ACB),(ADB)\big)$.

опустим $CH \perp AB$, тогда т.к. $AC=CB$, то CH – медиана $\Rightarrow DH\perp AB$, т.к. $AD=DB \Rightarrow \angle CHD$ – линейный угол двугр. угла (искомый)

$$V_{ABCD} = \frac{\frac{2}{3}\cdot S_{ACB}\cdot S_{ADB}\cdot \cos\angle CHD}{AB} =$$

по т. косинусов

$$\frac{\frac{2}{3}\cdot \frac{1}{2}CH\cdot \cancel{AB}\cdot \frac{1}{2}\cancel{DH}\cdot AB\cdot \frac{CH^2+DH^2-CD^2}{\cancel{2CH\cdot DH}}}{\cancel{AB}} \ast$$

по т. Пифагора в $\triangle CHB$, $\triangle DHB$: $CH=\sqrt{21}$, $DH=\sqrt{45}$

$$\ast = \frac{66-CD^2}{3} = 22 - \frac{CD^2}{3}$$

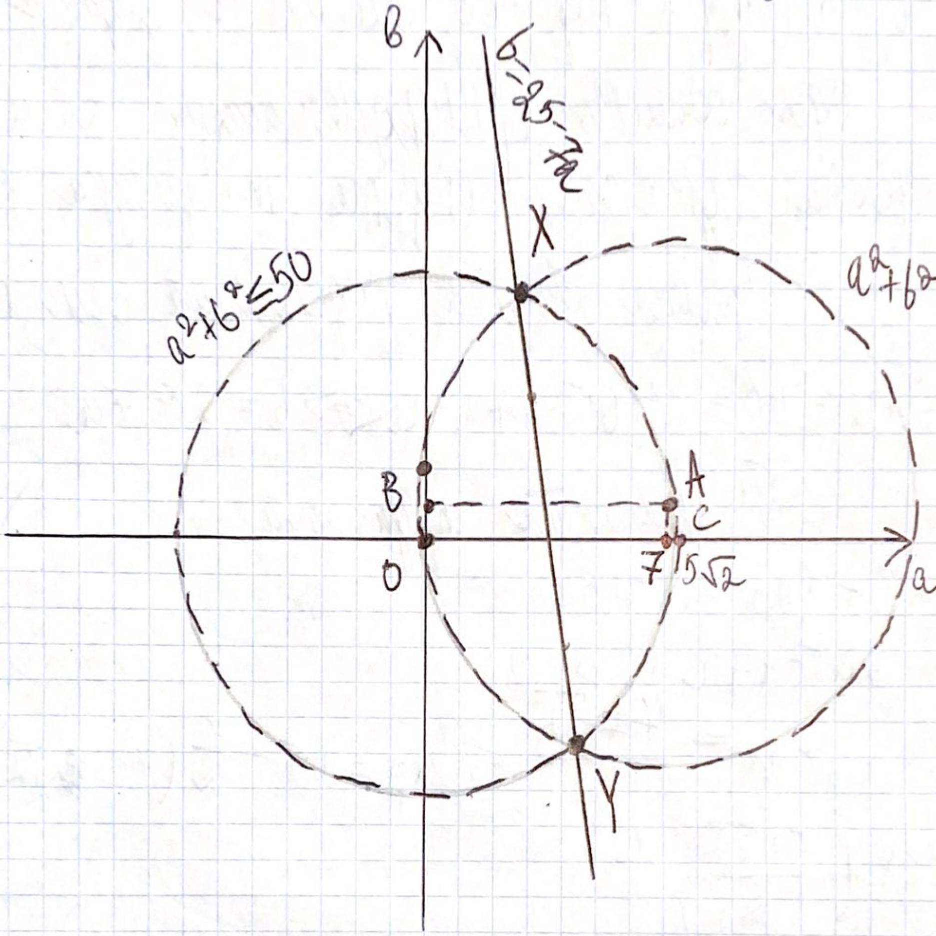
т.к. $V_{ABCD}>0$, то $(66-CD^2)>0 \Rightarrow$

$0<CD<\sqrt{66}$

③ $$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leq 50 \\ a^2+b^2 \leq \min(14a+2b, 50) \end{cases}$$

ЧИСТОВИК

$5\sqrt{2} > 5\cdot 1{,}4 = 7.$



Б

1) $(a-x)^2+(b-y)^2 \leq 50$ − круг с центром $(x;y)$ и $R = 5\sqrt{2}$

2) $a^2+b^2 \leq 50$ − круг с центром $O(0;0)$ и $R=5\sqrt{2}$

3) $a^2+b^2 \leq 14a+2b \Leftrightarrow (a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50$ − круг с центром $A(7;1)$ и $R=5\sqrt{2}$

4) $14a+2b=50 \Leftrightarrow b=25-7a$ − прямая, являющаяся радикальной осью для 2й и 3й окружностей

если $14a+2b \geq 50$, то мы берем ~~то~~ то, что правее этой прямой, принадлежащее 2й окружности, аналогично, если $14a+2b<50$, берем $_2$то, что левее прямой и принадлежит 2й окружности.

Так, второе нер-во системы задает нам ~~обл~~ область, принадлежащую 1й и 2й окружности одновременно (пусть это фигура K)

Прямая является радикальной осью, т.к.

$a^2+b^2-50=a^2+b^2-14a-2b \Leftrightarrow b=25-7a$.

Т. пересечения окружностей:

$a^2+(25-7a)^2=50$

$2a^2-14a+23=0$

$a_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b_{1,2}=25-\dfrac{7}{2}(7\pm\sqrt{2})$

$X\left(\dfrac{7+\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{\,}\right.$

M — фигура состоящая из таких точек (x,y), ~~для которых~~ что круг с центром в (x,y) и $R=5\sqrt{2}$ полностью покрывает фигуру K.

пусть $B(0,1)$, $C(7;0)$, тогда M — $OBAC \Rightarrow$

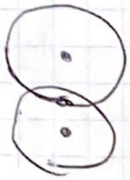
$S_M=7\cdot 1=7$.

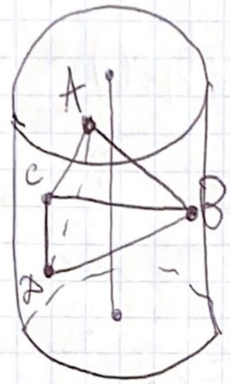
ЧИСТОВИК

6

ЧЕРНОВИК

$$\cos CHD = \frac{CH^2 + DH^2 - CD^2}{2\,CH\cdot DH} = \frac{21+45-CD^2}{2\sqrt{7\cdot 3\cdot 9\cdot 5}} = \frac{66-CD^2}{6\sqrt{105}}$$

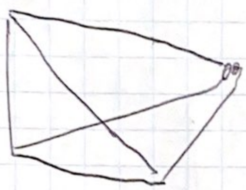


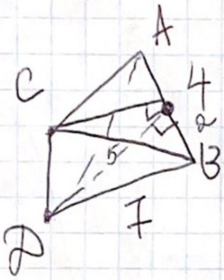


$AB = 4$

$AC = CB = 5$

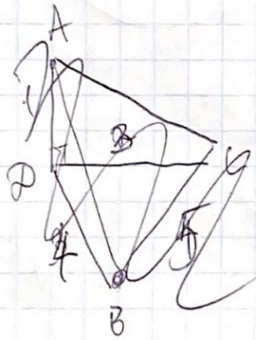
$AD = DB = 7$

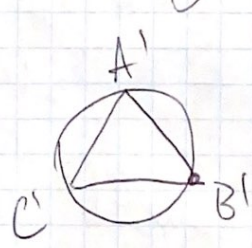




$\cancel{V = \frac{1}{6}\, CD\cdot AB\cdot \cos\alpha}$

$$V = \frac{\frac{2}{3}\, S_1\cdot S_2\cdot \cos CHD}{AB} = \frac{\frac{2}{3}\, 2\sqrt{21}\cdot 2\sqrt{45}\cdot \cos CHD}{4}$$





$$S_{CAB} = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4R}$$

$R \to \min$

1

$$V_{ABCD} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{21}\sqrt{45}\cdot \frac{66-CD^2}{2\sqrt{21}\sqrt{45}}}{} = \frac{66-CD^2}{3} = 22 - \frac{CD^2}{3}$$

ЧЕРНОВИК

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50$ — квадрат (x, y), $R=5\sqrt{2}$

$a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50)$

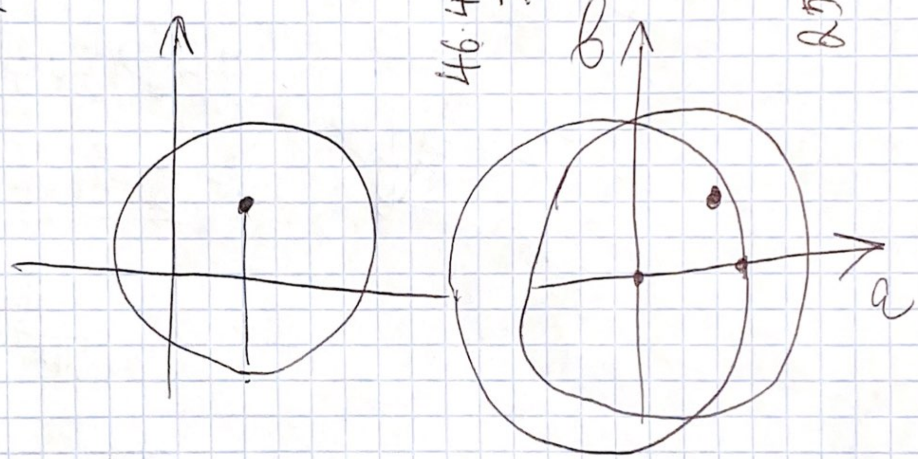
$a^2+b^2 \le 50$

$a^2+b^2 \le 14a+2b$

$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$

$14a+2b \ge 50$

$7a+b \ge 25$



$a^2+625+49a^2-350a=50$

$50a^2-350a+575=0$

$2a^2-14a+23=0$

$D=196-184=12$

$8\cdot 23=184$

$a_{1,2}=\frac{14\pm 2\sqrt{2}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{2}}{2}$

1,4

$\cancel{7{,}5} > 5\sqrt{2} > 7$

$b=25-7a$

$a=7, b=1$

$\cancel{14a+2b-50=a^2+b^2-50}$

$\cancel{a^2+b^2}-50=\cancel{a^2+b^2}-14a-2b$

$7a+b=25$ $14a+2b \ge 50$

2

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101248**

ID профиля: **191244**

Вариант 22

④ $\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 2\cdot 7 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

α, β – натур. числа, где $\alpha \le 17$, $\beta \le 18$

У нас не может быть α или β быть равно 0, т.к. тогда в НОДе не будет 2 или 7, а также не может быть простых множителей кроме 2 и 7, т.к. если бы они были, то они бы входили в НОК.

Чтобы НОД был $2\cdot 7$ нам необходимо, чтобы $\alpha_i = 1$, $\beta_j = 1$

Чтобы НОК был $2^{17}\cdot 7^{18}$ нам необх., чтобы $\alpha_k = 17$, $\beta_n = 18$

Пусть $\alpha_a \le \alpha_b \le \alpha_c$, т.е. $2, 2^{1\ldots 17}, 2^{17}$.

Если $2, 2, 2^{17}$ или $2, 2^{17}, 2^{17}$, то вариантов перестановки 3, если же $\alpha_b = 2, \ldots, 16$, то вариантов перестановки чисел 6 $\Rightarrow$ всего вариантов распределить степень двойки $(3\cdot 2 + 6\cdot 15) = \underline{6\cdot 16}$.

Аналогично поступаем со степенью семерки и получаем $(3\cdot 2 + 6\cdot 16) = 6\cdot 17$ вариантов.

ЧИСТОВИК 7

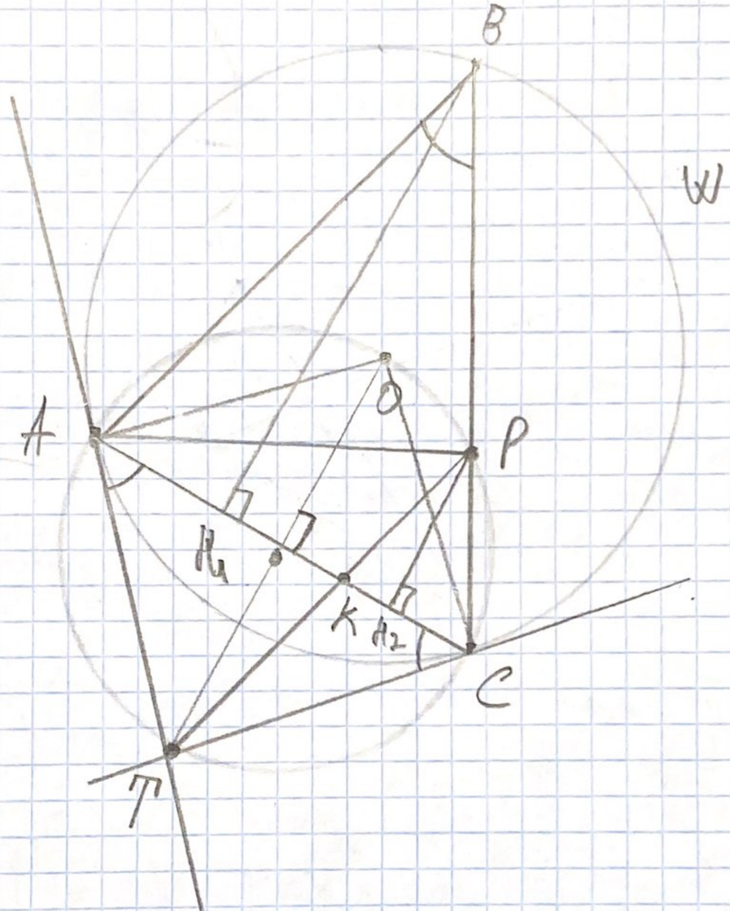
т.к. степени 2 и 7 независимы, то всего троек: $6 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 17 = 36 \cdot 16 \cdot 17$

Ответ: $36 \cdot 16 \cdot 17$.

ЧИСТОВИК.

6 $S_{APK}=7,\ S_{CPK}=5$

Чистовик



1) A, O, C, T, P концикличны

Док-во: $\angle AOC = 2\beta$, если $\angle B=\beta$

$\angle TAC = \angle ACT = \beta$ как угол между хордой и касат. $\Rightarrow \angle T = 180 - \angle TAC - \angle ACT = 180 - 2\beta = 180 - \angle AOC$, ч.т.д.

Причем OT явл. диаметром, т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90°$.

$\angle$ ~~ABC~~ $APC = \angle AOC = 2\beta$

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{\frac{1}{2}PK\cdot KC\cdot \sin\gamma}{\frac{1}{2}PK\cdot KA\cdot \sin(180-\gamma)}=\frac{KC}{KA}=\frac{7}{5}$$

~~∠OPC = 180~~ $\angle OPT = 180$ $\angle OAT = 90^\circ$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}}=\frac{BH_1}{PH_2}=\frac{BC}{CP}$$

$S_{APC}=\frac{1}{2}AP\cdot PC\cdot\sin 2\beta = AP\cdot PC\cdot \sin\beta\cdot\cos\beta$

$TA=TC$, $OA=OC$

$OT\perp AC$, т.к. AC — радик. ось

$\cancel{\frac{S_{ABC}}{A_{PC}}}=$

ЧИСТОВИК 10

(15) пусть числа это a, b, c

ЧИСТОВИК

1) $a = b = c+1$

2) $a = c = b+1$

3) $b = c = a+1$

~~(16)~~ $\cancel{\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{|\frac{x}{2}+1|}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left|\frac{3x}{2}-6\right| \\ 4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left|\frac{3x}{2}-6\right| = 2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)+1 \end{cases}}$

ОДЗ: $\begin{cases} \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 \neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6 \neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} > 0 \\ \left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 > 0 \\ \frac{x}{2}+1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0;\ x \neq -1 \\ x \neq \frac{3}{2} \\ x \neq \frac{14}{3} \\ x > \frac{17}{14} \\ x \neq 4 \\ x > -2 \end{cases}$

$x \in \left(\frac{17}{14}; +\infty\right) / \left\{4; \frac{14}{3}; \frac{3}{2}\right\}$.

$\cancel{\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{|\frac{x}{2}+1|}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \frac{4}{\log_{|\frac{3x}{2}-6|}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)} \\ \log \end{cases}}$

$\cancel{2\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left|\frac{x}{2}+1\right| =}$

пусть $\left(\frac{x}{2}+1\right) = d$, $\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = e$,

$\left(\frac{3x}{2}-6\right) = f$

на ОДЗ d, e, f положительны.

11

1) $\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c$

$\frac{1\cdot\log_c b}{2\cdot\log_c a} = 4\log_b c$

$\frac{\log_c b}{\log_c a}^{\backslash \log_c b} - \frac{4}{\log_c b}^{\backslash \log_c a} = 0$

$\log_c^2 b - \log_c a^4 = 0$; $\log_c a, \log_c b \neq 0$

$\log_c^2 b = \log_c a^4$

$c^{\log_c(\log_c^2 b)} = b^{\log_c b}$

$a^4 = b^{\log_c b}$

Log

ЧИСТОВИК

$НОД(a,b,c)=14)$

$НОК(a,b,c)=2^{17}\cdot 7^{18}$

$a,b,c=2^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$

$\alpha\le 17, \beta\le 18$

$14=2\cdot 7$

$a=2\cdot 7, b=2^{17}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ $\alpha_i=1$ $\alpha_k=17$

β_1,β_2,β_3 $\beta_j=1$ $\beta_n=18$

$3\cdot 2\cdot 17\cdot 3\cdot 2\cdot 18$

$1, 17, n$

$2\cdot 7, 2^2\cdot 7^5, 2^3 7^{18} 17, 1, n$

$2^2\cdot 7^5, 2\cdot 7, 2^3\cdot 7^{18}$

$2, 2^2, 2^3$

$7, 7^5, 7^{18}$

$\alpha_1\le\alpha_2\le\alpha_3$

$\beta_1\le\beta_2\le\beta_3$

$6\cdot 15+3\cdot 2=$
$=616$

$2\ 2\ 2^{17}$
$2\ 2^{17}\ 2$
$2^{17}\ 2\ 2$ 3

$2\ 2^2\ 2^{17}$ 6

$2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, 2^{\alpha_3}$

7^{α}

$7, 7^{1,\dots,18}, 7^{18}$

3

$\frac{3\cdot 2}{2}\cdot 3=9$

$2\ 2^2\ 2^3$
$2\ 2^2\ 2^2$
$2\ 2^2\ 2$

$2^{\alpha}, 2^{\beta}, 2^{\gamma}; 2$

$7^a, 7^b, 7^c$

$2^{\alpha}, 2^{\beta}=2^{\gamma}$

2

$2^2\cdot 3^3$

$2\ 2^2\ 2$ V
$2\ 2^2\ 2^2$ V
$2\ 2\ 2^2$ V
$2\ 2^2\ 2^2$ —

$2^2\ 2\ 2$ V
$2^2\ 2\ 2^2$ V
$2\ 2\ 2^2$ —
$2^2\ 2\ 2^2$ —

$2\ 2^2\ 2$ —
$2^2\ 2^2\ 2$ V
$2^2\ 2^2\ 2$ —
$2^2\ 2\ 2$ —

6

$3\cdot 2\cdot 2$
$\frac{12}{2}=6$

2

ЧЕРНОВИК

$\boxed{3}$

$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}$ черновик

a, b, c

1) $a=b=c+1$

2) $a=c=b+1$

3) $b=c=a+1$

$2 \quad 2^{1,\dots,3} \quad 2^3$

$(a-b)(a-c)(b-c)(a-c-1)$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}$$

$\frac{x}{2}+1=1$ $\quad$ $\frac{x}{2}+1=-1$

$x=0$ $\quad$ $x=-1$

$\log$

$\frac{7x}{2} \neq \frac{21}{4}$

$2x=3$ $\quad$ $\frac{3x}{2} \neq 7$

$x=\frac{3}{2}$ $\quad$ $x \neq \frac{14}{3}$

$2\cdot 7$

$2^3 \cdot 7^3$

$\frac{3\cdot 2\cdot 3}{2}=9$

$\frac{7x}{2} > \frac{17}{4} \cdot \frac{2}{7}$ $\quad$ $\frac{x}{2}>-1$

$x>-2$

$x > \frac{34}{28}=\frac{17}{14}$

$\frac{3x}{2} \neq 6 \cdot \frac{2}{3}$

$x=$

$2 \quad 2^3$

$2 \quad 2^3$

$2 \quad 2^2 \quad 2^3$

$2 \quad 2 \quad 2^3$

$2 \quad 2^3 \quad 2^3$

$2, 2^{1\dots17}$ $\quad$ $2^{17} \cdot 6$

$2, 2^{17}, 2^{17}$ двойка

4

$\frac{1}{2}\log_{\cancel{a}b} a = \cancel{4}\log_a c$

$\frac{1}{2\log_a b} = 4\log_a c$

$\frac{1-4\log_a c\cdot\log_a b}{2\log_a b} = 0$

$4\log_a c\cdot\log_a b = 1$

$\log_a c\cdot\log_a b = \frac{1}{4}$

$\underbrace{\log_2 4}_{=2} + \underbrace{\log_2 16}_{=4} = \log_2 4\cdot 8$

$\frac{1}{2}\log_b a = \frac{4}{\log_c a}$

$\log_b a = \frac{8}{\log_c a}$

ЧЕРНОВИК

$2, 2^{1\ldots17}, 2^{17}$

$7, 7^{1\ldots18}, 7^{18}$

$2\cdot7, 2^{2}\cdot7^{3}, 2^{17}\cdot7^{18}$

$2^{2}\cdot7^{3}, 2\cdot7, 2^{17}\cdot7^{18}$

$2\cdot7, 2\cdot7^{2}, 2^{17}\cdot7^{18}$

$2\cdot7^{2}, 2\cdot7, 2^{17}\cdot7^{18}$

$$\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c$$

$$\frac{\frac{1}{2\log_b a} - 4\log_b c\cdot 2\log_b a}{} = 1$$

$$1-4\log_b c\cdot 2\log_b a = 2\log_b a$$

$$2\log_b a\,(1+4\log_b c) = 1$$

Черновик

$\frac{1}{2}\log$

$\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c$

$\frac{1}{2}\frac{\log_c b}{\log_c a} - \frac{4}{\log_c b} = 0$

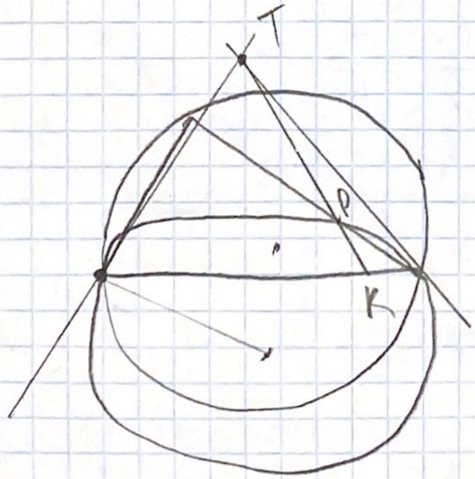
$\log_c^2 b - 4 = 0$

$\log_c b = \pm 2$

$\log_a b = 8\frac{\log_a c}{\log_a b}$

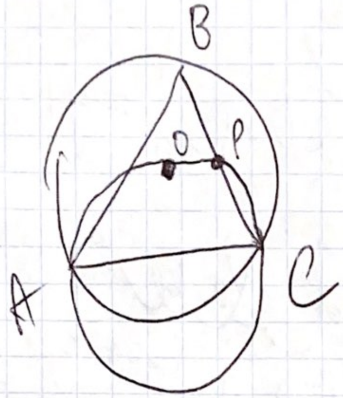
$\frac{8\log_a c - \log_a^2 b}{\log_a b} = 0$

$\log_a c^8 = \log_a^2 b$



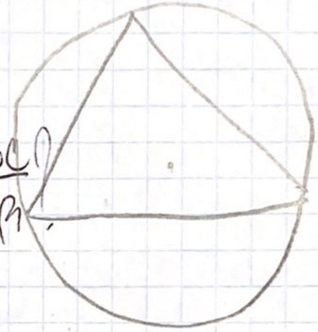
Черновик

7



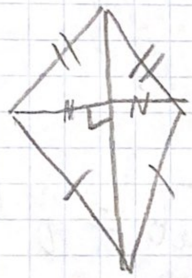
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 2\beta =$

$= AP \cdot PC \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = 12$

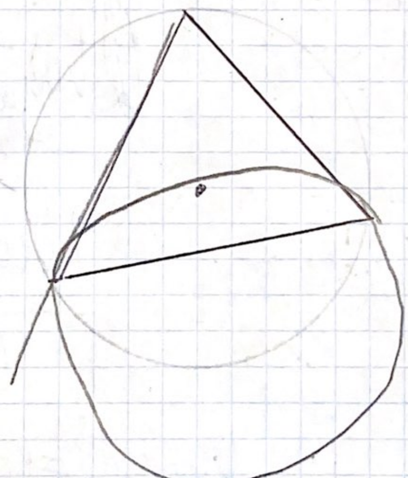


$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin\beta \, AB \cdot BC$

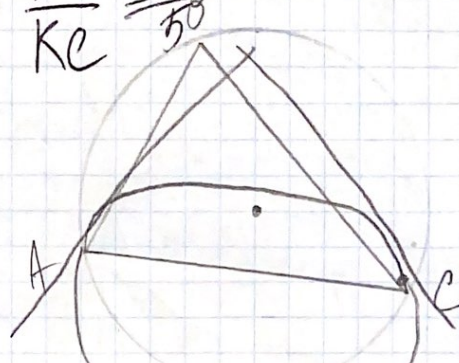
$S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha = \cancel{2pr} = \cancel{pr} = \frac{abc}{4R}$



$\frac{1}{2} ah$

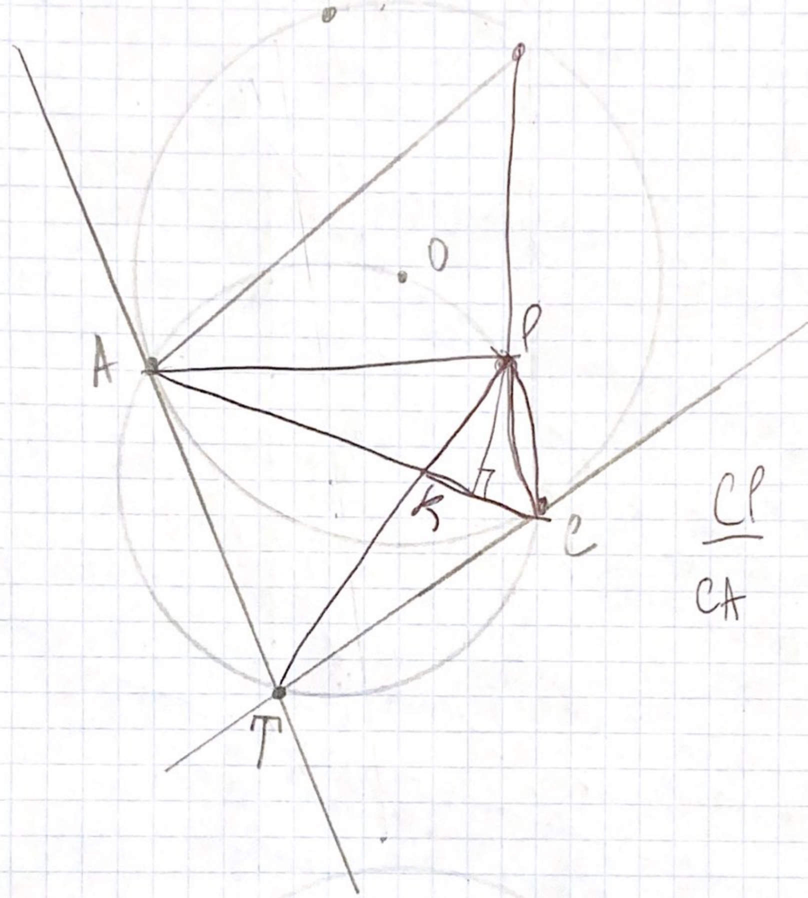


$\frac{S_{ADK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{7}{50}$

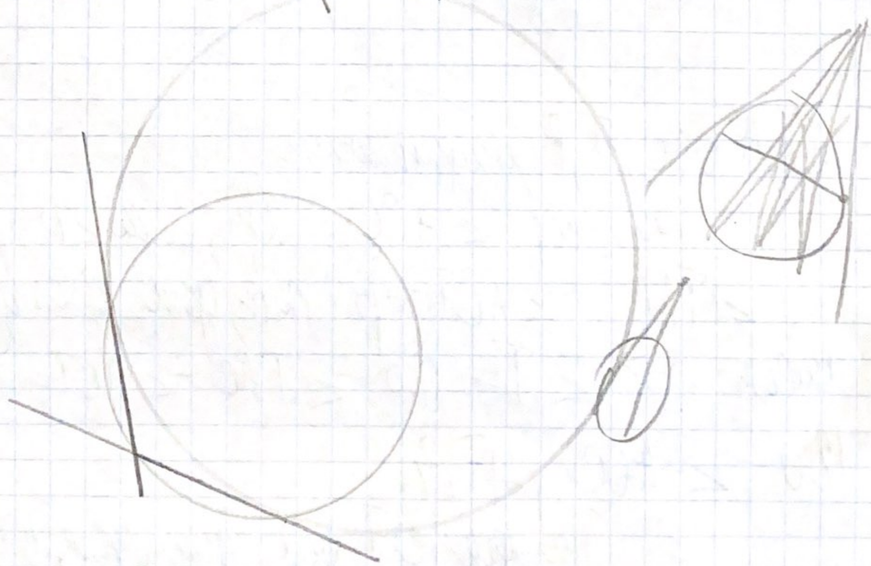


черновик

8



$\frac{CP}{CA}$



ЧЕРНОВИК

9