Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101221**

ID профиля: **57218**

Вариант 22

Чистовик

№1

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > S-24 \\ a_{11} a_{12} < S+4 \end{cases}$$

$(a_1+6d)(a_1+15d) > S-24$

$a_1^2+21d\overset{\cdot a_1}{\vphantom{x}}+90d^2 > 15a_1+105d-24$

$(a_1+10d)(a_1+11d) < S+4$

$a_1^2+21d\overset{\cdot a_1}{\vphantom{x}}+110d^2 < 15a_1+105d+4$

$a_1^2+(21d-15)a_1+90d^2 > 105d-24$ (1)

$a_1^2+(21d-15)a_1+110d^2 < 105d+4$ (2)

из (1): $a_1^2+(21d-15)a_1+90d^2-105d+24>0$

из (2): $-a_1^2-(21d-15)a_1-110d^2+105d+4>0$

сложим последние 2, получим:

$28-20d^2>0$

$-\sqrt{\frac{7}{5}}<d<\sqrt{\frac{7}{5}}$

т.к. все a_n целые, то d - целое, а т.к. прогрессия возраст., то $d>0 \Rightarrow d=1$, подставим в (1) и (2)

1

Чистовик

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \qquad (a_1+3)^2>0 \Rightarrow a_1\neq -3 \quad (3)\\ a_1^2+6a_1+1<0\end{cases}$$

$D=36-4=32$

$a_1=\frac{-6+\sqrt{32}}{2}=\sqrt{8}-3$

$a_1=-\sqrt{8}-3$ $\qquad a_1\in(-\sqrt{8}-3;\ \sqrt{8}-3)$

из целых $a_1=-5;-4;-3;-2;-1$, но из (3) $a_1\neq-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $a_1=-5;-4;-2;-1$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 50 \quad (1)\\ (a^2+b^2)\le \min(14a+2b,\ 50) \quad (2)\end{cases}$$

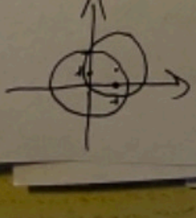
из (2): $\begin{cases} a^2+b^2\le 50 \quad (3)\\ a^2+b^2\le 14a+2b \quad (4)\end{cases}$

из (4): $a^2-14a+49-49+b^2-2b+1-1\le 0$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

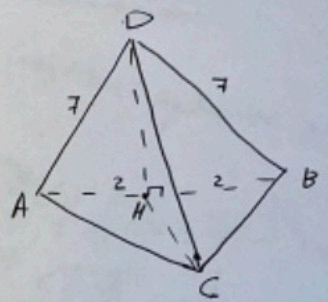
На плоскости O_{ab} круг с центром $(7;1)$ и $R=\sqrt{50}$

Множество, заданное (2) на плоскости O_{ab} – это пересечение двух кругов, оба радиуса $\sqrt{50}$



2

N2



В р/б $\triangle ADB$ высота DH еще и медиана, аналогично в р/б $\triangle ACB$ высота CH еще и медиана, тогда $AH = HB = \frac{AB}{2} = 2$, причём $AB \perp$ плоскости DHC, т.к. $AB \perp HC$, $AB \perp DH$

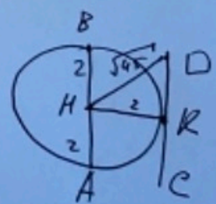
т.к. точки C и D лежат на бок. поверхн. цилиндра и $CD \parallel$ его оси, то CD лежит на образующей бок пов-сти цилиндра.

т.к. $AB \perp CDH$, то $AB \perp CD$, т.е. AB лежит в плоскости $\perp$ оси

Проведём сечение ~~через~~ цилиндра этой плоскостью, параллельный осн. цилиндра, это круг, AB - его хорда т.к. $AB = 4$, то радиус осн. цилиндра $r \geq \frac{AB}{2}$, т.к. хорда $\leq$ диаметра.

поэтому наименьший возможный радиус $r = 2$

CD либо пересекает плоскость α в точке K, либо не пересекает и C ближе к D (2 случай)



D не может быть ближе к α, т.к. $AD > AC$

1 случай: (пересеч. в $CD \exists c \alpha$): у прямоуг. $\triangle ADH$: $DH = \sqrt{49-4} = \sqrt{45}$

тогда т.к. $HK = r = 2$ (т.к. $DC \perp \alpha$, $\Rightarrow DC \perp HK$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у прямоуг. $\triangle DHK$: $DK = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

Аналогично $KC = \sqrt{24-4} = \sqrt{20} \Rightarrow DC = \sqrt{41} + \sqrt{20}$

2 случай: DC не пересек α, C ближе к α

3

21101221 (U57218 M1300921)

Чистовик

пусть K_2 – точка пересеч. прямой DC с плоскостью α

тогда из $\triangle HCK_2$: $CK_2 = \sqrt{24-4} = \sqrt{20}$

$DK_2 = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$ из $\triangle HCK_2$:

, тогда $DC = \sqrt{41} - \sqrt{20}$

~~Ответ: $\sqrt{41} + \sqrt{20}$ или $\sqrt{41} - \sqrt{20}$~~

Ответ: $\sqrt{41} + \sqrt{20}$ или $\sqrt{41} - \sqrt{20}$

4

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101221**

ID профиля: **57218**

Вариант 22

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 14 = 2\cdot 7 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

1) По условию: $a = 2^{x_1}\cdot 7^{y_1}$, $b = 2^{x_2}\cdot 7^{y_2}$, $c = 2^{x_3}\cdot 7^{y_3}$, где хотя бы одно $x_i = 1$ и хотя бы одно $y_i = 1$, иначе $\text{НОД}(a;b;c) \neq 14$, так же хотя бы одно $x_i = 17$ и хотя бы одно $y_i = 18$, иначе $\text{НОК}(a;b;c) \neq 2^{17}\cdot 7^{18}$

2) способов выбрать одно из x_1, x_2, x_3, такое, чтобы $x_i = 1$ (3 способа), из оставшихся выбираем $x_j = 17$ (2 способа), оставшийся x может принимать любое значение от 1 до 17. Итого способов $3\cdot 2\cdot 17 = 102$. Аналогично для y: $y_i = 1$ (3 способа), $y_i = 18$ (2 способа) и последний может принимать значения от 1 до 18. Итого: $3\cdot 2\cdot 18 = 108$

Теперь перемножаем способы выбрать x и y: $102\cdot 108$, но при таком подсчёте будут тройки чисел, учтённые более 1 раза.

можно выбрать $\underbrace{3\cdot 2}_{\text{выбор } x_i}\cdot\underbrace{3\cdot 2}_{\text{выбор } y_i}$ способами, каждая такая тройка при подсчёте в $1^{\text{ом}}$ пункте учтена 4 раза $\Rightarrow$ кол-во разных $(a;b;c)$ равно

1

Чистовик

$102 \cdot 108 - 3 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 =$

$= 11016 - 540 - 576 - 18 = 9792$

Ответ: 9792

2

N5 чистовик

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}{\ln\frac{x}{2}+1}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=4\frac{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\frac{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}$$

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_a b=n$$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=4\log_b c=y$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\log_c a=z$$

перемножим все 3:

$$\frac{1}{2}\log_a b\cdot 4\log_b c\cdot 2\log_c a=4=nyz$$

1) если $n=y$ и $z=n-1$, тогда:

ОДЗ:

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\neq 1$

$x\neq 0;-4$

$\frac{x}{2}+1>0$

$x>-2$

$\frac{7x}{2}>\frac{17}{4}$

$x>\frac{17}{14}$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1$

$x\neq\frac{3}{2}$

$\frac{3x}{2}-6>0$

$x>4$

$\frac{3x}{2}-6\neq 1$

$x\neq\frac{14}{3}$

$x>4$ $x\neq\frac{14}{3}$

3

Чистовик

$n \cdot n \cdot (n-1) = 4$

$n^3 - n^2 = 4$

$n = 2$

$$\frac{n^3 - n^2}{n-2} = n^2 + n + 2$$

$n^2 + n + 2 = 0$ $D < 0 \Rightarrow n = \varnothing$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right) = 2$$

$$\frac{x}{2} + 1 = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$$

$2x + 4 = 14x - 17$

$12x = 21$

$x = \frac{21}{12}$ не подходит по ОДЗ

~~Аналогично для случаев y=z и z=n~~

Аналогично для случаев $y = z$ и $z = n$

$y = 2$

с учетом ОДЗ

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2} - 6\right)^2 = 2$$

$$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = \left(\frac{3x}{2} - 6\right)^2$$

$$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = \frac{9x^2}{4} - 18x + 36 \Big| \cdot 4$$

$9x^2 - 72x - 14x + 144 + 17 = 0$

$9x^2 - 86x + 161 = 0$

$D = 1600$

$x_1 = 7$ ответ

$x_2 = \frac{23}{9}$ не подходит по ОДЗ

4

Чистовик

$Z = 2$
с учётом ОДЗ

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2$$

$$\frac{3x}{2}-6 = \frac{x}{2}+1 \quad \Big|\cdot 2$$

$$3x-12 = x+2$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$ ответ.

Ответ: 7

5

N5

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 = 4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right) = 4\,\frac{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2\,\frac{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\ln\left(\frac{3x}{2}-6\right)}$$

$\ln\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = a$

$\ln\left(\frac{x}{2}+1\right) = b$

$\ln \frac{3x}{2}-6 = c$

$$\frac{\cancel{a}}{\cancel{2b}} \cdot \frac{4\cancel{c}}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{2b}}{\cancel{c}} = 4$$

$x \cdot x \cdot (x-1) = 4$

$x^3 - x^2 = 4$

$x^2(x-1) = 4$

$x = 2$

$x^2 + x + 2$

$D = 1 -$

$D < 0 \quad x = \varnothing$

$x^3 - x^2 \mid x-2$

$-\; x^3 - 2x^2 \mid x^2 + x$

x^2

$-x$

$$\begin{cases} \frac{a}{2b} = \frac{4c}{a} \\ \frac{2b}{c} = \frac{a}{2b} - 1 \quad \frac{2b}{c} = \frac{a-2b}{2b} \end{cases}$$

$a^2 = 8bc$

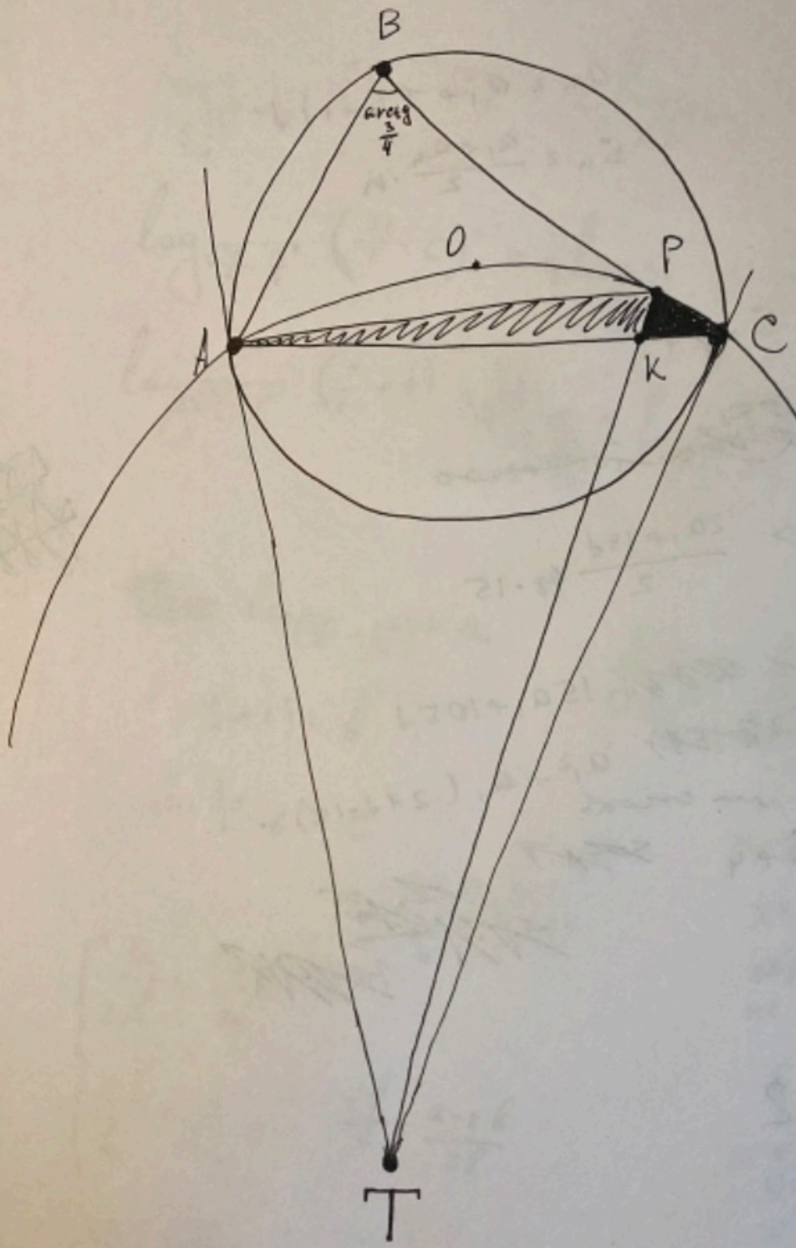
$4b^2 = ac - 2cb \quad |\cdot 4$

$16b^2 = 4ac - 8bc$

$16b^2 - 4ac + a^2 = 0$

$a^2 - 4ac + 16b^2$

$D = 16c^2$



$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$

$\frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$