Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101132**

ID профиля: **327899**

Вариант 22

Чистовик №1 Вариант №22

Пусть d — шаг, тогда $a_i = a_1 + (i-1)\cdot d$

$S = \sum_{i=1}^{15} a_i = 15\cdot a_1 + 105\cdot d$

$a_7 a_{16} = (a_1+6d)(a_1+15d) = a_1^2 + 21a_1d + 90d^2$

$= a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > S - 24 = 15a_1 + 105d - 24$

$a_{11}a_{12} = (a_1+10d)(a_1+11d) =$

$= a_1^2 + 110d^2 + 21a_1d < S + 4 = 15a_1 + 105d + 4$

Итого

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24; & (1) \\ a_1^2 + 110d^2 + 21a_1d < 15a_1 + \cancel{125d} + 105d + 4; & (2) \end{cases}$$

Вычтем почленно из (1) (2)

$$\begin{cases} -20d^2 > -28; \\ d^2 < 1{,}25; \end{cases}$$

Прогрессия

Состоит из следующих целых чисел =>

=> $d = 1$, тогда $\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24; \\ a_1^2 + 110 + 21a_1 < 15a_1 + 105 + 4; \end{cases}$

21101132 (U327899 M1303822)

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1>-9; \\ a_1^2+6a_1<-2; \end{cases} \Rightarrow \quad a_1(a_1+6)= \left[\begin{array}{l} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \\ -8 \end{array}\right.$$

Числовым №2

Очевидно, a_1 принимает зн-я в области от -1 до -5, т.к. иначе $a_1(a_1+6)$ не будет отрицательно;

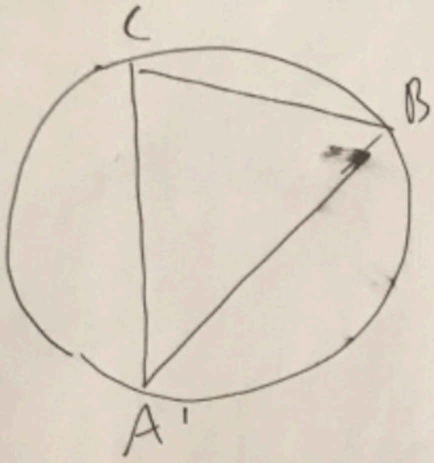
Проверим: $a_1($

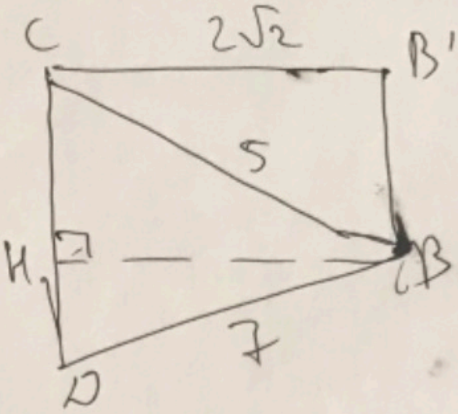
$$a_1(a_1+6)= \left[\begin{array}{l} a_1=-1; -5; \\ a_1=-2; -8; \\ a_1=-3; -9; \\ a_1=-4; -8; \\ a_1=-5; -5; \end{array}\right. \Rightarrow a_1 = \left[\begin{array}{l} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -5 \end{array}\right.$$

Ответ: $-1; -2; -4; -5$

21101132 (U327899 M1303822)

Чистовик N3





1) $\angle BCB' = 90^\circ - \angle DCB \Rightarrow \angle BCB' = \angle ACA' =$

$= CB' = CA'$

$(CA = CB)$

2) В $\triangle CB'A'$: $A'B'$ – диам. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C = 90^\circ$, но ещё $CA' = CB' \Rightarrow$

$\Rightarrow CA' = CB' = \dfrac{A'B'}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

3) $CB' = 2\sqrt{2}$ показывает, что

$\angle B'C$ –

Проведём $BH \perp CD \Rightarrow \angle HBB' = 90^\circ$,

т.к. $BB' \parallel CD \Rightarrow$ все углы в $CB'BH = 90^\circ \Rightarrow$

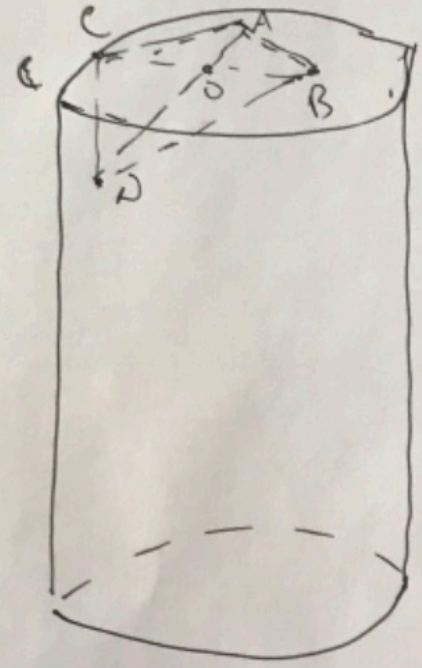
$\Rightarrow CB'BH$ – прямоугол. и

$BH = CB' = 2\sqrt{2}$, $CD = CH + HD =$

$= \sqrt{25 - (2\sqrt{2})^2} + \sqrt{49 - (2\sqrt{2})^2} =$

$= \sqrt{17} + \sqrt{41}$

Чистовик №4



1). $CA = AO = CO$

$DB = DO$

$\triangle CBD = \triangle CAD$ по 3-м сторонам $CB = CA$, CD - общ.

$DB = DA \Rightarrow \angle DCB = \angle DCA \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{DC}, \vec{CB}) = (\vec{DC}, \vec{CA})$

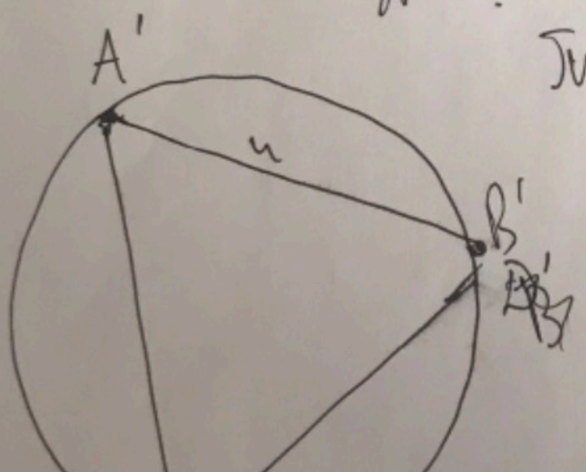
$(\vec{DC}, \vec{AB}) = (\vec{DC}, \vec{BC} + \vec{CA}) =$

$= (\vec{DC}, \vec{BC}) + (\vec{DC}, \vec{CA}) =$

$= (-\vec{DC}, \vec{CA}) + (\vec{DC}, \vec{CA}) = 0;$

Значит $\vec{AB} \perp \vec{CD}$, но тогда AB лежит в плоскости основания цилиндра

2). Спроецируем тетр. на основание цилиндра:



Т.к. $AB \parallel$ плоскости, то $AB = A'B'$;

3). В этой окр-ти есть хорда длиной 4 $\Rightarrow$ радиус ≥ 2;

min R (R) достигается, когда $R = 2$, а $A'B'$ - диам.

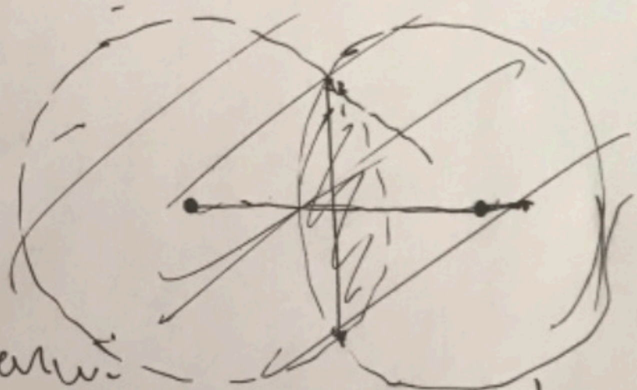
Чистовик №5

$$\left[\begin{array}{l}(y-b)^2+(x-a)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50)\end{array}\right.$$

Рассмотрим посл. нер-во:

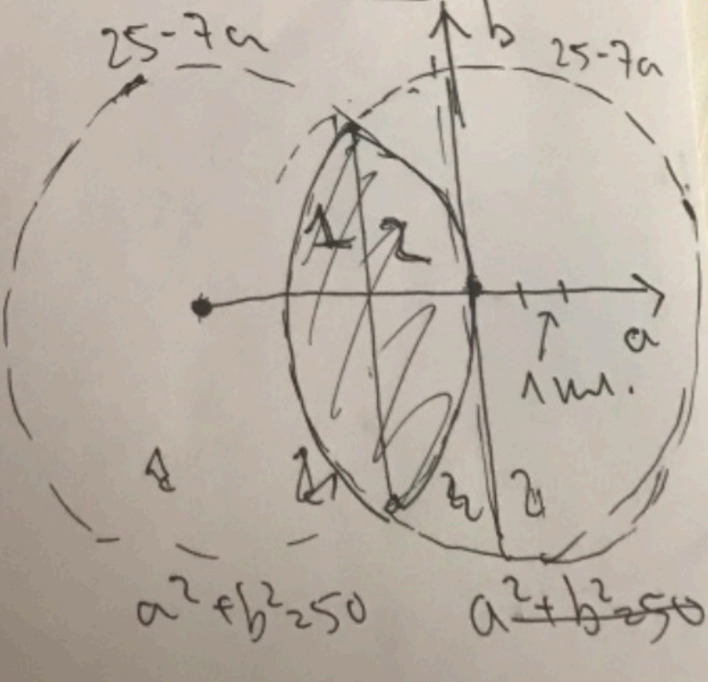
$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a^2+b^2 \le 14a+2b; \\ 14a+2b \le 50;\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}a^2+b^2 \le 50; \\ 14a+2b > 50;\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50; \\ 14a+2b \le 50;\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}a^2+b^2 \le 50; \\ 14a+2b > 50;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50, \\ b \le 25-7a;\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}a^2+b^2 \le 50; \\ b > 25-7a;\end{array}\right.\end{array}\right.$$



$(a-7)^2+(b-1)^2=50$

Все точки из закрашиваемой области могут быть центрами окружностей

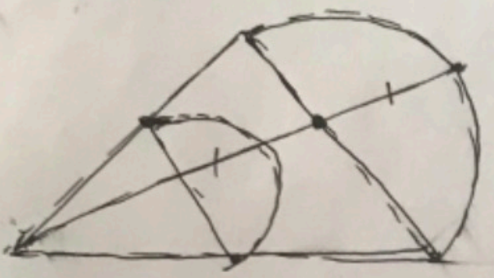


1: $\left[\begin{array}{l}(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50; \\ b \le 25-7a;\end{array}\right.$

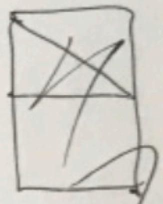
2: $\left[\begin{array}{l}a^2+b^2 \le 50; \\ b > 25-7a;\end{array}\right.$

Чистовик N6

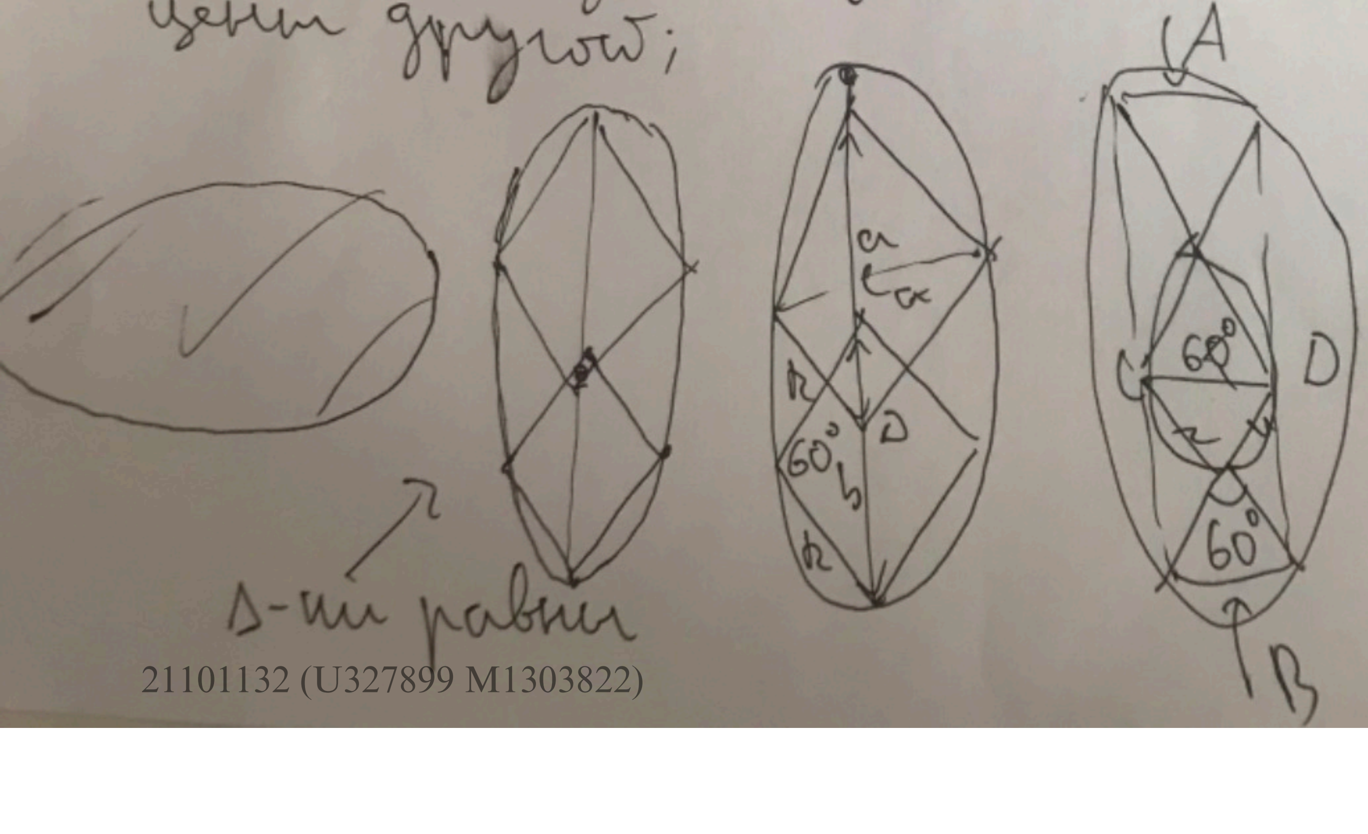
Применим гомотетию с центром в (0;0) для области (2) и коэффициент 2, тогда получим новую область 2', заметим, что что если (A $(a,b) \in 2$, то $(a',b') = (x;y)$; $\in$
$\in (y-b)^2+(x-a)^2 \leq 50$



Аналогично с областью 1 гомотетия будет с центром в т. (7;1) и коэфф. = 2



Заметим, что $y = 25-7a$ будет переходить в касательные к исходным окружностям под действием гомотетии, т. е. каждый из них содержит центр другой;



Чистовик №7

Итак, фиг. состоит из 5 областей

a, B, C, D и полос.

C: $\pi\cdot(2\cancel{R})^2\cdot\frac{120^\circ}{360^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\cancel{(2R)^2}(2R)^2=$

$=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(2R)^2$

Аналогично ~~A~~ D

A: $\pi R^2\cdot\frac{60^\circ}{360^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=\pi\cdot 6-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$

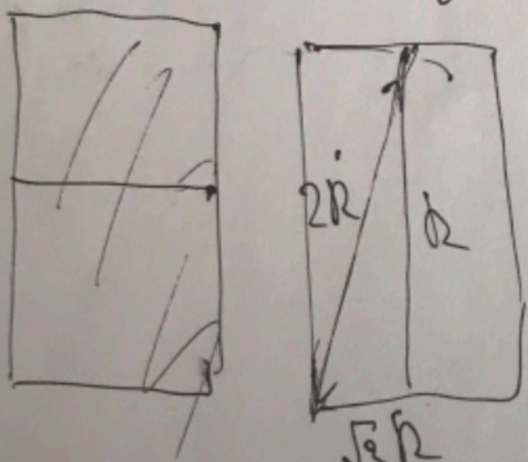
Аналогично B ... ;

Оставшаяся полоса:

$S=2\sqrt{3}R\cdot R=2\sqrt{3}R^2$

Итого, $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2R^2+\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot R^2+$

$+25R^2$, где $R^2=25$



Черновик N1: $\angle BCB' = 90° - \angle DCB \Rightarrow \angle BCB' = \angle ACA' =$

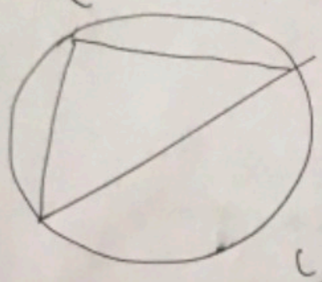
$\Rightarrow CB' = CA'$

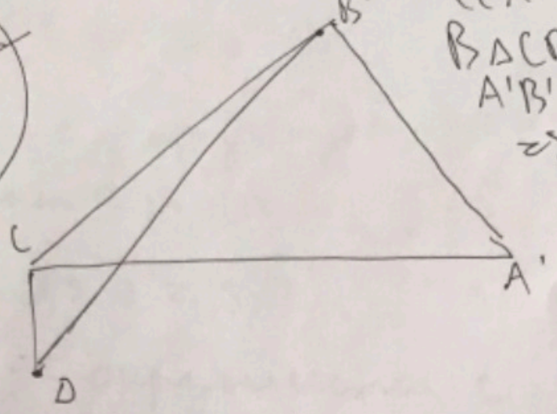
$(CA = CB)$

В $\triangle CB'A'$:

$A'B'$ - диам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C = 90°$, но





1). $\angle B'$ $\angle DCB' = 90° - \angle DCB \Rightarrow \angle DCB' = \angle ACA' \Rightarrow$

$\Rightarrow CB' = CA'$; & $(CA = CB)$

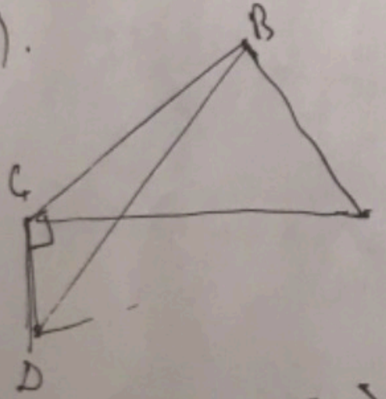
& $(CA =$

2). & В $\triangle CB'A'$: $A'B'$ - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C = 90°$, но ещё $CA' = CB' \Rightarrow$

$\Rightarrow CA' = CB' = \cancel{\sqrt{2}}\frac{A'B'}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} 2\sqrt{2}$;

3).



$CB' = 2\sqrt{2}$ показывает, что $\angle B'C$.

Проведём $BH \perp CD$, тогда $\angle HBB' = 90°$, т.к. $BB_1 \parallel CD$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все углы в $CB'BH$ равны $90° \Rightarrow CB'BH$ - прямоуголь-к и

$BH = CB' = 2\sqrt{2}$, $CD = CH + HD = \sqrt{25-(2\sqrt{2})^2} + \sqrt{49-(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

Черновик №2:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50; (1)\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b, 50);\end{cases}$$

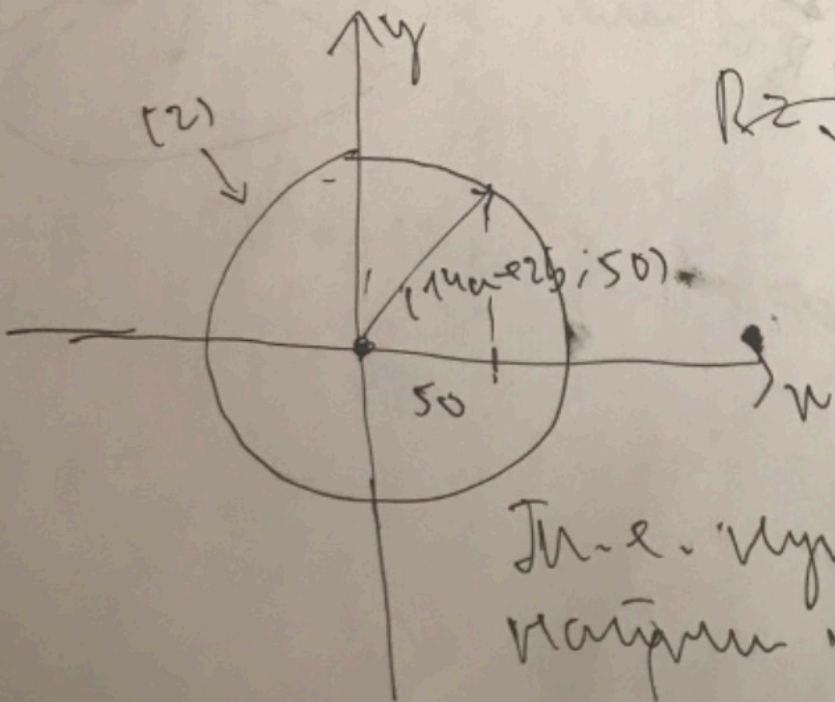
(1) - ур-е окружности с центром в т. $(a;b)$, $R=\sqrt{50}=$
$=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$;

(2) - ур-е окружности с ц. в т. $(0;0)$

Т.е. имеем 2 окружности с разными центрами;

(1): $\le$ => то что внутри окружности

(2): $\le$ => аналогично;



$R=\cancel{\sqrt{14a^2+2b}}$

Т.е. нужно найти min от $14a+2b$

Черновик №3:

~~R = 5~~

$R^2 = 50^2 + (196a^2 + 56ab + 4b^2)$;

~~196 > 0 => a > 0 => min, если ветви параболы вниз:~~

~~$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{56}{392}$;~~

$\begin{array}{r} \times 196 \\ 2 \\ \hline 392 \end{array}$

$R^2 = 50^2 + (196a^2 + 56ab + 4b^2)$;

$R^2 = 50^2 + (14a + 2b)^2$;

т.к. $(14a + 2b)^2 \geq 0$, то

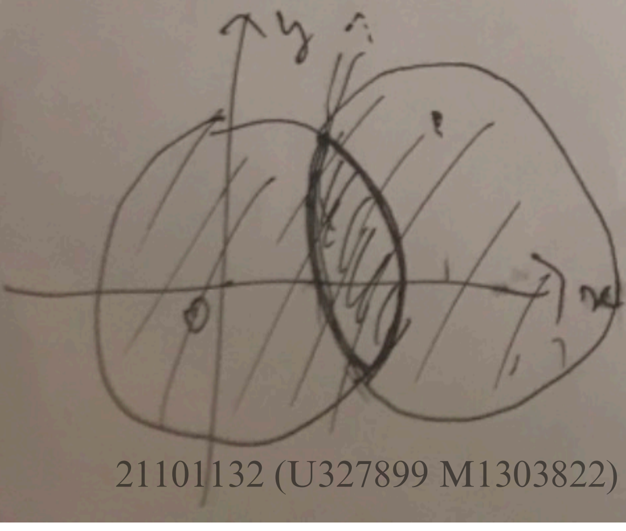
min в при $14a + 2b = 0$;

$a = -\frac{2b}{14}$; или $b = -7a$;

$a = -\frac{b}{7}$;

$R^2 = 50^2 + (14a - 7a)^2 = 50^2 + 0$;

$R = 5\sqrt{2}$



$(7a; 50)$

Получили 2 пересек. окружности, место пересечения будет искомой фигурой;

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101132**

ID профиля: **327899**

Вариант 22

Числовик №1: Вариант №22

Часть №2

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14; \ (1); \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18}; \ (2); \end{cases}$$

Из (1): a, b и c состоят только из 2 и 7, причём в нулевой степени

$a=2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1};$

$b=2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2};$

$c=2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3};$

Причём НОД$(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ и НОД$(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ = 1

Из (2): НОК$(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=17$ =>

=> С учётом вышесказанного

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 = \left[\begin{array}{l} 1,1,17 \\ 1,17,17 \end{array}\right.$$

НОК$(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=18$ =>

=> С учётом вышесказанного

$$\beta_1;\beta_2;\beta_3 = \left[\begin{array}{l} 1,1,18 \\ 1,3,6 \\ 1,3,18 \\ 1,6,18 \\ 1,18,18 \end{array}\right.$$

ЧИСТОВИК N2

N4 Количество троек a, b, c - количество сочетаний чисел наборов для α и β:
Тройки 2 симметричны — 2 одинаковых числа и ~~одно другое~~ 1 другое;
С ~~одинаковыми~~ аналогичными тройками и с β будет по 2 сочетания (4 пары)
С тройками из уникальных чисел будет по 3 сочетания (6 пар)

Итого, $2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26$

Ответ: 26;

Чистовик №3:

№5 Пусть $\frac{x}{2}+1=a$; $\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}=b$;

$\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=c$;

Заметим, что $\begin{cases} \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\geqslant 0; \\ \frac{3x}{2}-6\geqslant 0; \end{cases}$

Введём a, b, c:

$\log_{a^2} b^2 = \log_a b$;

$\log_b c^4 = 4\log_b c$;

$\log_c a$;

1). $\begin{cases} \log_a b = 4\log_b c; \\ \log_c a + 1 = \log_a b; \end{cases}$

$\log_c a(\log_c a + 1) = 4\log_b c \cdot \log_c a$;

$\log_c^2 a + \log_c a = 4\log_b a$;

$(\log_c a + 1)(\log_c^2 a + \log_c a) =$

$= 4\log_b a$; $\log_c b = 4$;

$\log_c^3 a + 2\log_c^2 a + \log_c a - 4 = 0$;

$(\log_c a - 1)(\log_c^2 a + 3\log_c a + 4) = 0$;

$\log_c a = 1$ $\qquad$ $D<0$

Чистовик №4:

№5

$\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=\frac{x}{2}+1;$

$\frac{3x}{2}-6=\frac{x^4}{4}+x+1;$

$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{x}{2};$

$\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}x+7=0;$

$x^2-2x+28=0;$

$D<0 \Rightarrow$ Решений нет;

2). $\begin{cases} \log_a b=\log_c a; \\ 4\log_b c+1=\log_a b; \end{cases}$

~~$\log_a b\cdot\log_a b$~~

$\log_a b\cdot\log_a b=\log_c b;$

$\underline{\log_a}$ $\log_a^2 b\cdot\log_b c=1;$

$\log_a^2 b(\log_a b-1)=4;$

$\log_a^3 b-\log_a^2 b+4=0;$

$(\log_a b-2)(\log_a^2 b+\log_a b+2)=0;$

$\log_a b=2=\log_c a;$ $D<0$

Черновик №5:

№5

$\log_a b = 2 = 2\log_c a;$

$\frac{3x}{2} - 6 = \frac{x}{2} + 1;$

$x = 7;$

3) $\begin{cases} 4\log_b c = \log_c a; \\ \log_a b + 1 = \log_c a; \end{cases}$

$4\log_b a = \log_c^2 a;$

$4 = \log_c^2 a \cdot \log_a b = \log_c^3 a - \log_c^2 a;$

Аналогично предыдущему:

$\log_c a = 2$ - единственное решение;

Значит $\log_a b = 1;$

$\sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}} = \frac{x}{2} + 1;$

$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = \frac{x^2}{4} + x + 1;$

$x^2 + 4x + 4 - 14x + 17 = 0;$

$x^2 - 10x + 21 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x = 7; \\ x = 3; \end{array}\right.$ $\to$ ~~Не~~ Не подходит, т.к. $\frac{3x}{2} - 6 > 0$ не выполнено;

Ответ: $x = 7;$

№5 Черновик №1 ~~[illegible]~~

Замена: $\log^2_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$;

1). $\begin{cases} -\log_b 4 = 4\log_c b; \\ \log_a c = \log_b a; \\ \cancel{\log_a c = \log_a(c+1) =} \\ \cancel{\log_a c} \end{cases}$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)=a$;

$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$;

$\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}=b$;

$\log^2_{\sqrt{\frac{3x}{2}+6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$;

$\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=c$

1) $\begin{cases} \log_a b = 4\log_b c \\ \log_c a+1=\log_a b \end{cases}$

$\log_c a(\log_c a+1)=4\log_b c\cdot\log_c a$

$\log^2_c a+\log_c a=4\log_b a$;

$(\log_c a+1)(\log^2_c a+\log_c a)=4\cdot\log_b a; \log_c b^2=4$;

$=4$;

$\log^3_c a+2\log^2_c a+\log_c a-4=0$;

$(\log_c a-1)(\log^2_c a+3\cdot\log_c a+4)=0$;

$\log_c a=1$; $D<0$

$\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=\frac{x}{2}+1$;

$\frac{3x}{2}-6=\frac{x^2}{4}+x+1$;

$\frac{x^2}{4}+x+1=\frac{x}{2}$;

21101132 (U327899 M1303823)

$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x + 7 = 0;$ Черновик №2

$x^2 - 2x + 28 = 0;$

$D < 0 \Rightarrow$ Решений нет;

2). $\begin{cases} 4\log_a b = \log_c a; \\ 4\log_b c + 1 = \log_a b; \end{cases}$

$\log_a b \cdot \log_a b = \log_c b;$

$\cancel{\log_a^2 b \cdot \log_c b}\ {}_b c$

$\log_a^2 b \cdot \log_b c = 1;$

$\log_a^2 b \cdot (\log_a b - 1) = 4;$

$\log_a^3 b - \log_a^2 b - 4 = 0;$

$(\log_a b - 2)(\log_a^2 b + \log_a b + 2) = 0;$

$\log_a b = 2 = \log_c a;$ $D < 0;$

$\frac{3x}{2} - 6 = \frac{x}{2} + 1;$

$x = 7;$

~~Ответ:~~

31). $\begin{cases} 4\log_b c \\ \end{cases}$ Черновик №3

31). $\begin{cases} 4\log_b c = \log_c a; \\ \log_a b + 1 = \log_c a; \end{cases}$

$4\log_b a = \log_c^2 a$

$4 = \log_c^2 a \cdot \log_a b = \log_c^3 a - \log_c^2 a;$

Аналогично предыдущему:

$\log_a \log_c a = 2$ - единств. реш

Значит $\log_a b = 1;$

$\sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}} = \frac{x}{2} + 1;$ $\frac{x}{2} + 1 \geq 0$

$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = \frac{x^2}{4} + x + 1;$

$x^2 + 4x + 4 - 14x + 17 = 0;$

$x^2 - 10x + 21 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x = 7; \\ x = 3 \end{array}\right.$ $\rightarrow$ Не подходит, т.к.

$\frac{3x}{2} - 6 > 0$

Ответ: 7;

21101132 (U327899 M1303823)

~~Черновик №1~~ Черновик №1

Заметим, что $\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} > 0$;

Введём a, b, c

$\log_{a^2} b^2 = \log_a b$;

$\log_b c^4 = 4\log_b c$;

$\log_c a$;

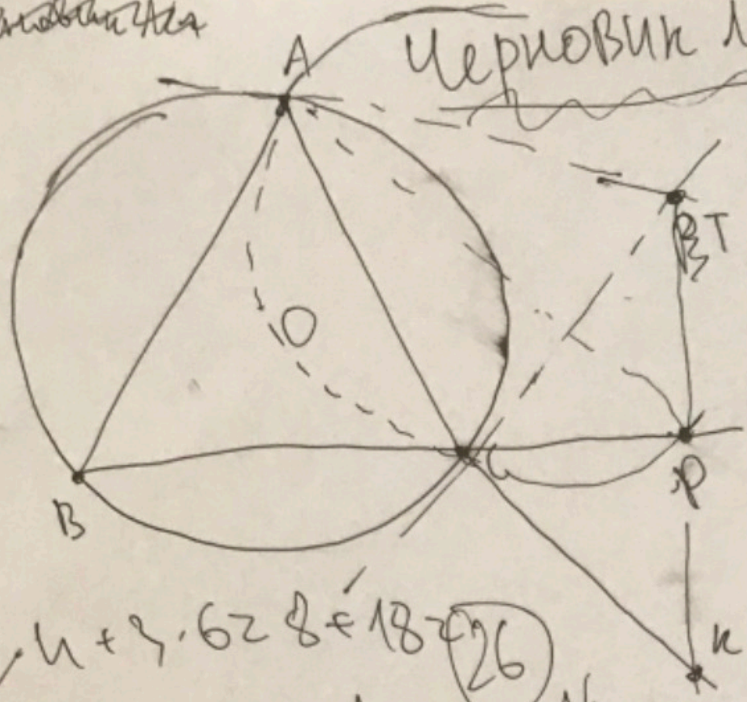
$\frac{x}{2} + 1 > 0$;

$\frac{3x}{2} - 6 > 0$;

21101132 (U327899 M1303823)

~~Черновик№4~~

Черновик №5



$S_{APK}=7;$

$S_{CPK}=5;$

б). $\angle ABC = \operatorname{arcctg}\frac{3}{4};$

а). $S_{ABC}=?$

б). $AC=?$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 = \left[\begin{array}{l}1117\\ 11717\end{array}\right.$

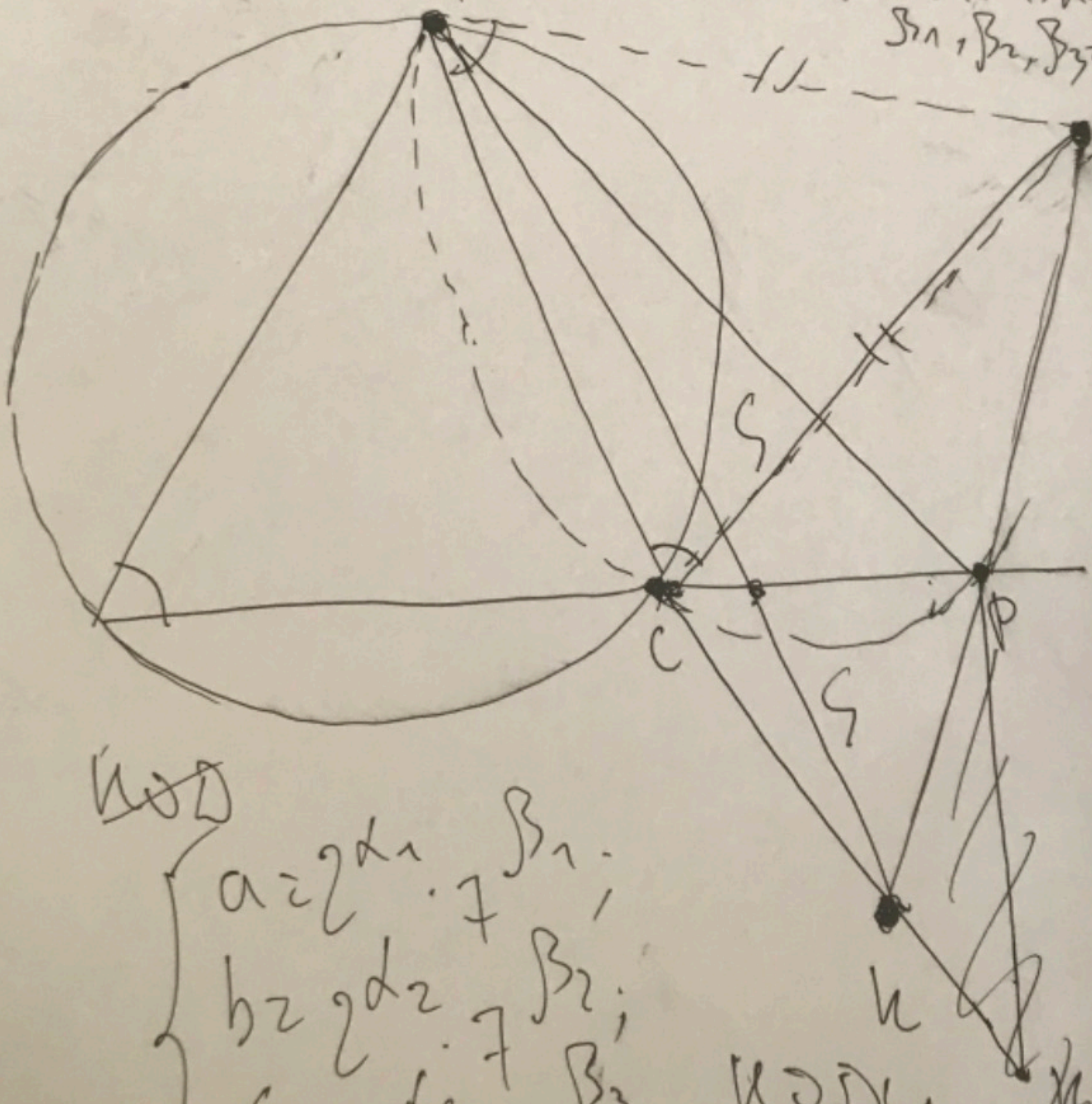
$2\cdot4+3\cdot6=8+18=26$

№4

$НОД(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=$

$\beta_1,\beta_2,\beta_3=$

$\left[\begin{array}{l}1118\\ 136\\ 1318\\ 1618\\ 11818\end{array}\right.$



НОД

$\begin{cases} a=2^{\alpha_1}\cdot7^{\beta_1};\\ b=2^{\alpha_2}\cdot7^{\beta_2};\\ c=2^{\alpha_3}\cdot7^{\beta_3};\end{cases}$

$НОД(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=2$

$\to 1 = НОД(\beta_1$

21101132 (U327899 M1303823)