Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101138**

ID профиля: **161993**

Вариант 22

Черновик

Номер задачи - ответ — Номер страницы - Чист или Черн

$a_1 < a_2 < \ldots$ $\in \mathbb{Z}$

$a_i = a_{i-1} + b$

$S = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 14b) \cdot 15}{2} = (a_1 + 7b) \cdot 15 = 15a_1 + 105b$

$219 \,|\, 3$, 73

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S - 24 \\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 6b)(a_1 + 15b) = a_1^2 + 21a_1 \cdot b + 90b^2 + 28 > S \cancel{+24} + 4 \\ (a_1 + 10b)(a_1 + 11b) = a_1^2 + 21a_1 b + 110b^2 < S + 4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$-90b^2 - 28 < \ldots < -110b^2$

$-90b^2 - 28 < -110b^2$

$20b^2 < 28$

$110b^2 < 90b^2 + 28$

$20b^2 < 28$

$b^2 < \frac{28}{20} = 1{,}4$

$\boxed{b \in \{-1; 0; 1\}}$ $\wedge 1{,}5$

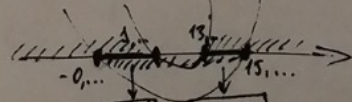
Пусть $b = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$

$S = 15a_1$

$$\begin{cases} a_1^2 > 15a_1 - 24 \\ a_1^2 < 15a_1 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 - 15a_1 + 24 > 0 \\ a_1^2 - 15a_1 - 4 < 0 \end{cases}$$

$D = 225 - 96 = 129 \longrightarrow a_1 = \frac{15 \pm \sqrt{129}}{2} \approx 1{,}\ldots;\ 13{,}\ldots$



$\boxed{0;1}$ $\boxed{14,15}$

$D = 225 + 16 = 241 \dashrightarrow a_1 = \frac{15 \pm \sqrt{241}}{2} \approx -0{,}\ldots;\ \approx 15{,}\ldots$

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b,\ 50)\end{cases}$$

Любой круг, где вн. окр-сть — с центром $(a;b)$ и радиусом $5\sqrt{2}$.

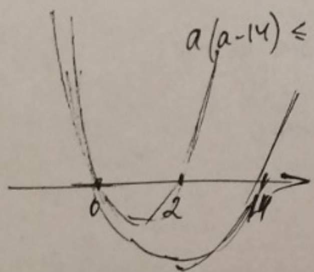
Если

$14a+2b<50$

$7a+b<25$

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 14a+2b\\ 7a+b<25\end{cases}$$

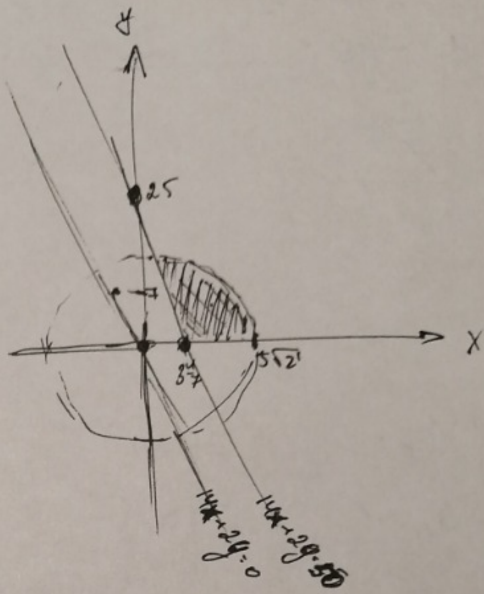
$a(a-14) \le b(2-b)$



$14a+2b \ge 50$

$7a+b \ge 25$

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 50\\ 7a+b>25\end{cases}$$



$7a+b=25$

$b=-7a+25$

$\frac{25}{7}=3\frac{4}{7}$

$7a+b=0$

$b=-7a$

$a^2+b^2 \le 50$

Центр $(0;0)$

$\sqrt{a^2+b^2} \le 5\sqrt{2}$

$\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\right)' =$

$a^2+b^2 \le 14a+2b$

$a \ge 14$ $a<14$ $14a>a^2$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$a = 2R\cdot\sin\alpha$

$R = \frac{abc}{4\cdot S}$

$\Updownarrow$

$S = \frac{abc}{4R}$

$2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma =$

$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$

$\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot\sin\beta\cdot 2R\cdot\sin\gamma\cdot\sin\alpha \leftarrow \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\alpha = S$

21101138 (U161993 M1303710)

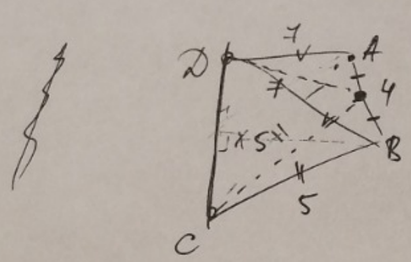
Пусть $b = 1$. $\to$ $a_1,\ a_1+1,\ a_1+2 \ldots$

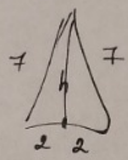
Черновик

$S = 15a_1 + 105$

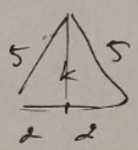
$$\begin{cases} (a_1+6)(a_1+15) = a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 + 24 \\ (a_1+10)(a_1+11) = a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases}$$

...





$h = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$



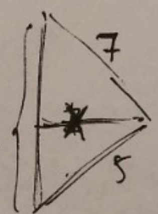
$k = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$p \cdot r = S$

4

$x > 2$

$$r = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2-4}\cdot 4}{x+2} = \frac{2\cdot\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}{x+2} = 2\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$



$y < 12$

$\sqrt{25-z^2} + \sqrt{49-z^2}$

$3\sqrt{5} + \sqrt{21} < y < 12$

$3\cdot 2, \ldots \quad 4, \ldots$

31
36
36
216
108
1296

211
4
844

1296
844
452 $\to 4\cdot 113$

219
4
876

1296
876
420 $\to 4\cdot 105$

Чистовик

Задача 1

Вариант 22, 11 класс

Заметим, что раз все члены прогрессии целые числа, то и шаг прогрессии $\underline{b}$ – целое число.

$$S = \frac{(a_1+a_{15})\cdot 15}{2} = \frac{(a_1+(a_1+14b))\cdot 15}{2} = (a_1+7b)\cdot 15 =$$

$$= \underline{15a_1 + 105b}.$$

Запомним это. Преобразуем выражения из условия:

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{16} > S-24 \\ a_{11}\cdot a_{12} < S+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+6b)(a_1+15b) > S-24 \\ (a_1+10b)(a_1+11b) < S+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21b\cdot a_1 - S > -90b^2 - 24 \\ a_1^2 + 21b\cdot a_1 - S < -110b^2+4 \end{cases} \Rightarrow -90b^2 - 24 < -110b^2 + 4$$

$$20b^2 < 28$$

$\boxed{b^2 < 1{,}4}$ → т.к. b – целое, то $b \in \{-1; 0; 1\}$, ведь $|b| < \sqrt{1{,}4} < 1{,}2$.

Тогда переберем эти три b и посмотрим, какие могут быть a_1.

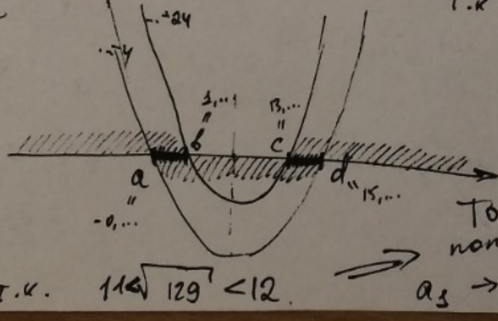
(1) $\underline{b=0}$

Тогда $S = 15a_1 + 0 = 15a_1 \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 0 - 15a_1 > 0-24 \\ a_1^2 + 0 - 15a_1 < 0+4 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 - 15a_1 + 24 > 0 \\ a_1^2 - 15a_1 - 4 < 0 \end{cases}$$

→ Это две параболы, смещенные относительно друг друга по вертикали (у обеих точно есть корни, т.к. $D>0$).

Решением системы будут два отрезка.



$$a \text{ и } d = \frac{15 \pm \sqrt{225+16}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 15 < d < 16$ и $-1 < a < 0$, т.к. $15 < \sqrt{225+16} < 16$.

b и $c = \dfrac{15 \pm \sqrt{225-96}}{2} \Rightarrow 13 < c < 14$ и $1 < b < 2$, т.к. $11 < \sqrt{129} < 12$.

Тогда целые, попадающие в ответ $a_1 \to \boxed{0; 1; 14; 15}$.

Чистовик

Задача 1, продолжение

Вариант 22, 11 класс

(2) $b = 1$.

Тогда $S = 15a_1 + 105$ и

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

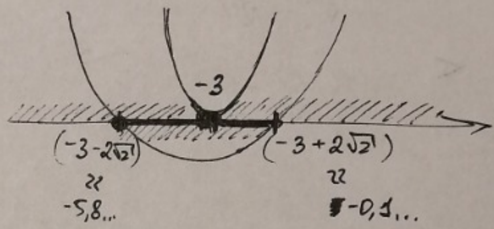
Опять имеем две параболы. Одна касается оси в одной точке, у другой два корня, т.к. $D > 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

$D = 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2$

$\Downarrow$

$a_1 = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$



$\boxed{2\sqrt{2} \approx 2{,}8\ldots}$

Тогда подходящие целые $a_1 \longrightarrow \boxed{-5;\ -4;\ -2;\ -1}$.

(-3 в ответ не попадает!). $(-3+3)^2 \not> 0$

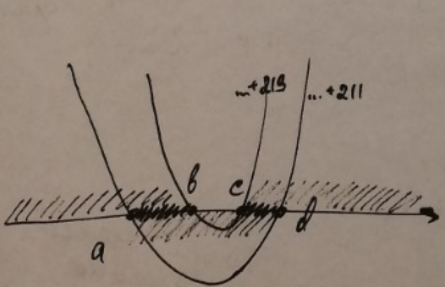
(3) $b = -1$

Тогда $S = 15a_1 - 105$ и

$$\begin{cases} a_1^2 - 21a_1 + 90 > 15a_1 - 105 - 24 \\ a_1^2 - 21a_1 + 110 < 15a_1 - 105 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 - 36a_1 + 219 > 0 \longrightarrow D = 36^2 - 219 \cdot 4 = 1296 - 876 = 420 = 4 \cdot 105 \\ a_1^2 - 36a_1 + 211 < 0 \longrightarrow D = 36^2 - 211 \cdot 4 = 1296 - 844 = 452 = 4 \cdot 113 \end{cases}$$

Опять две параболы:



$\Downarrow$

$a = \frac{36 - 2\sqrt{113}}{2} = 18 - \sqrt{113} \longrightarrow 7 < a < 8$

$d = \frac{36 + 2\sqrt{113}}{2} = 18 + \sqrt{113} \longrightarrow 28 < d < 29$

$b = \frac{36 - 2\sqrt{105}}{2} = 18 - \sqrt{105} \longrightarrow 7 < a < 8$

$c = \frac{36 + 2\sqrt{105}}{2} = 18 + \sqrt{105} \longrightarrow 28 < c < 29$.

Тогда получаем, что в ответе не будет ни одного целого числа, т.к. отрезки-ответы целиком лежат внутри отрезков $[7;8]$ и $[28;29]$.

$\Downarrow$

При $b=1$, подходящих a_1 нет.

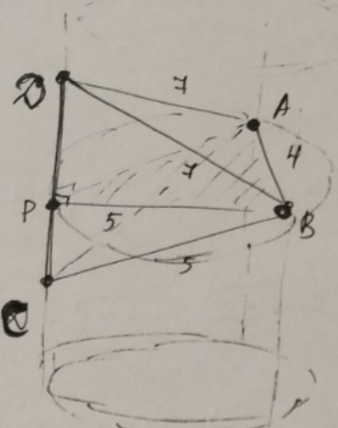
Тогда все возможные a_1 – найденные для $b=-1$ и $b=0$.

Ответ: $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1; 0; 1; 14; 15\}$

Чистовик

Задача 2

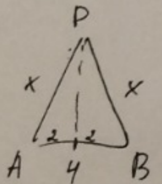
Вариант 22, 11 класс



Радиус описанного цилиндра определяется $\triangle PAB$, где $PB \perp DC$ и $PA \perp DC$: тогда этот треугольник лежит в плоскости $\parallel$ основаниям цилиндра, т.к. эта плоскость $\perp CD$, а $CD \parallel$ оси. При этом $\triangle PAB$ – вписанный в окр-сть, равную окр-сти основания цилиндра, т.к. A и B принадлежат цилиндру по условию, а $P \in CD$, $CD \in$ цилиндру, т.к. C и D принадлежат. Т.е. на самом деле радиус цилиндра – это радиус описанной вокруг $\triangle PAB$ окружности.

$$R_{оп.} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S} \longrightarrow$$ Пусть $PB = PA = x$ ($PB = PA$, т.к. это высоты в равных по трем сторонам $\triangle DAC$ и $\triangle DBC$).

Тогда $$R_{оп} = \frac{x^2 \cdot 4}{4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{x^2-4}\right)} =$$



$$= \frac{x^2}{2 \cdot \sqrt{x^2-4}} \longrightarrow$$ $\underline{x > 2}$, иначе $\triangle PAB$ - вырожденный или не существует вовсе.

Возьмем производную, чтобы найти минимум:

$$\left(\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2x \cdot \sqrt{x^2-4} - x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-4}} \cdot 2x}{x^2-4}\right) =$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{x^2-4} - \frac{x^3}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{2x(x^2-4) - x^3}{(x^2-4) \cdot 2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x^3 - 8x}{(x^2-4) \cdot 2\sqrt{x^2-4}}$$

Производная равна 0 ~~[illegible]~~ при $\boxed{x = 2\sqrt{2}}$,

~~[illegible]~~ ($x = 0$ не подходит: $x^2 - 4 < 0$)

В этом случае $R_{оп}$ примет минимальное значение при $x = 2\sqrt{2}$.

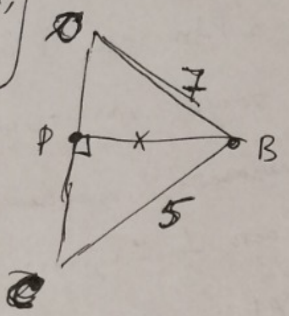
Чистовик

Задача 2

Вариант 22, 11 класс

Тогда посчитаем CD.

$PB = x$ – высота $\triangle BCD$.



Тогда $CD = PD + PC = \sqrt{49 - x^2} + \sqrt{25 - x^2} =$

$= \sqrt{49 - 8} + \sqrt{25 - 8} = \underline{\underline{\sqrt{41} + \sqrt{17}}}$

Ответ: $CD = \sqrt{41} + \sqrt{17}$.

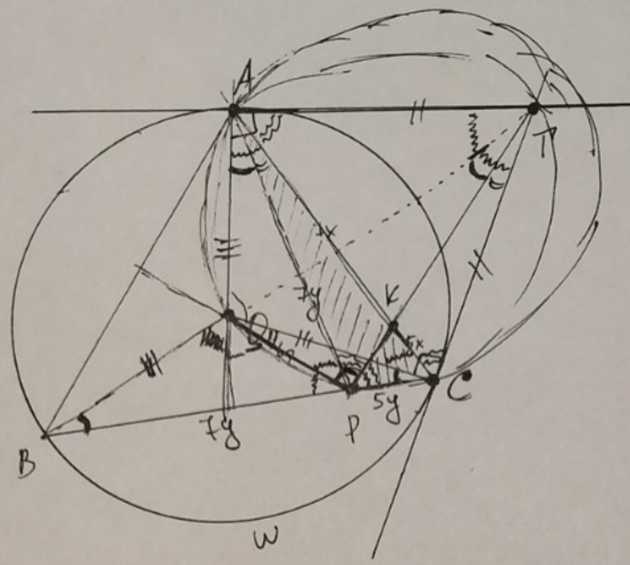
Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101138**

ID профиля: **161993**

Вариант 22



$3\xi + \xi = 90^\circ$

$S_{APK} = 7$, $S_{CPK} = 5$ } $S_{APC} = 12$

$S_{ABC} = ?$

($\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \Rightarrow AC = ?$)

AOPC – впис. ⟹ A, O, P, C, T – все на одной!

AOCT – впис.

$$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{PC}{BC} \to \boxed{S_{ABC} = \frac{12 \cdot BC}{PC}}$$

$$\boxed{\frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}}$$

$$\frac{KP \cdot PC}{KP \cdot AP} = \frac{5}{7} \to \boxed{\frac{PC}{AP} = \frac{5}{7}}$$

$BH \cdot AC$ • $PH' \cdot AC$

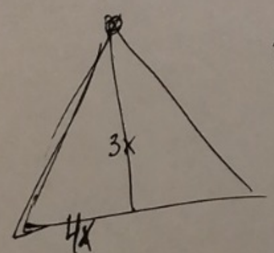
Черновик

$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}t^2 = 2t$

$3 - 3t^2 = 8t$

$3t^2 + 8t - 3 = 0$

$D = 64 + 36 = 100$



$t =$

Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 14 = 2\cdot 7 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

a, b и c $- 2^k \cdot 7^p$

2^k 7^p
$2^{\dots}$ $7^{\dots}$
$2^{\dots}$ $7^{\dots}$

min → в НОД
max → в НОК

$$\begin{cases} \cancel{a\cdot b\cdot c = 2^{18}\cdot 7^{19}} \\ \text{у всех } k \geq 1,\ p \geq 1 \\ \text{у всех } k \leq 17,\ p \leq 18 \end{cases}$$

$27 = 3\cdot 3\cdot 3$
$36 = 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2$
$45 = 3\cdot 3\cdot 5$

НОД $= 3^2$
НОК $= 3^3\cdot 2^2\cdot 5 =$
$= 180\cdot 3$

$k \to$ от 1 до 17
$p \to$ от 1 до 18

~~17·18 = 2 кол-во вариантов~~

2^1, 2^{17}, 7^{18}, 7^1, 2^k, 7^p

6 перестановок

$k \to$ от 1 до 17
17 вар-ов

$p \to$ от 1 до 18
18 вар-ов

2^1 7^1
2^{17} 7^{18}
2^{17} 7^1

2^1
2^{17}
2^k

$17\cdot 16 =$
$= 17\cdot 16 + 34 =$
$= 15\cdot 16 + 32 + 34$

$$6\cdot[17\cdot 18] =$$

[Аккуратно пересчитать варианты!]

1 ... 17
1 ... 18

2^1 7^1
2^{17} 7^1
2^1 7^1

$15\cdot 16 + 30 + 32 + 4$

$(15+2)(16+2) =$
$= 15\cdot 16 +$

$9\cdot 4\cdot 15\cdot 16$

$(16+1)(15+1) =$
$= 16\cdot 15 + 16 + 15 + 1$

$7^{18} - 2^1$
$7^1 - 2^{17}$

2

$7^{18} - 2^{17}$
$7^1 - 2^1$

34
36

21101138 (U161993 M1303711)

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\left(\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\log_{a^2} b$, $\log_{\sqrt{b}} c^2$, $\log_{\sqrt{c}} a$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{x}{2}+1 \\ b &= \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \\ c &= \frac{3x}{2}-6 \end{aligned}}$$

$\log_{a^2} b \cdot \log_b a = \frac{1}{2}$

$\boxed{\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\cdot \log_a b}$

$\frac{1}{2}\log_a b$; $4\log_b c$; $2\log_c a$

(1)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}\left(\frac{3x}{2}-6\right) & (1) \\ \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 1 + 2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}\left(\frac{x}{2}+1\right) & (2) \end{cases}$$

$\log_{\sqrt{b}} c \cdot \log_c \sqrt{b} = 1$

$\boxed{\log_{\sqrt{b}} c = 2\log_b c}$

$\log_x y + 1 = \log_x y + \log_x x =$

$= \log_x (xy)$

(1) $\frac{1}{2}$ 1

$\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c$

~~$\frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c$~~

$\log_a b = 8\log_b c$

Черновик

Чистовик

Задача 4

Вариант 22

11 класс

Заметим, что в НОД входят все простые множители трех чисел в минимальной встречающейся степени, а в НОК - наоборот, в максимальной

[возможно даже и в 0]

Значит, раз в НОК $(a;b;c)$ простые множители — 2 и 7, то

a, b и c имеют вид $2^k \cdot 7^m$, где k и $m \in \mathbb{N}$ — именно $\mathbb{N}$, т.к. в НОД видим $14 = 2 \cdot 7$, т.е. во всех трех числах 2 и 7 стоят в степени ≥ 1.

Тогда, по сути, необходимо найти три пары подходящих k и m. Раз в НОД видим $2 \cdot 7$, то хотя бы в одном числе $k = 1$ и хотя бы в одном $m = 1$ (иначе НОД был бы другим). Аналогично, из НОК, хотя бы в одном числе $m = 18$ и $k = 17$. Оставшиеся же неопределёнными k и m могут изменяться в промежутке от 1 до 17 и от 1 до 18 соответственно. Т.е. имеем $2; 2^{17}; 2^k$ $(1 \leq k \leq 17)$; $7; 7^{18}; 7^m$ $(1 \leq m \leq 18)$, из которых надо „собрать" три числа. Вариантов выбрать k у нас 17, m — 18, это независимые выборы $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ всего „наборов" множителей в степенях — $\underline{17 \cdot 18}$.

Далее, чтобы „собрать" тройку (a, b, c) будем выбирать один вариант из 2 в степени и один из 7 в степени.

При $1 < k < 17$ и $1 < m < 18$, в $15 \cdot 16$ случаях, все степени различны $\Rightarrow$ результаты перемножения точно будут отличаться при выборе различных пар. Тогда всего троек (с условием того, что $(a;b;c)$ и $(b;a;c)$ — это разные тройки) — $[3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1] \cdot 15 \cdot 16 = \underline{9 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 16}$

При $k=1$ или $k=17$ и $1<m<18$, в $2 \cdot 16 = 32$ случаях,

все 7 в степенях будут различны, однако возникнет повтор в 2 в степенях. Тогда вариантов троек будет $\left[\frac{3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1}{2}\right]\cdot 32 = \underline{9\cdot4\cdot16}$

Из-за повторов, возникающих из-за одинаковых степеней 2

Аналогично для $m=1$ или $m=18$, $1<k<17$, вариантов троек будет $\left[\frac{3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1}{2}\right]\cdot 30 = \underline{9\cdot4\cdot15}$

При ($k=1$ или $k=17$) и ($m=1$ или $m=17$) — таких ~~вари~~ случаев всего 4 — набор множителей будет выглядеть как $2^a, 2^b, 2^b, 7^c, 7^d, 7^d$ (a, b, c и d - необязательно все различные, но $a\neq b$, $c\neq d$). Тогда можно получить тройку чисел $2^a\cdot7^c, 2^b\cdot7^d, 2^b\cdot7^d$, из которой можно составить $\underline{3}$ упорядоченные тройки; или получить тройку $2^a\cdot7^d, 2^b\cdot7^c, 2^b\cdot7^d$, из которой получить $\underline{6}$ упорядоченных троек, т.к. все три числа различны. Итого — $(6+3)\cdot4 = \underline{9\cdot4}$

Тогда всего упорядоченных троек — $9\cdot4\cdot(15\cdot16+16+15+1) =$
$= 9\cdot4\cdot17\cdot16 = 36\cdot17\cdot16 = \underline{\underline{9792}}$.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\, 17 \\ \hline 252 \\ 36 \\ \hline 612 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 612 \\ \times\, 16 \\ \hline 3672 \\ 612 \\ \hline 9792 \end{array}$$

Ответ: 9792 тройки.

Чистовик

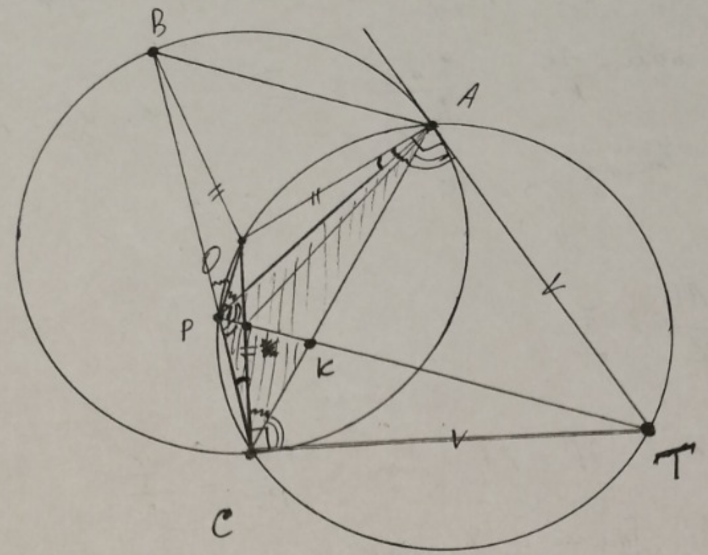
Задача 4 (продолжение)

Вариант 27, 11 класс

Чистовик

Задача 6

Вариант 22
11 класс



$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$

$S_{ABC} = ?$

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \Rightarrow AC = ?$

Во-первых, заметим, что из условия A, O, C и P лежат на одной окр-сти; однако из равенства углов $\angle OAT$ и $\angle OCT$ (оба прямые, т.к. это углы между радиусами и касательными) следует, что и A, O, C и T лежат на одной окр-сти. Вокруг $\triangle AOC$ можно описать единственную окр-сть $\Rightarrow$ A, O, C, P и T лежат на одной окр-сти.

Тогда:

1) $\angle OAP = \angle OCP \Rightarrow \angle OAP = \angle OBP$, т.к. $\triangle OBC$ – равнобедренный.

2) $\angle OPA = \angle OCA$, $\angle OCA = \angle OAC$ ($\triangle OAC$ - равнобедренный), $\angle OAC = \angle OPB$ (внешний для вписанного 4-ника) $\Rightarrow \angle OPA = \angle OPB$.

Отсюда $\triangle OPA = \triangle OPB$ по двум углам и общей стороне $\Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{PB = PA}$.

Заметим, что PK – биссектриса $\triangle APC$. Действительно, $\angle APK = \angle APT = \angle ACT$, $\angle KPC = \angle TPC = \angle TAC$, а $\angle ACT = \angle TAC$, т.к. $\triangle ATC$ – равнобедренный (отрезки кас-ых равны).

Чистовик

Задача 6 (продолжение)

Вариант 22

11 класс

Страница 4

Тогда $\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$ (по свойству биссектрис.).

При этом $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{AKP}}{S_{CPK}} = \frac{7}{5}$, т.к. у $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ общая высота к AC.

$$\Downarrow$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{7}{5}.$$

Но как мы знаем, $AP = BP \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{7}{5}$.

[высота из A на BC]

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2} h \cdot (BP + PC) = \left[\frac{1}{2} h \cdot PC\right] \cdot \left(\frac{7}{5} + 1\right) =$

$= S_{APC} \cdot \frac{12}{5} = \left(S_{APK} + S_{CPK}\right) \cdot \frac{12}{5} = \frac{(7+5) \cdot 12}{5} = \frac{144}{5} = \boxed{28,8}$.

~~Если известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, то $tg \angle ABC = \frac{3}{4}$. Введем универсальную замену~~

Ответ: а) $S_{ABC} = 28,8$